Teorema dell'indice algebrico

(su alcuni libri viene citato come Hodge index thm.)

X sup. proiettiva liscia

H divisore ampio

D divisore t.c. $\begin{cases} D \not\equiv_{num} 0 \\ D \cdot H = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow D^2 < 0$$

Def. Equivalenza numerica

$D \sim_{num} D'$ SSE

$\forall C$ curva irriducibile

$D \cdot C = D' \cdot C$

NOTAZIONE: $\mathrm{Num}(X) = \dfrac{\mathrm{Pic}(X)}{D \sim_{num} 0}$

COR. In $\mathrm{Num}(X)$

il prodotto di intersezione ha segnatura

$(+1, \underbrace{-1, \_\_, -1}_{\rho - 1})$

dove $\rho = \rho(X) = \dim \mathrm{Num}(X)$
$= \dim \mathrm{Pic}(X)$

$$\mathrm{Pic}^0(X) \to \mathrm{Pic}(X) \cong H^1(\mathcal{O}_X^*) \xrightarrow{c_2} H^2(X, \mathbb{Z})$$

divisori di grado 0

classi di coomologia

DIM

Per assurdo supponiamo
$D \not\equiv_{num} 0$, $D \cdot H = 0$, $D^2 \geq 0$

CASO 1: $D^2 > 0$

Sia $H' = D + nH$

allora per $n \gg 0$ per il criterio di Nakai-Moishezon

H' è ampio

$D \cdot H' = D^2 > 0$

Lemma: Per $m \gg 0$

mD è effettivo $\left(h^0(mD) > 0\right)$

Ma H è ampio
mD effettivo $\Big\} \Rightarrow H \cdot (mD) > 0$

Per bilinearità: $H \cdot D > 0$

ASSURDO

CASO 2: $D^2 = 0$

$D \not\equiv_{num} 0 \Rightarrow \exists$ divisore

t.c. $D \cdot C \neq 0$

wlog posso supporre $D \cdot C > 0$

Prendiamo

$$C' = (H^2) \cdot C - (C \cdot H) \cdot H$$

si ha $C' \cdot H = 0$

Poniamo $D' = nD + C'$

ALLORA:

$$D' \cdot H = (nD + C') \cdot H = 0$$

$$(D')^2 = (nD + C')^2 =$$

$$= 2nD \cdot C' + (C')^2$$

Per $n \gg 0$ $\quad (D')^2 > 0$

Quindi ci siamo ricondotti al caso (1)

$\square$

MAPPE BIRAZIONALI

[Cf. Beauville]

X, Y sup. proiettive lisce

$\varphi : X \dashrightarrow Y$ birazionale

$\Updownarrow$

$\exists \; U \subset X$
$V \subset Y$ aperti densi

t.c. $\varphi|_U : U \longrightarrow V$ è isomorfismo

SCOPPIAMENTO di un punto

(BLOW UP)

X sup. liscia

$p \in X$ punto

$p \in U \subset X$ aperto di Zariski

(x, y) coordinate locali di U in p

$p = (0,0)$

Def. Scoppiamento in p di U

$$\varepsilon : Bl_p(U) \longrightarrow U$$

$$U \times \mathbb{P}^1 \supset Bl_p(U) = \{(q, (\xi, \eta)) : x(q) \cdot \eta - y(q) \cdot \xi = 0\}$$

$$\varepsilon : \begin{cases} \text{se } x, \text{ o } y \neq 0 \\ \varepsilon(q, (\xi, \eta)) = q \\ \\ \text{se } \begin{matrix} x = 0 \\ y = 0 \end{matrix} \quad \varepsilon(p, \mathbb{P}^1) = p \end{cases}$$

In particolare:

$$\varepsilon^{-1}(p) \cong \mathbb{P}^1$$

$$V \setminus \{p\} \cong Bl_p(V) \setminus \varepsilon^{-1}(p)$$

[è lo scoppiamento di $\mathbb{A}^2$ in $(0,0)$]

X sup. proiettiva

$p \in X$

$$Bl_p(X) \doteq \left. Bl_p(U) \sqcup X \setminus \{p\} \middle/ \sim \right.$$

$$\sim : \ U \setminus \{p\} \sim \varepsilon^{-1}(U \setminus \{p\})$$

<u>PROP</u>

X liscia proiettiva $\Rightarrow$ $Bl_p(X)$ è liscia e proiettiva

IDEA della dim

In $Bl_p(V)$ ho 2 carte

$(\xi \neq 0)$ $\quad$ $(\eta \neq 0)$

In $(\xi \neq 0)$ poniamo

$$v = \frac{\eta}{\xi}$$

si ha relazione $y = v \cdot x$

$\Rightarrow$ In $Bl_p(V) \cap (\xi \neq 0)$ posso usare coordinate (x, v)

