3/11/2020

FASCI INVERTIBILI (invertible sheeves)
&
FIBRATI in rette (line bundles)

FIBRATO F su X superficie di Riemann è

$$F \longrightarrow X \quad \text{t.c.}$$

$\exists$ ricoprimento $\mathcal{U} = \{V_i\}$ di X

con mappe olomorfe

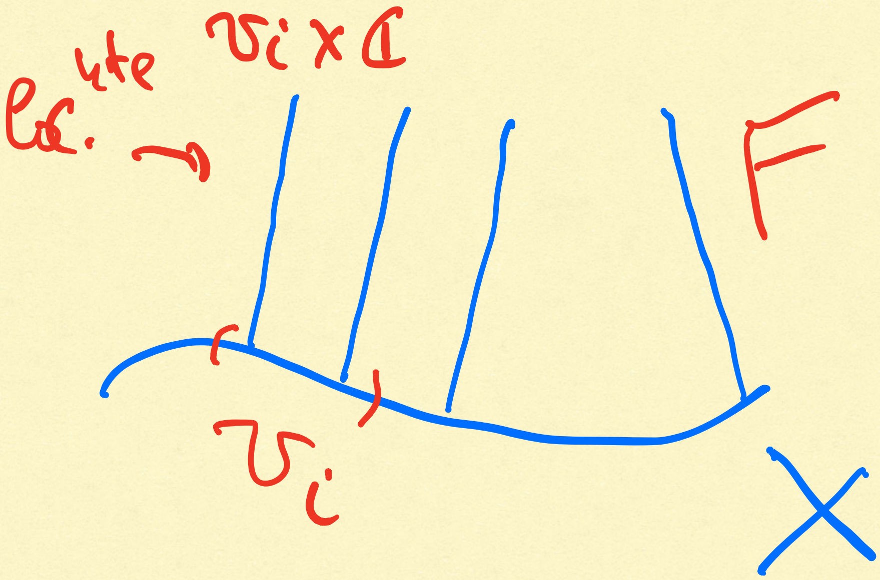
$$\bar{f}_i : F|_{V_i} \xrightarrow{\simeq} V_i \times \mathbb{C}$$
$$z \longmapsto (z, f_i(z))$$

tali che

$\forall\ U_i, U_j \quad \exists \quad g_{ij}$

$g_{ij} : U_i \cap U_j \to \mathbb{C}^*$

t.c. $f_i = g_{ij} \cdot f_j$



n.b. $\quad g_{ij} \cdot g_{ji} = 1$

$g_{ij} \cdot g_{jh} = g_{ih}$

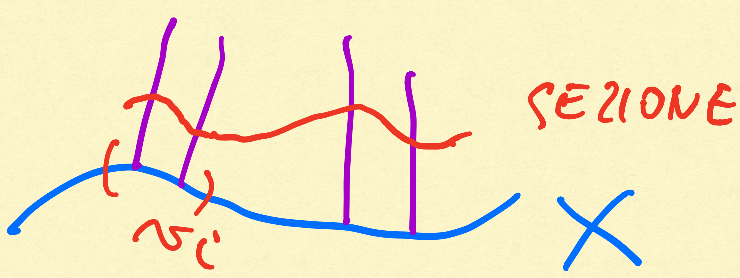
Una sezione OLOMORFA di F è il DATO di

$$\{(U_i, f_i)\} :$$

1) $\{U_i\}$ ricop. di X

2) $f_i : U_i \to \mathbb{C}$ funzione t.c.

in $U_i \cap U_j$ $f_i = g_{ij} \cdot f_j$



DATO F fibrato in rette

$\mathcal{U} = \{ U_i \}$ ricoprimento

che trivializza F

g_{ij} funzioni di transizione (cocicli)

ALLORA

possiamo costruire

fascio $\mathcal{F}$ delle sezioni di F :

$\forall\ U \subset X$ aperto

$\mathcal{F}(U \cap U_i) = \{ \underbrace{f_i : U_i \to \mathbb{C}}_{\text{sezioni di } F} \}$

condizione $\quad f_i = g_{ij} f_j$

è la stessa condizione
necessaria per ottenere
fascio INVERTIBILE

<u>VICEVERSA</u>:

Dato fascio invertibile $\mathcal{F}$
possiamo costruire fibrato
in rette $\quad F$
nel seguente modo:
consideriamo ricoprimento
$$\mathcal{U} = \{ U_i \}$$

$$f_i \in \mathcal{F}(U_i) \simeq \mathcal{O}(U_i)$$

$+$

g_{ij} cociclo

costruzione locale di F

INDUCONO:

$$\hat{f}_i : U_i \longrightarrow U_i \times \mathbb{C}$$
$$(id, f_i)$$

$+$

funzione di transizione

$$g_{ij} \quad \text{t.c. } f_i = g_{ij} f_j$$

mappe di incollamento di F

CONCLUSIONE

X sup. di Riemann

(in generale X liscia)

