25/10/2021

MARCO FRANCIOSI

$A \subseteq \mathbb{R}$ $\quad A \neq \emptyset$

sottoinsieme

$$MG(A) \overset{def}{=} \{\text{maggioranti di } A\} = \{x \mid x \geq a \ \forall a \in A\}$$

$$MN(A) \overset{def}{=} \{\text{minoranti di } A\} = \{x \mid x \leq a \ \forall a \in A\}$$

DEF. Estremo superiore di A

notazione: $\sup(A)$

è

$$= \begin{cases} +\infty & \text{se } \mathcal{M}g(A) = \emptyset \\ \min\left(\mathcal{M}g(A)\right) & \text{se } \mathcal{M}g(A) \neq \emptyset \end{cases}$$

DEF. Estremo inferiore di A

notazione: $\operatorname{Inf}(A)$

è

$$= \begin{cases} -\infty & \text{se } \mathcal{M}r(A) = \emptyset \\ \max\left(\mathcal{M}r(A)\right) & \text{se } \mathcal{M}r(A) \neq \emptyset \end{cases}$$

OSS. 1 $\sup(A)$, $\inf(A)$

ESISTONO SEMPRE !

OSS. 2 Se A ha un massimo $= \max(A)$

allora $\max(A) = \sup(A)$

Analogamente:

Se A ha un minimo $= \min(A)$

allora $\min(A) = \inf(A)$

N.B. (i) $\sup(A) = +\infty$

$$\Updownarrow$$

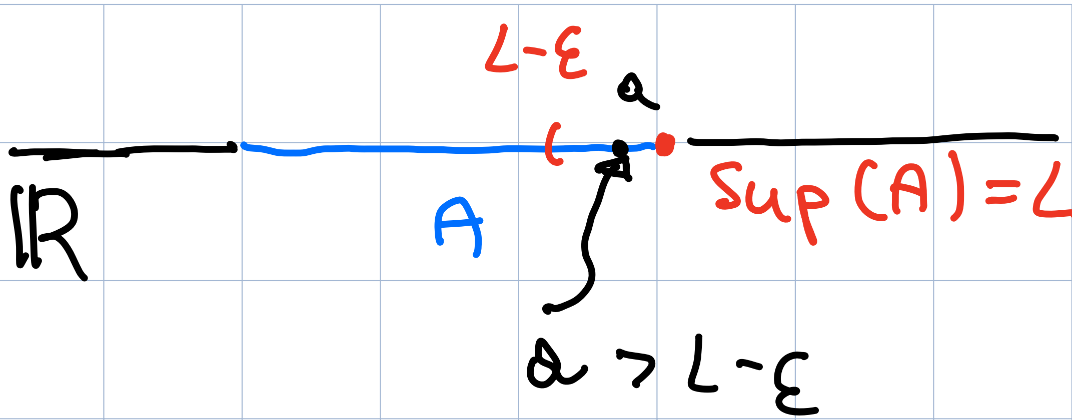
$\forall\, K \in \mathbb{R} \quad \exists\, a \in A$ tale che

$a > K$

(ii) $\sup(A) = L \in \mathbb{R}$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} \bullet\ L \geq a \quad \forall\, a \in A \\ \bullet\ \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, a \in A \text{ t.c. } a > L - \varepsilon \end{cases}$$

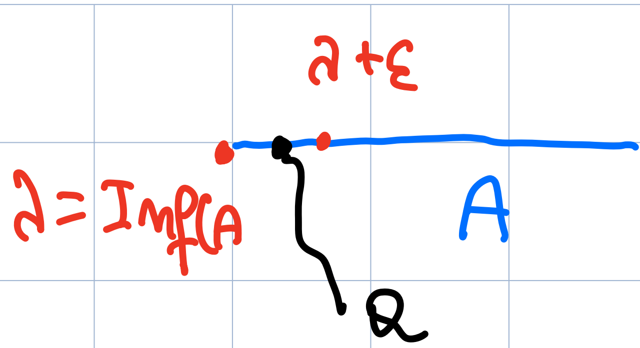


A ne logemente : Inf

$$\mathrm{Inf}(A) = \lambda \in \mathbb{R}$$

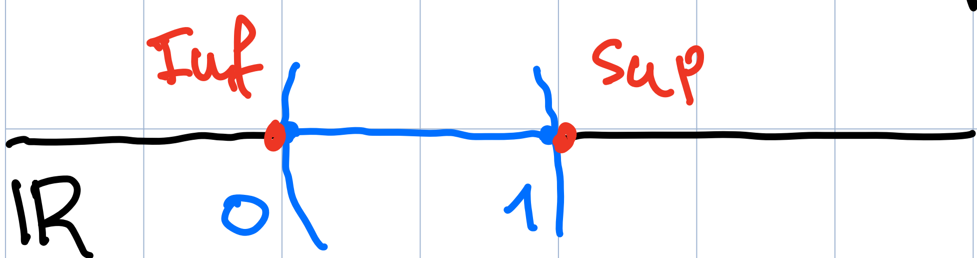
$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} \bullet \ \lambda \leq a \quad \forall a \in A \\ \bullet \ \forall \varepsilon > 0 \quad \exists a \in A \text{ t.c. } \\ \qquad a < \lambda + \varepsilon \end{cases}$$