Analogamente :

In $Bl_p(V) \cap (\eta \neq 0)$

si ha $w = \frac{\xi}{\eta}$

$x = w \cdot y$

& coordinate (y, w)

$X \subset \mathbb{P}^n$

sia $p = (1 : 0 \_\_\_ : 0)$

loc.$^{\text{te}}$ $X = \{ x_3 = \_\_\_ = x_n = 0 \}$

CLAIM: $Bl_p(X) \subset \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^{n-1}$

è un chiuso

$$X \times \mathbb{P}^{n-1} \supset \Gamma = \{(q, \xi_i) : x_i(q)\cdot \xi_j = x_j(q)\cdot \xi_i = 0\}$$

$$\forall i, j = 0, \ldots, n$$

n.b.

$$\Gamma \supset X \setminus \{p\} \cup \{p\} \times \mathbb{P}^{n-1}$$

Tesi: $Bl_p(X) \cong \overline{X \setminus \{p\}} \subset \Gamma$

Poniamo $\hat{X} = \overline{X \setminus \{p\}}$

suff. $\hat{U} = \{(q, \xi_i) : q \in U\}$

Usiamo mappa ausiliaria

$$\mathbb{P}^1 \hookrightarrow \mathbb{P}^{n-1}$$
$$(\xi,\eta) \longmapsto (\xi,\eta,0,\dots,0)$$

Sua "inversa"

$$\mathbb{P}^{n-1} \longrightarrow \mathbb{P}^1$$
$$(\xi_1,\dots,\xi_n) \longmapsto (\xi_1,\xi_2)$$

OTTENIAMO

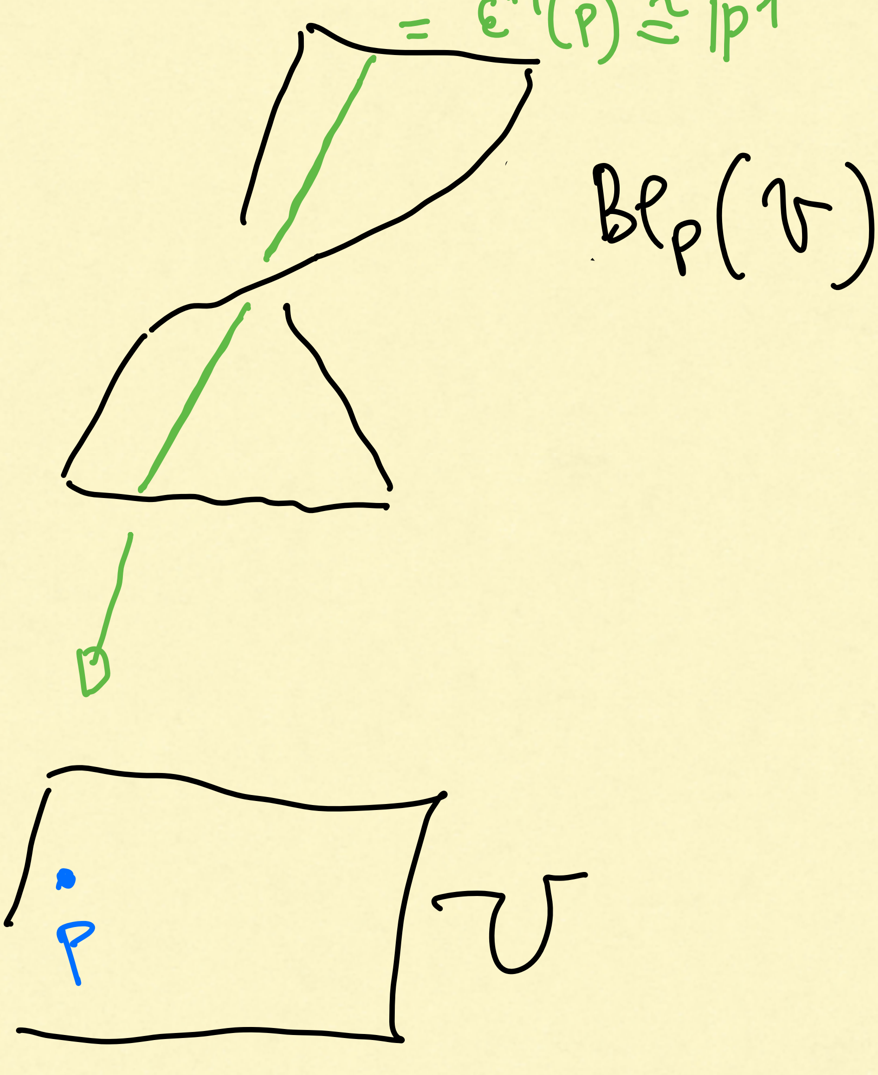
$$Bl_p(U) \cong \hat{U}$$

&

$$\hat{X} \cap \left(\{p\} \times \mathbb{P}^{n-1}\right) \cong \{p\} \times \mathbb{P}^1$$

