

28/10/2020

Teoria dei fasci

SUCCESSIONE ESATTA DI
FASCI $\mathcal{E}$

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{G} \xrightarrow{\psi} \mathcal{H} \rightarrow 0$$

$\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}$ fasci coerenti
di $\mathcal{O}_X$ -moduli

φ iniettive ($\ker = \{0\}$)

ψ surgettive ($\operatorname{coker} = \{0\}$)

$$\text{Ker}(\gamma) = \text{Im}(\varphi)$$

PROP. Dato succ. esatte
di $\mathcal{O}_X$ -moduli

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{G} \xrightarrow{\gamma} \mathcal{H} \rightarrow 0$$

ALLORA $\mathcal{F}$ successione
ESATTA lungo di coomologie

$$0 \rightarrow H^0(\mathcal{F}) \xrightarrow{H^0(\varphi)} H^0(\mathcal{G}) \xrightarrow{H^0(\gamma)} H^0(\mathcal{H}) \rightarrow$$

$$\xrightarrow{0} H^1(\mathcal{F}) \xrightarrow{H^1(\varphi)} H^1(\mathcal{G}) \xrightarrow{H^1(\gamma)} H^1(\mathcal{H}) \rightarrow$$

$\rightarrow \dots$

n.b. $H^0(\mathcal{H}) \xrightarrow{\partial} H^1(\mathcal{F})$
 mappe di cobordo

DIM. (solo per H^0 e H^1)

Scegliamo ric. aperto $\{U_\alpha\}$

t.c. $\forall \alpha$

$$0 \rightarrow \mathcal{F}(U_\alpha) \rightarrow \mathcal{G}(U_\alpha) \rightarrow \mathcal{H}(U_\alpha) \rightarrow 0$$

Di conseguenza, a livello
 di H^0 abbiamo

$$0 \rightarrow H^0(\mathcal{F}) \xrightarrow{H^0(\varphi)} H^0(\mathcal{G}) \xrightarrow{H^0(\gamma)} H^0(\mathcal{H})$$

non è detto che la mappa
 $H^0(\gamma)$ sia suriettiva

(Potrei avere funzioni $f_i \in H^0(X)$
che non riesco o ottengo GLOBALI
tramite $H^0(\gamma)$)

vogliamo definire mappa

$$\mathcal{D} : H^0(X) \rightarrow H^1(\mathcal{F})$$

Consideriamo due aperti

$$U_\alpha, U_\beta \quad \text{t.c.}$$

$$\mathcal{G}(U_\alpha) \rightarrow \mathcal{H}(U_\alpha)$$

$$\mathcal{G}(U_\beta) \rightarrow \mathcal{H}(U_\beta)$$

Sia $\sigma \in H^0(\mathcal{H})$

Poniamo $\sigma|_{\mathcal{V}_\alpha} \doteq \sigma_\alpha$

$\sigma|_{\mathcal{V}_\beta} \doteq \sigma_\beta$

Per scelte del $\{\mathcal{V}_\alpha\}$
ricoprimento

$\exists \gamma_\alpha \in \mathcal{G}(\mathcal{V}_\alpha) \text{ t.c.}$

$$\gamma(\gamma_\alpha) = \sigma_\alpha$$

$\exists \gamma_\beta \in \mathcal{G}(\mathcal{V}_\beta) \text{ t.c.}$

$$\gamma(\gamma_\beta) = \sigma_\beta$$

poiché Co^{nte}

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(U_\alpha) &\rightarrow \mathcal{H}(U_\alpha) \\ \mathcal{G}(U_\beta) &\rightarrow \mathcal{H}(U_\beta) \end{aligned}$$