ESEMPI

(1) $A = (0,1)$ Intervallo aperto



$$A = \{ x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1 \}$$

$\mathrm{Sup}(A) = 1$ max, min

$\mathrm{Inf}(A) = 0$ NON $\exists$

2

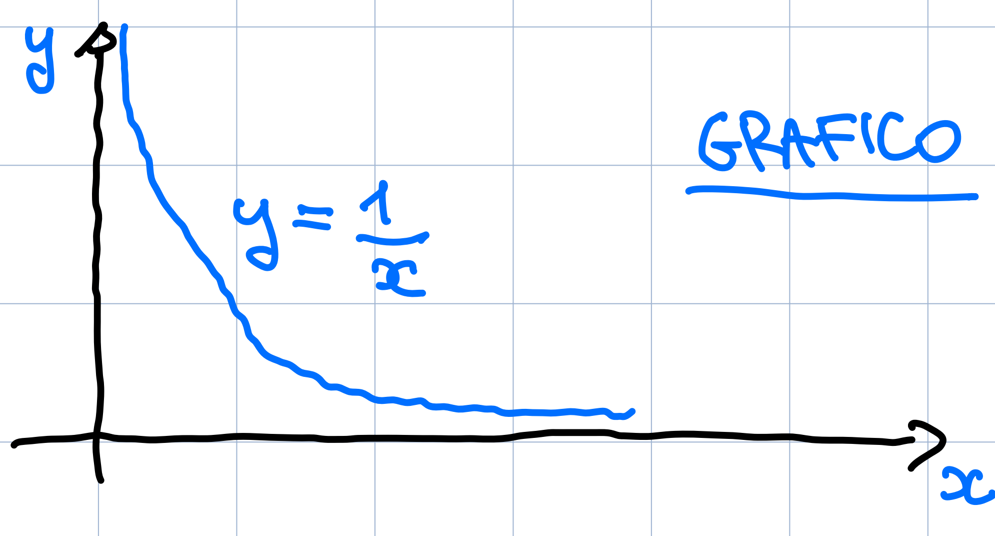
$$A = (0, 1]$$

$$\sup(A) = \max(A) = 1$$

$$\operatorname{Inf}(A) = 0$$

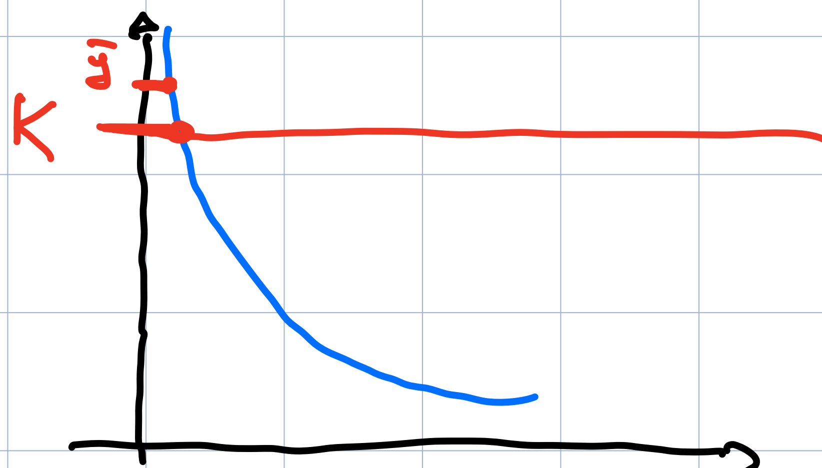
$\min(A)$ non $\exists$

3 $A = \left\{ y : y = \frac{1}{x}, \quad x > 0 \right\}$



GRAFICO

$\sup(A) = +\infty$



usando la definizione:

Fissiamo $K \in \mathbb{R}$

Cerchiamo $y \in A$ tale che

$$y > K$$

Ma

$$y = \frac{1}{x} > K$$

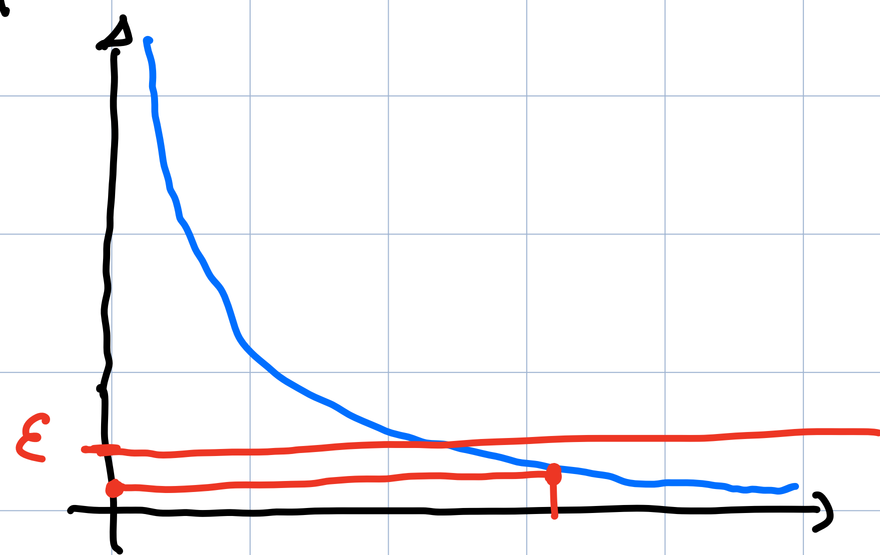
$$\Leftrightarrow \quad x < \frac{1}{K}$$

Conclusione:

scelto $x < \frac{1}{K}$ allora

$y = \frac{1}{x} > K$

$\text{Inf}(A) = 0$



Infatti: 0 è minorante

- $0 \leq \frac{1}{x} \quad \forall \ x > 0$

- $\forall\, \varepsilon > 0$ cerchiamo $y \in A$ tale che $y < \varepsilon$

mostro caso: $y = \frac{1}{x} < \varepsilon$

$\Leftrightarrow \quad x > \frac{1}{\varepsilon}$

cioè per $x > \frac{1}{\varepsilon}$ si ha

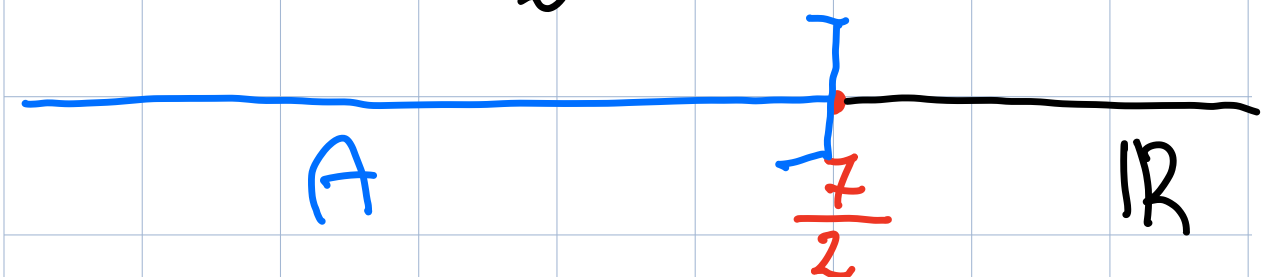
$$y = \frac{1}{x} < \varepsilon$$

0 è $\operatorname{Inf}(A)$ ma non è minimo perché $0 \notin A$

4 $A = \{ x \in \mathbb{R} : 2x-4 \leq 3 \}$

$2x - 4 \leq 3 \iff$

$x \leq \frac{7}{2}$



$A = \left(-\infty, \frac{7}{2}\right]$

$\sup(A) = \max(A) = \frac{7}{2}$

$\inf(A) = -\infty$

5 $A = \left\{ y \in \mathbb{R} \mid y = \frac{n}{n+1}, n \in \mathbb{N} \right\}$

Inf: $0 \le \frac{n}{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Inoltre $0 \in A$ per $n = 0$

$y = 0$

$\Rightarrow \quad 0 = \min(A) = \operatorname{Inf}(A)$

Sup: $\frac{n}{n+1} = \frac{n+1-1}{n+1} =$

$= 1 - \frac{1}{n+1}$

$\Rightarrow$ 1 è un maggiorante di A

Verifichiamo se $1 = \sup$

- $y = \frac{n}{n+1} \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

- $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n \in \mathbb{N}$ t.c.