Sui punti $(\xi, \eta, 0 \sim 0)$ è isomorfismo $\square$

RAPPRESENTAZIONE "VISIVA"



TRASFORMATA STRETTA
&
TRASFORMATA TOTALE

di una curva
tramite scoppiamento

Dato $\varepsilon : Bl_p(X) \longrightarrow X$ scoppiamento in p

Sia $C \subset X$ una curva

<u>Def.</u> (1) $\tilde{C} \doteq \overline{\varepsilon^{-1}(C - \{p\})}$

è la trasformata stretta di C

<u>Def</u> (2) $\varepsilon^{*}(C)$ è la trasformata TOTALE di C

come pull-back di divisori?

PROP. Sia $\varepsilon : Bl_p(X) \to X$ scoppiamento in p

Sia C curva passante per p.

supponiamo $mult_p(C) = m$

ALLORA:

$$\varepsilon^*(C) \sim_{lin} \tilde{C} + mE$$

dove $E = \varepsilon^{-1}(p) \cong \mathbb{P}^1$

curva eccezionale associata allo scoppiamento

<u>DIM</u> Scegliamo coordinate locali (x, y) t.c. $p = (0,0)$

$$C = (f(x,y) = 0)$$

con $f = \sum_{j \geq m} f_j(x,y)$

f_j omogeneo di grado j

$$\left(\mathrm{mult}_p(C) = m \Rightarrow \begin{array}{l} f_m \neq 0 \\ f_j = 0 \\ \forall j \leq m-1 \end{array} \right)$$

Per semplicità supponiamo $\{y=0\}$ non tangente propria a C in P

Poniamo $v = \eta / \xi$

$$y = x \cdot v$$

ALLORA:

$$f(x,y) = x^m \left(f_m(1,v) + g(x,v) \right)$$

nella carta affine (x,v)

$$\varepsilon^*(C) \leftrightarrow f \circ \varepsilon = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (x^m = 0) \cup (f_m + g = 0)$$

Ponendo

$$\tilde{C} = \left(\frac{f}{x^m} = 0 \right)$$

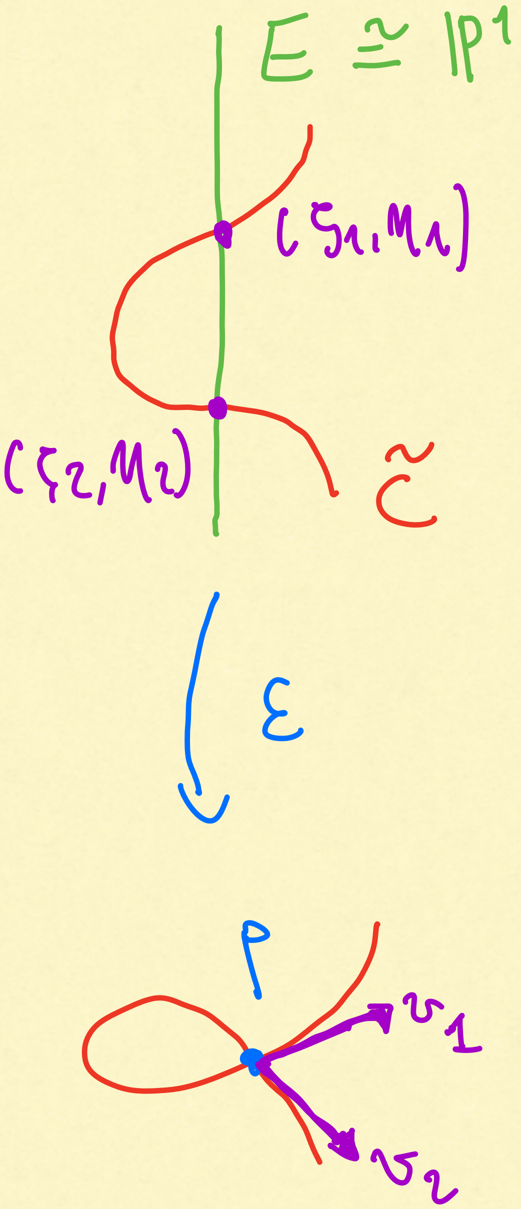
$$E = (x = 0)$$

si ottiene:

$$\varepsilon^*(C) = \tilde{C} + mE$$

$\square$

n.b.: $\quad \tilde{C} = \overline{\varepsilon^{-1}(C \setminus \{p\})}$



$E = \varepsilon^{-1}(p)$

vettori tangenti (ξ_1, η_1) (ξ_2, η_2)