F fibrato in rette $\longleftrightarrow$ $\mathcal{F}$ fascio invertibile

$\tilde{f}_i : F_{|U_i} \xrightarrow{\sim} U_i \times \mathbb{C}$ $\longleftrightarrow$ $f_i \in \mathcal{F}(U_i) \cong \mathcal{O}(U_i)$

$z \mapsto (z, f_i)$

$g_{ij} \longleftrightarrow g_{ij}$

DIVISORI

X sup. di Riemann compatta

DEF. Un divisore su X è una funzione $X \to \mathbb{Z}$ il cui supporto è discreto

---

X sup. di R. compatta

un divisore D si scrive

$$D = \sum_{p \in X} D(p) \cdot p$$

dove $D(P) \in \mathbb{Z}$

$= $ grado di D in P

$= \text{molt}_P(D)$

&

$D(P) \neq 0$ in un numero finito di punti

CIOÈ: D è somma formale finita di PUNTI di X con molteplicità

In generale: X varietà liscia di $\dim = n$

un divisore D su X è

$$D = \sum D(H) \cdot H$$

dove H sono sottovarietà di codimensione $= 1$

$$D(H) \in \mathbb{Z}$$

$$D = \sum_{p \in X} D(p) \cdot p$$

divisore su X

GRADO (totale) di $D \doteq \sum D(p)$

NOTAZIONE:

$$Div(\mathcal{X}) = \{ \text{divisori su } \mathcal{X} \}$$

In $Div(\mathcal{X})$ introduciamo operazione $+$

$$\left.\begin{array}{l} D_1 = \sum D_1(P)\cdot P \\ D_2 = \sum D_2(P)\cdot P \end{array}\right\} \longrightarrow D_1 + D_2 =$$

$$= \sum \big(D_1(P) + D_2(P)\big)\cdot P$$

In questo modo:

$\left(\mathrm{Div}(\mathcal{X}), +\right)$ è un

GRUPPO COMMUTATIVO

&

$$\deg : \mathrm{Div}(\mathcal{X}) \longrightarrow \mathbb{Z}$$
$$D \mapsto \deg(D)$$

è omomorfismo di gruppi

DIVISORI PRINCIPALI

Ricordo: $f : X \to \mathbb{C}$ meromorfa

$$\Updownarrow$$

$f : X \to \mathbb{P}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ olomorfa

<u>DEF</u>. $f : X \to \mathbb{C}$ funzione meromorfa

$$\operatorname{div}(f) \doteq \sum_{p} \operatorname{ord}_p(f) \cdot p$$

divisore associato ad f

$$\{\operatorname{div}(f)\} \doteq \{\text{DIVISORI PRINCIPALI}\}$$

OSS. Teorema dei residui

$$\Downarrow$$

$$\deg(\operatorname{div}(f)) = 0$$

Esempio: $X = \mathbb{P}^1$

$f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ meromorfa

In $U_0 = \{ z_0 \neq 0 \}$ con coordinata $z = \frac{z_1}{z_0}$

$$f|_{U_0} = \frac{\prod (z - \alpha_i)^{\ell_i}}{\prod (z - \beta_j)^{m_j}}$$

$\{\lambda_i \in \mathbb{C} \cong \mathbb{V}_0\}$ zeri $\quad \ell_i = \text{molt.}$

$\{\beta_j \in \mathbb{C} \cong \mathbb{V}_0\}$ poli $\quad m_j = \text{mol}$

Nel punto ∞:

$$\text{molt.} = -\left(\sum \ell_i - \sum m_j\right)$$

DIVISORE principale associato ad f

$$\text{div}(f) = \sum \ell_i \cdot \lambda_i$$

$$- \sum m_j \cdot \beta_j$$

$$- \left(\sum \ell_i - \sum m_j\right) \cdot \infty$$

CASO PARTICOLARE:

$$f(z_0, z_1) = \frac{z_1 (z_0 - z_1)}{z_0^2}$$

$$\Longrightarrow \operatorname{div}(f) =$$

$$1 \cdot \underline{P}_0 + 1 \cdot \underline{P}_1 - 2 \cdot \infty$$

dove $P_0 = [1:0]$
$P_1 = [1:1]$
$\infty = [0:1]$

<u>oss.</u> $\deg = 2 - 2 = 0$

divisore degli zeri di f:

$$= \sum_{\substack{P \\ ord_P > 0}} ord_P(f) \cdot P = div_0(f)$$

divisore dei poli di f:

$$= -\sum_{\substack{P \\ ord_P < 0}} ord_P(f) \cdot P = div_\infty(f)$$

Possiamo scrivere

$$div(f) = div_0(f) - div_\infty(f)$$

PROP. $\mathrm{div}(f \cdot g) =$

$$= \mathrm{div}(f) + \mathrm{div}(g)$$

DIVISORI EFFETTIVI

DEF. $D = \sum D(P) \cdot P$

si dice DIVISORE EFFETTIVO se

$$D(P) \geq 0 \quad \forall P \in \mathcal{X}$$

$\boxed{\text{NOTAZIONE : } D \geq 0}$

In generale, dato D divisore posso scriverlo

$$D = D_+ - D_-$$

con
$$D_+ = \sum_{\substack{P \text{ t.c.} \\ D(P) > 0}} D(P) \cdot P$$

$$D_- = - \sum_{\substack{P \text{ t.c.} \\ D(P)}} D(P) \cdot P$$

D_+, D_- sono effettivi

In $\mathrm{Div}(X)$

$\exists$ relaz. d'ordine parziale

$$D_1 \geq D_2 \iff D_1 - D_2 \geq 0$$

FASCIO INVERTIBILE

associato a un divisore

Sia $D = \sum n_p \cdot P$

divisore su X

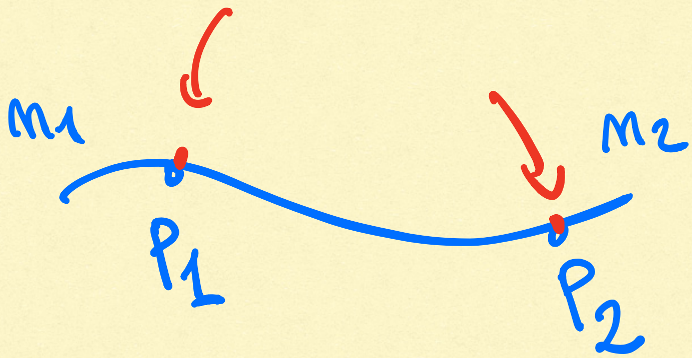
sup. di Riemann

compatta

<u>DEF</u>. $\mathcal{O}_X(D)$ fascio t.c.

$$\left(\mathcal{O}_X(D)\right)(U) = \left\{ f \text{ meromorfe in } U : \mathrm{ord}_p(f) + n_p \geq 0 \ \forall p \in U \right\}$$

cerco f con zeri o poli in P_1, P_2



se $n_1 < 0$ $\longrightarrow$ f deve avere zero in P_1 di molt. $\geq -n_1$

Se $n_1 > 0$ $\rightarrow$ f può avere polo in P_1 di molt. $\leq n_1$

OVVERO:

$$\mathcal{O}_X(D) =$$

$$= \{ f \text{ meromorfe su } X : \operatorname{div}(f) + D \geq 0 \}$$

PROP. $\mathcal{X}$ sup. di Riemann

D divisore su $\mathcal{X}$

$\Rightarrow \mathcal{O}_X(D)$ è fascio invertibile

DIM. Sia $D = \sum_{i=1}^{n} n_i P_i$

Supporto di $D = \{P_1, \dots, P_n\}$

Poniamo $U_0 = X \setminus \mathrm{Supp}(D)$

$$\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(D)|_{U_0} \cong \mathcal{O}_{\mathcal{X}}|_{U_0}$$

per definizione

In $\mho_0$

$\forall$ punto $q \in \mho_0$

$\mathrm{ord}_q(f) \geq 0$ per def.

$\forall$ punto $p_i \in \mathrm{Supp}(D)$

scegliamo intorno $\mho_i \cong \Delta$

t.c. $D|_{\mho_i} = n_i p_i$

cioè loc.$^{\text{mte}}$ $D = \mathrm{div}(\varphi_i)$

dove
$$\begin{cases} \varphi_i(z) = z^{n_i} \\ \mho_i \cong \Delta \subset \mathbb{C} \end{cases}$$

DEFINIAMO ISOMORFISMO

$$\mathcal{O}_X|_{V_i} \longrightarrow \mathcal{O}_X(D)_{|V_i}$$

$$f \longmapsto \frac{1}{\varphi_i} \cdot f$$

CIOE': $\frac{1}{\varphi_i} \overset{\text{ecc.ite}}{=} \frac{1}{z^{n_i}}$ lo penso

come generatore locale

di $\mathcal{O}_X(D)$ in V_i

$$\mathcal{O}_X(D)|_{V_i} = \left\{ g \text{ meromorfe} : \operatorname{ord}_{p_i}(g) \geq -n_i \right\}$$

loc.$^{\text{nte}}$ $\nearrow$ $\quad g = \dfrac{f}{\varphi_i} \quad f \in \mathcal{O}_X(U_i)$

<u>Cociclo :</u>

In $\quad U_i \cap U_j$

poniamo

$$g_{ij} \doteq \frac{\varphi_j}{\varphi_i}$$

è funzione di transizione

$\square$

oss. $D|_{V_i} = \mathrm{div}(\varphi_i)|_{V_i}$

SEZIONI GLOBALI

$D = \sum m_i P_i$ DIVISORE

$L(D) = \{ f$ globalmente meromorfe su X : $\mathrm{div}(f) + D \geq 0 \}$

consideriamo f su tutto X

notazione del libro di Miranda

Nel linguaggio dei fasci

$$L(D) = H^0(X, \mathcal{O}_X(D))$$

$$\shortparallel$$

spazio vett. su $\mathbb{C}$
delle sezioni olomorfe
globali di $\mathcal{O}_X(D)$