$$y = \frac{n}{n+1} > 1 - \varepsilon$$

calcolo:

$$\frac{n}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} > 1 - \varepsilon \iff$$

$$\varepsilon > \frac{1}{n+1} \iff$$

$$n+1 > \frac{1}{\varepsilon} \iff n > \frac{1}{\varepsilon} - 1$$

Preso $n > \frac{1}{\varepsilon} - 1$ si ha

$$y = \frac{n}{n+1} > 1 - \varepsilon$$

Esercizi

① $A = \left\{ y \in \mathbb{R} : y = (-1)^n \cdot \frac{n}{n+1}, \ n \in \mathbb{N} \right\}$

SOL. (Idea)

$$y = (-1)^n \cdot \frac{n}{n+1}$$

$$\begin{cases} \text{per } n \text{ PARI} : \quad y = \dfrac{n}{n+1} \\ \text{Per } n \text{ DISPARI} : \quad y = -\dfrac{n}{n+1} \end{cases}$$

Per n pari : $\underline{y \geq 0}$

Per n dispari : $y < 0$

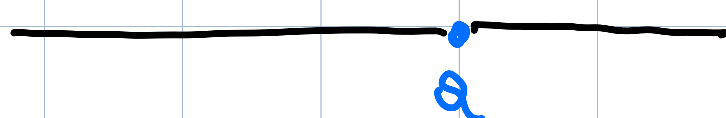
n pari (come nell'esempio (4))

$\longrightarrow \quad \sup = \underline{1}$

n dispari $\longrightarrow$ $\operatorname{Inf} = -1$

2 $\quad A \subseteq \mathbb{R} \qquad A \neq \emptyset$

$$\operatorname{Inf}(A) = \operatorname{Sup}(A) = a$$
$$\Downarrow$$
$$A = \{a\}$$



sol. (Idea) Se A ha più di un elemento

$$A \ni a_1, a_2$$

allora $\quad a_1 < a_2$

Quindi

$$\text{Inf}(A) \le a_1 < a_2 \le \text{Sup}(A)$$

cioè

$$\text{Inf} \ne \text{Sup}$$

3 $\quad A \subseteq \mathbb{R}, \quad A \ne \emptyset$

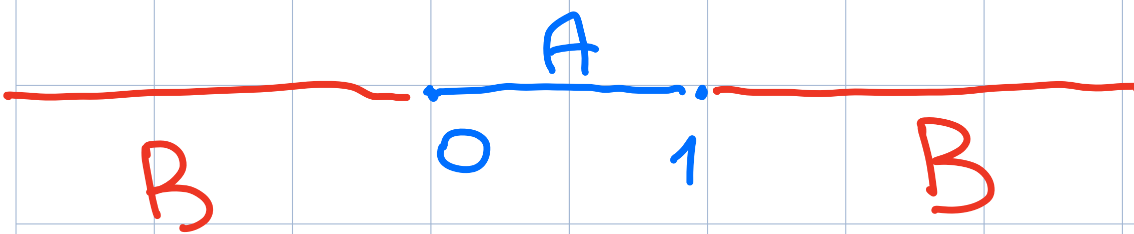
Posto $\quad B = \mathbb{R} \setminus A$

allora

$$\text{Sup}(A) = \text{Inf}(B) \quad ?$$

RISPOSTA : NO

SOL. $\quad A = (0, 1)$



$$\mathbb{R} \setminus A = (-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$$

$$\inf(B) = -\infty$$

$$\sup(A) = 1$$

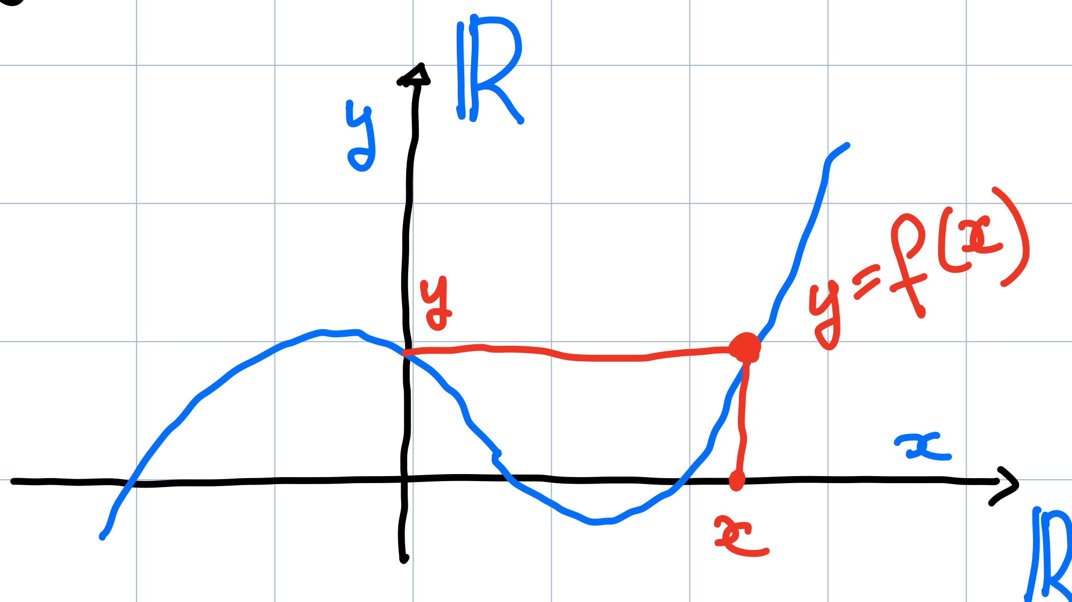
<u>GRAFICO</u> di
una funzione di 1
variabile reale