Poniamo $\tilde{\mathcal{G}}(\sigma) = S_\alpha - S_\beta$

$$\doteq \mathcal{G}_{\alpha\beta}$$

$$\mathcal{G}_{\alpha\beta} \in \mathcal{G}(U_\alpha \cap U_\beta)$$

&
per costruzione

$$\gamma(\mathcal{G}_{\alpha\beta}) = 0 \quad \text{in } \mathcal{H}(U_\alpha \cap U_\beta)$$

$$\Rightarrow \mathcal{G}_{\alpha\beta} \in \text{Ker}(\gamma)$$

$$\Rightarrow \exists f_{\alpha\beta} \in \nabla(\nu_\alpha \cap \nu_\beta)$$

tale che

$$\varphi(f_{\alpha\beta}) = g_{\alpha\beta}$$

Poniamo $\partial(\sigma) \upharpoonright \nu_\alpha \cap \nu_\beta$

$$\doteq f_{\alpha\beta}$$

conclusione:

$$\partial((\nu_\alpha, \sigma_\alpha)) \doteq$$

$$\{(\nu_\alpha \cap \nu_\beta, f_{\alpha\beta})\}$$

$$\in H^1(\mathbb{F})$$

—
 $H^1(\varphi), H^1(\gamma)$ si
 definiscono su $\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta$
 $\forall \alpha, \beta$

$$\partial : H^1(\mathcal{H}) \rightarrow H^2(\mathbb{F})$$

omologo

□

Conseguenze :

$$\chi(\mathcal{F}) \doteq \sum (-1)^i h^i(\mathcal{F})$$

dove $h^i(\mathcal{F}) = \dim_{\mathbb{C}} H^i(\mathcal{F})$

COROLLARIO. Sia X

una varietà complessa
(olomorfe) di $\dim = n$ & sia

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H} \rightarrow 0$$

una succ. esatta di

$\mathcal{O}_X$ -moduli.

ALLORA:

$$\chi(\mathcal{G}) = \chi(\mathcal{F}) + \chi(\mathcal{H})$$

dove $\chi = \sum_{i=0}^n (-1)^i \cdot h^i$

OSS. $\mathcal{F}$ fascio
coerente di $\mathcal{O}_X$ -moduli

$$\begin{aligned} \underline{H^0(\mathcal{F})} &= \{ \text{sezioni globali} \} \\ &= \{ f \text{ definite su } X \} \end{aligned}$$

NOTAZIONE ALTERNATIVA

(cf. MIRANDA): $\Gamma(\mathbb{F})$

G.A. G.A. principle

↑

geometria algebrica &
geometria analitica

In generale:

CONSIDERIAMO

varietà proiettive liscia

$$X \subset \mathbb{P}^N(\mathbb{C})$$

X liscia $\Rightarrow X$ ha
una struttura di varietà
analitica compatta

(come nel caso di
curve $\subset \mathbb{P}^2$)

DATI $X \subset \mathbb{P}^N(\mathbb{C})$

varietà algebrica proiettiva
liscia di $\dim = n$
connessa

confrontiamo

due modi di vedere X

X varietà proiettive	X varietà analitica compatta, Hausdorff
Topologie di Zariski	Topologie di Hausdorff
$\mathcal{O}_X^{\text{alg}} = \{f: X \rightarrow \mathbb{C}\}_{\text{algebraiche}}$ (razionali)	$\mathcal{O}_X^h = \{f: X \rightarrow \mathbb{C}\}_{\text{meromorfe}}$ → funzione olomorfe
$h \hookrightarrow \text{olomorfe}$	

TEOREMA (G.A.G.A.)

$\exists$ applicazione (FUNTORE)

$$\mathcal{F} \longmapsto \mathcal{F}^R \doteq \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X^{\text{reg}}} \mathcal{O}_X^R$$

FASCIO
di
 $\mathcal{O}_X^{\text{reg}}$ -moduli

FASCIO
di
 $\mathcal{O}_X^R$ -moduli

tale che

$$H_{\text{Zar}}^i(X, \mathcal{F}) \cong H_{\text{Hens}}^i(X, \mathcal{F}^R)$$

FASCI

INVERTIBILI

DEF. $\mathcal{L}$ fascio di $\mathcal{O}_X$ -moduli
si dice INVERTIBILE
se

$\exists$ ricoprimento $\{U_i\}_{i \in I}$ t.c.