TEOREMA. Sia X liscia

$$\varepsilon : Bl_p(X) \to X$$

scoppiamento di X in p

ALLORA:

(i) $\mathrm{Pic}(Bl_p(X)) \cong \mathrm{Pic}(X) \oplus \mathbb{Z}E$

(ii) D, D' divisori su X

$$\Downarrow$$

$$\varepsilon^*(D) \cdot \varepsilon^*(D') = D \cdot D'$$

$$\varepsilon^*(D) \cdot E = 0$$

(iii) $E^2 = -1$

(iv) $NS(Bl_p(X)) \cong NS(X) \overset{\perp}{\oplus} \mathbb{Z}E$

(v) divisore canonico di $Bl_p(X)$

$$K_{Bl_p(X)} = \varepsilon^*(K_X) + E$$

<u>DIM</u>

(ii) Prodotto di intersezione
è invariante rispetto
all' equivalenza lineare
&
è multilineare in NS
Pic

Dati: D, D' posso supporre che

$$\dim |D| > 1$$
$$\dim |D'| > 1$$

Scegliendo $D_1 \sim_{lin} D$

$D_2 \sim_{lin} D'$

t.c. $p \notin D_1, \quad p \notin D_2$

ALLORA $\varepsilon^*(D) \cdot \varepsilon^*(D') = D \cdot D'$

&

$$\varepsilon^*(D_1) \cap E = \emptyset$$

cioè $\varepsilon^*(D_1) \cdot E = 0$

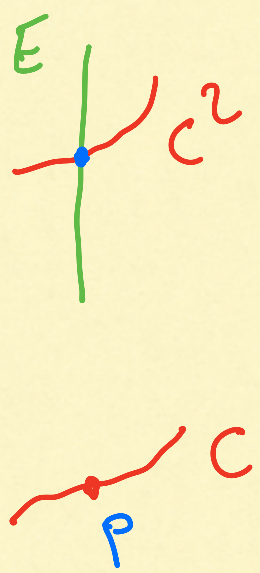
(iii) Scegliamo curve

C t.c. $\mathrm{mult}_p(C) = 1$

$\Rightarrow$ $\tilde{C}$ interseca E esattamente in 1 punto

Dal punto di vista coomologico

$$\tilde{C} \cdot E = 1$$



$$\text{PROP} \Rightarrow \varepsilon^*(C) = \tilde{C} + E$$

Per (ii) $\varepsilon^*(C) \cdot E = 0$

cioè $(\tilde{C} + E) \cdot E = 0$

$\Rightarrow E^2 = -1$

(i) Consideriamo pull-back & push-forward

$\varepsilon^* : \mathrm{Pic}(X) \longrightarrow \mathrm{Pic}(\mathrm{Bl}_p(X))$

$\varepsilon_* : \mathrm{Pic}(\mathrm{Bl}_p(X)) \longrightarrow \mathrm{Pic}(X)$

si ha:

ε_* è surgettiva $\boxed{C = \varepsilon_*(\tilde{C})}$

$$\mathcal{E}_*(E) = 0$$

In particolare: $\operatorname{Ker} \mathcal{E}_* = \langle E \rangle$

$\mathcal{E}^*$ è iniettiva

$$\mathcal{E}^*(c) \sim_{ein} 0$$

$$\Downarrow$$

$$\mathcal{E}_* \mathcal{E}^*(c) \sim_{ein} 0$$

Ma $\quad \mathcal{E}_* \mathcal{E}^*(c) = \mathcal{E}_*(\tilde{c})$

$$= c$$

$$\Rightarrow \quad c \sim_{ein} 0$$

(iv) Segue da (i)

(v) consideriamo

2-forma ω t.c.

$$\begin{cases} \omega \text{ olomorfa in un intorno di } p \\ \omega(p) \neq 0 \end{cases}$$

Consideriamo $\varepsilon^*(\omega)$

In $Bl_p(X) \setminus E \cong X \setminus \{p\}$

poli & zeri di $\varepsilon^*(\omega) \longleftrightarrow$ poli & zeri di ω

cioè:

$$\operatorname{div}(\varepsilon^* \omega) = \varepsilon^*(\operatorname{div} \omega) + K \cdot E$$

Tesi: $K = +1$

scegliamo coord. locali t.c.

$$\omega = dx \wedge dy$$

$$y = v \cdot x$$

$\Downarrow$ in coordinate (x, v) su $Bl_p(U)$

$$\varepsilon^* \omega = x \cdot dx \wedge dv$$

CIOE'

$$\operatorname{div}(\varepsilon^* \omega) = \operatorname{div}(x) + \varepsilon^* \operatorname{div}(dx \wedge dy)$$

$$= E + \varepsilon^* K_X \qquad \square$$