Data $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto f(x)$

Def. GRAFICO di f è il sottoinsieme di $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$

$$\{ (x,y) \mid y = f(x) \}$$

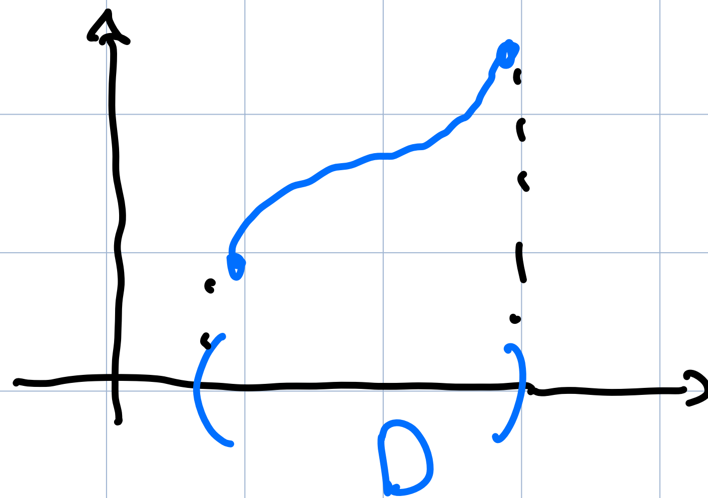


Problemi di Inf, Sup,
max, min
possono riguardare $\nearrow x$ $\searrow y$

Il grafico può essere utile

<u>OSS</u>. Se il dominio di f
è $D \subsetneq \mathbb{R}$

possiamo restringere
"l'asse delle x"
considerando solo D



ESERCIZIO.

Determinare $\sup$, $\inf$

$\max$, $\min$ (se $\exists$)