$\forall i \quad \exists$ isomorfismo $\phi_i: \mathcal{L}(U_i) \rightarrow \mathcal{O}(U_i)$

$\forall i, j \quad \exists$ funzione invertibile
 $f_{ij} \in \mathcal{O}(U_i \cap U_j)$ t.c.

$$\phi_i = f_{ij} \cdot \phi_j$$

$\uparrow$
prodotto di funzioni

CIOE'

fascio
invertibile $\Leftrightarrow$ $\left\{ \begin{array}{l} \cdot \phi_i \text{ iso con } \mathcal{O} \\ \cdot f_{ij} \text{ cocicli} \\ \text{in} \\ \mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j \end{array} \right.$

oss. (esercizio)

in $\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j \cap \mathcal{U}_k$

$$f_{ik} = f_{ij} \cdot f_{jk}$$

Esempio

$$X = \mathbb{P}^1 = \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$$

Consideriamo ricoprimento

$$\{U_0, U_1\}$$

$$\mathbb{P}^1 = \{(z_0:z_1)\}$$

$$U_0 = \{z_0 \neq 0\} \quad \text{coordinate}$$

$$z = \frac{z_1}{z_0}$$

$$U_1 = \{z_1 \neq 0\} \quad \text{coordinate}$$

$$w = \frac{z_0}{z_1}$$

$$\text{In } U_0 \cap U_1 : w = \frac{1}{z}$$

DEF. $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(m) =$ fascio
invertibile t.c.

$$i) \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(m)(U_i) \xrightarrow[\phi_i]{\simeq} \mathcal{O}(U_i) \\ \parallel \\ \mathcal{O}(\mathbb{C})$$

$$ii) \text{ cociclo } f_{10} = \left(\frac{z_1}{z_0} \right)^m$$

SEZIONI ?

$$m=0$$

$$H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(\emptyset)) = ?$$

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(\emptyset) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$$

In questo caso $f_{10} = 1$

$$H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}) = \mathbb{C}$$

funzioni globali = costanti

$$m=1$$

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1) :$$

$$\text{In } \mathcal{U}_0 : \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)(\mathcal{U}_0) \ni f(z)$$

$$\text{In } \mathcal{U}_1 : \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)(\mathcal{U}_1) \ni g(w)$$

SEZIONI GLOBALI $\hookrightarrow$

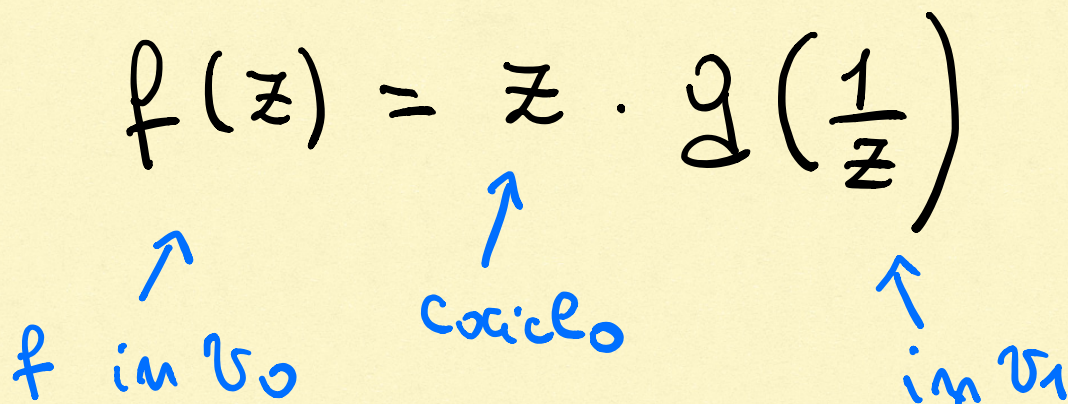
$\{f(z), g(w)\}$ che si incollano
in $V_0 \cap V_1$

CONDIZIONE di cociclo:

$$f_{10} = \left(\frac{z_1}{z_0}\right)^1$$

$Cl_0 E'$ in $V_0 \cap V_1$

$$f(z) = z \cdot g\left(\frac{1}{z}\right)$$

A diagram showing the equation $f(z) = z \cdot g\left(\frac{1}{z}\right)$. Below the equation, three blue arrows point upwards to the components: the first arrow points to f and is labeled $f \text{ in } V_0$; the second arrow points to z and is labeled cociclo ; the third arrow points to $g\left(\frac{1}{z}\right)$ and is labeled $\text{in } V_1$.