dell' insieme

$$A = \{ y = |x^2 - 4x + 3| : x \in (-1, 4) \}$$

SOL Vogliamo disegnare grafico

$$f(x) = |x^2 - 4x + 3|$$

valore assoluto

Disegnamo prima grafico di

$$g(x) = x^2 - 4x + 3$$

Parabola: zeri sono $x = \begin{cases} 1 \\ 3 \end{cases}$

vertice: $x = 2$

$y = -1$

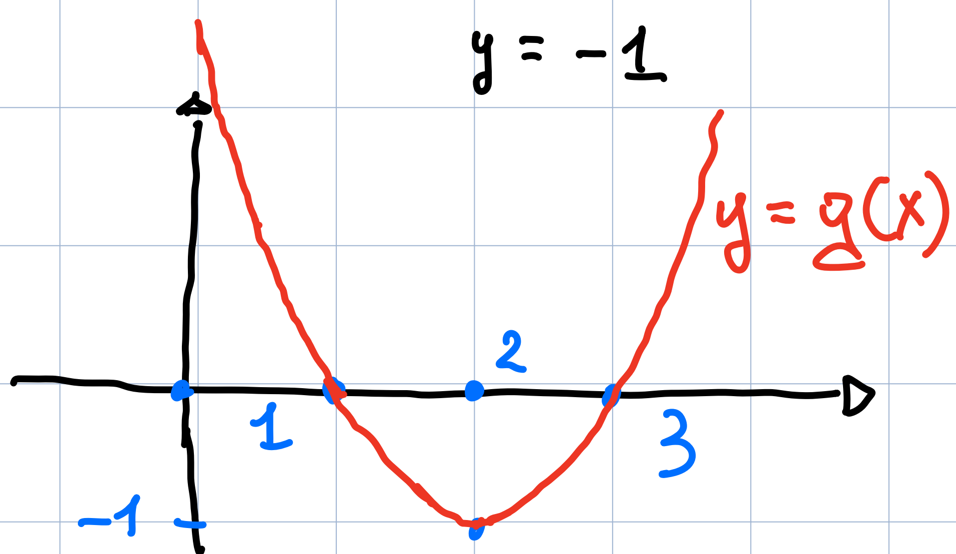
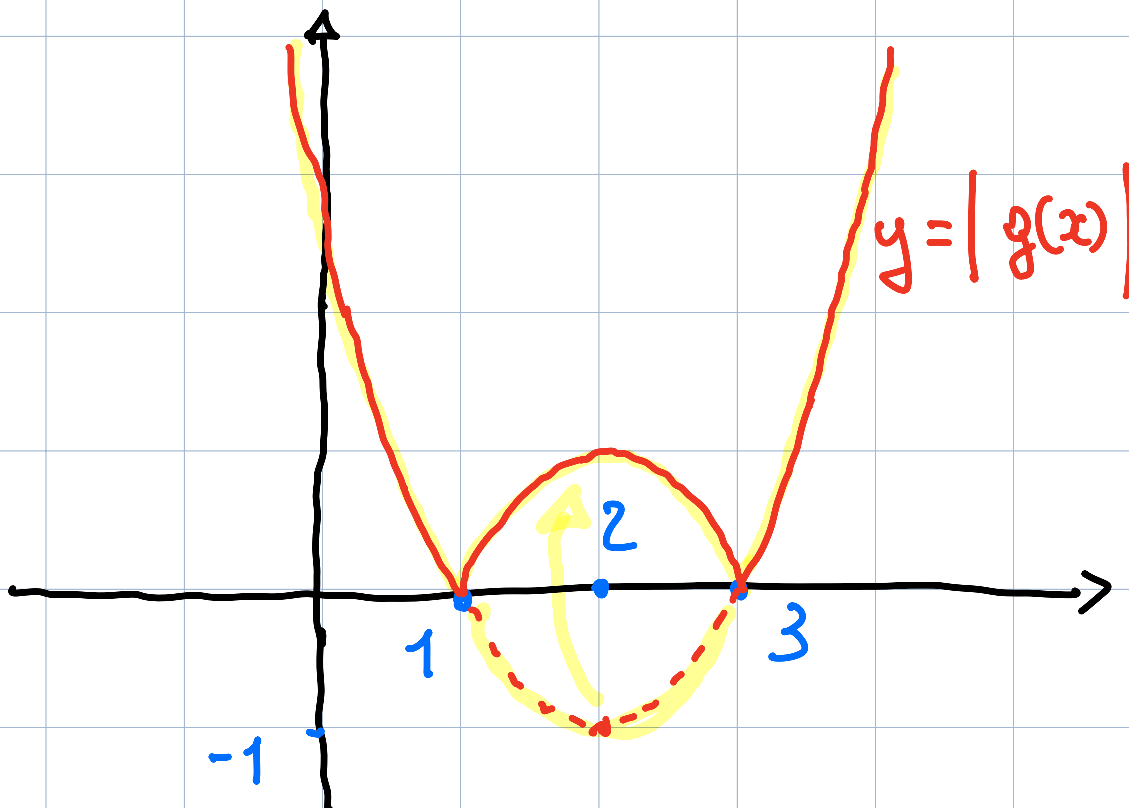
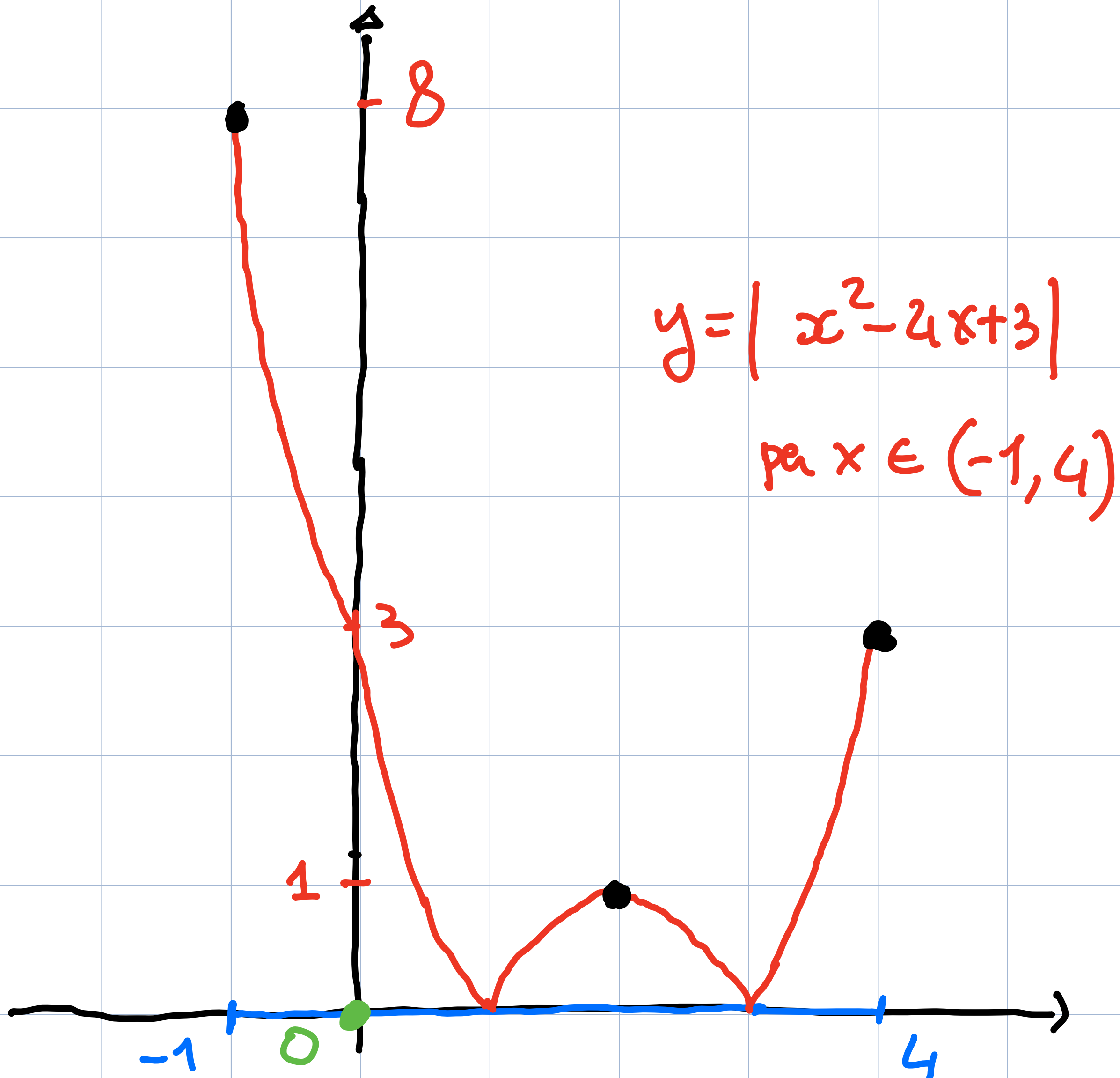