$f(z)$, $g(w)$ sono olomorfe
in V_0 in V_1

$$f = \sum_{i \geq 0} a_i z^i$$

$$g = \sum_{j \geq 0} b_j w^j$$

$$\text{In } U_0 \cap U_1$$

$$g\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{j \geq 0} b_j z^{-j}$$

condizione di cociclo

$$f(z) = z \cdot g\left(\frac{1}{z}\right)$$

$$\sum_{i \geq 0} a_i z^i = z \cdot \sum_{j \geq 0} b_j z^{-j}$$

$$\Leftrightarrow Q_0 + Q_1 z = b_1 + b_0 z$$

$$Q_i = 0 \quad \forall i \geq 2$$

$$b_j = 0 \quad \forall j \geq 2$$

$$Q_0 = b_1$$

$$\rightarrow Q_1 = b_0$$

Conclusione:

Una sezione globale
 $\in H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1))$ e

scrivo come

$$\begin{cases} f(z) = Q_0 + Q_1 z & \text{in } U_0 \\ g(w) = Q_0 \cdot w + Q_1 & \text{in } U_1 \end{cases}$$

$$\text{cioè} \quad \sigma \in H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)) =$$

$$\sigma(z_0, z_1) = \frac{a_0 z_0 + a_1 z_1}{z_0} \quad \text{in } U_0$$

$$\sigma(z_0, z_1) = \frac{a_0 z_0 + a_1 z_1}{z_1} \quad \text{in } U_1$$

CONCLUSIONE :

$$H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)) \cong \{ a_0 z_0 + a_1 z_1 \}$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{polinomi omogenei} \\ \text{di grado } 1 \\ \text{in } z_0, z_1 \end{array} \right\}$$

Analogamente:

$$H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(m)) \cong$$

$\left\{ \begin{array}{l} \text{polinomi omogenei di} \\ \text{grado } m \\ \text{in } z_0, z_1 \end{array} \right\}$

$h(z_0, z_1)$ pol. omogeneo

$$\text{in } \mathcal{U}_0 \mapsto \frac{h(z_0, z_1)}{z_0^m}$$

$$\text{in } \mathcal{U}_1 \mapsto \frac{h(z_0, z_1)}{z_1^m}$$

OPERAZIONI CON FASCI
INVERTIBILI

$\otimes$: $\mathcal{L}, \mathcal{F}$ fasci invertibili

$\mapsto \mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F}$ fascio invertibile

Definito nel seguente modo

Dato $\{U_i\}$ ricoprimento

$\mathcal{L} \hookrightarrow$ coicelo ρ_{ij}

$\mathcal{F} \hookrightarrow$ coicelo f_{ij}

$\Rightarrow \mathcal{L} \otimes \mathcal{F} \hookrightarrow$ coicelo $\rho_{ij} \cdot f_{ij}$

$$\phi_i: \mathcal{L}(v_i) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(v_i)$$

$$e \mapsto \frac{1}{\phi_i} \cdot e$$

ϕ_i sezione locale fissata di $\mathcal{L}$

$$\eta_i: \mathcal{F}(v_i) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(v_i)$$

$$f \mapsto \frac{1}{\eta_i} \cdot f$$

η_i sezione locale fissata di $\mathcal{F}$

$$L \otimes \mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(v_i)$$

$$\mathcal{F} \mapsto \frac{1}{\varphi_i \cdot \eta_i} \cdot \mathcal{F}$$

Esempio: $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(m) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n)$

$$\cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(m+n)$$

$$\begin{aligned} l_0 &= \left(\frac{z_1}{z_0}\right)^m \\ f_0 &= \left(\frac{z_1}{z_0}\right)^n \end{aligned} \rightarrow l_0 \cdot f_0 = \left(\frac{z_1}{z_0}\right)^{m+n}$$

INVERSO:

$\mathcal{L}$ fascio invertibile

$\mathcal{L}^{-1}$ è il fascio t.c.

$$\mathcal{L} \otimes \mathcal{L}^{-1} \cong \mathcal{O}_X$$

globalmente

$$\mathcal{L} \hookrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \ell_i \\ \text{w.r.t. } \ell_{ij} \end{array} \right.$$

$$\mathcal{L}^{-1} \hookrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \ell_i^{-1} \\ \text{w.r.t. } \ell_{ij}^{-1} \end{array} \right.$$