GRAFICO di $f(x) = |g(x)|$



Dominio $D = (-1, 4)$

$\rightarrow$ dobbiamo studiare f in questo insieme



$$\text{Inf}(A) = \min(A) = 0$$

Poiché $y = |\ldots\ldots| \geq 0$ sempre

&

per $x = 1, 3 \longrightarrow y = f(1) = f(3) = 0$

Sup:

cerchiamo eventuali max relativi & valori agli estremi di D

vertice parabola in $x=1$

$\Rightarrow \quad y = |g(1)| = 1$ è valore max relativo

$y = f(-1) = |1+4+3| = 8$

$y = f(4) = |16-4\cdot 4+3| = 3$

CONCLUSIONE: $\sup(A) = 8$

non è massimo

perché $D = (-1, 4)$

Intervallo APERTO

$\Rightarrow f(-1) \notin A.$

In generale:

$$f : A \longrightarrow B$$
$$a \longmapsto f(a)$$

funzione tra insiemi

Def. f è INIETTIVA se

$$a_1 \neq a_2 \implies f(a_1) \neq f(a_2)$$

eq.$^{\text{nte}}$

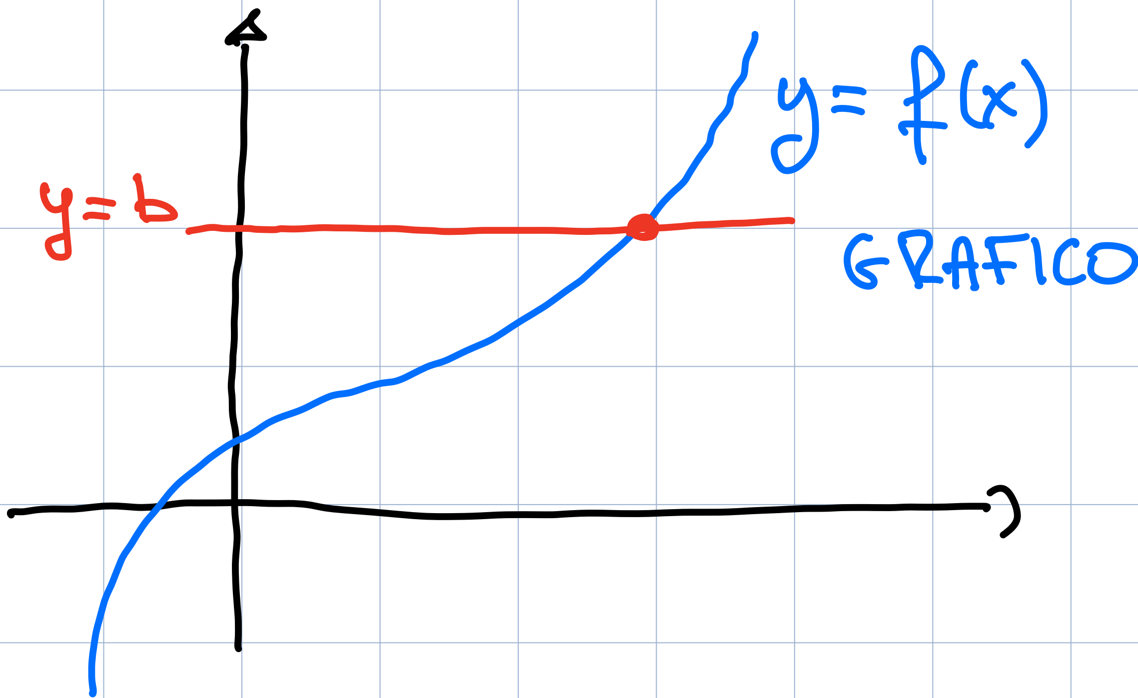
$$f(a_1) = f(a_2) \iff a_1 = a_2$$

Def. f è SURIETTIVA se

$$\forall\, b \in B \quad \exists\, a \in A$$

$$\text{t.c.} \quad b = f(a)$$

CASO di $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$



considero retta orizzontale r
$y = b$

ALLORA:

intersezione

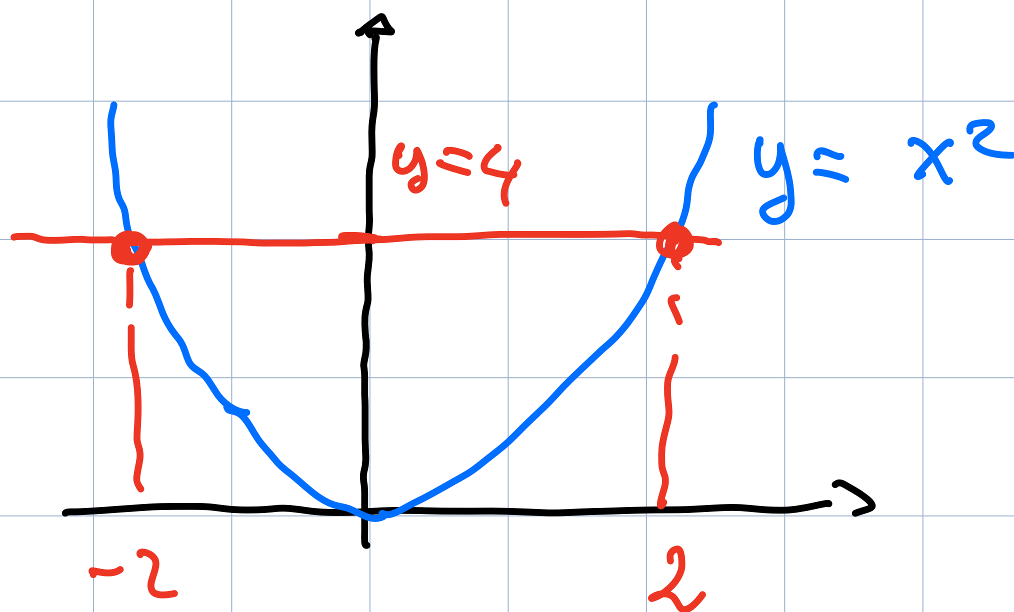
f iniettiva $\iff$ $r = \{y = b\} \cap$ Grafico

$=$ Al più 1 punto

f Suriettive $\Longleftrightarrow$ $r = \{y = b\} \cap$ Grafico

$=$ ALMENO 1 punto

CONTROESEMPIO:



$\Rightarrow$ ho 2 punti di intersezione

$\Rightarrow$ f non è iniettive

Ipotesi : $f(-2) = f(2)$