

Biunivocità e invertibilità

f biunivoca $\Rightarrow f$ invertibile (a dx e a sx)
Dim. Esibendo l'inversa f^{-1}

Proposizione Se f ha inversa dx f_1 e inversa sx f_2
Allora $f_1 = f_2$

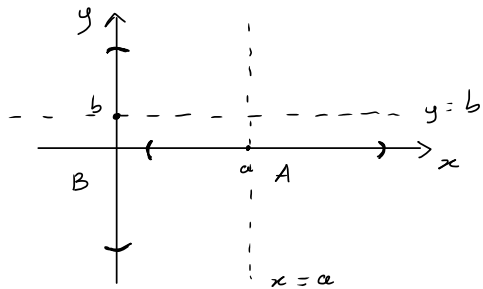
Dim $f: A \rightarrow B$ $f_1: B \rightarrow A$ $f_2: B \rightarrow A$

$f \circ f_1 = id_B$ $f_2 \circ f = id_A$ (per definizione di inversa dx e sx)

$$\underbrace{f_2 \circ f \circ f_1}_{\substack{\swarrow \searrow \\ f_2 = f_1}} = \begin{cases} (f_2 \circ f) \circ f_1 = id_A \circ f_1 = f_1 \\ f_2 \circ (f \circ f_1) = f_2 \circ id_B = f_2 \end{cases}$$

In generale diremo f invertibile se $\exists$ inv a dx e a sx

Interpretazione Grafica



$$f: A \rightarrow B \quad A, B \subseteq \mathbb{R}$$

$\Gamma(f)$ grafico

1. f funzione se $\forall a \in A$
 $\exists ! f(a) \in B$

cioè sulla retta $x=a$
 $\exists !$ punto di $\Gamma(f)$
 $(a, f(a))$

cioè la retta $x=a$ incontra
il grafico in un solo punto

2. f surgettiva se $\forall b \in B \exists a \in A$ t.c. $f(a) = b$
cioè $\exists (a, f(a)) = (a, b) \in \Gamma(f)$

cioè la retta $y=b$ incontra il grafico in almeno un punto

3. f iniettiva se $a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$
cioè $\forall b \in \text{Im}(f) \exists ! a \in A$ t.c. $f(a) = b$

Quindi $\forall b \in B$ la retta $y=b$ incontra il grafico in al più un punto

Teo f invertibile $\Rightarrow$ biunivoca

(con il Teo già visto: f inv $\Leftrightarrow f$ biunivoca)

Dim. f inv $\Rightarrow \exists g$ t.c. $g \circ f = id_A$ $f \circ g = id_B$
 $f: A \rightarrow B$

- $\forall b \in B$ $b = id_B(b) = (f \circ g)(b) = f(g(b))$
 $g(b) \in A$ ho trovato $a = g(b) \in A$ t.c. $f(a) = b$
cioè $b \in Im(f) \Rightarrow B = Im(f)$ surgettiva

- Supp $\exists a_1, a_2 \in A$ t.c. $f(a_1) = f(a_2)$
 $a_1 = id_A(a_1) = (g \circ f)(a_1) = g(f(a_1)) = g(f(a_2))$
 $= (g \circ f)(a_2) = id_A(a_2) = a_2 \Rightarrow f$ iniettiva

Esempio $f: A \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = \frac{5x+2}{2x-1}$

Definita per $2x-1 \neq 0$ cioè $x \neq \frac{1}{2}$

$f: \mathbb{R} - \{\frac{1}{2}\} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{non è invertibile}$

Iniettiva? Siano $x_1, x_2 \in \mathbb{R} - \{\frac{1}{2}\} \quad f(x_1) = f(x_2)$

$$\frac{5x_1+2}{2x_1-1} = \frac{5x_2+2}{2x_2-1}$$

$$\frac{\cancel{10x_1x_2} + 4x_2 - 5x_1 - 2}{\text{Den}} = \frac{\cancel{10x_1x_2} + 4x_1}{\text{Den}}$$

$$\text{Den} = (2x_1-1)(2x_2-1)$$

$$\frac{9x_2 - 9x_1}{\text{Den}} = 0$$

$$\frac{-5x_2 - 2}{\text{Den}} \Rightarrow x_1 = x_2$$

Quindi f iniettiva.

f surgettiva? $S_1 = y \in \mathbb{R}$ codominio

chiedo se $\exists x \in \mathbb{R} - \{\frac{1}{2}\}$ dominio t.c. $f(x) = y$

$$\frac{5x+2}{2x-1} = y \quad 5x+2 = 2xy-y$$

$$5x - 2xy = -2 - y$$

$$\star \quad x(2y-5) = y+2$$

Posso risolverla $\Leftrightarrow 2y-5 \neq 0$ cioè $y \neq \frac{5}{2}$

$$\text{Im}(f) = \mathbb{R} - \{\frac{5}{2}\}$$

Quindi $\boxed{f}: \mathbb{R} - \{\frac{1}{2}\} \rightarrow \mathbb{R} - \{\frac{5}{2}\}$ è biunivoca

Inversa? $\boxed{f(x)=y} \star (f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(y)$
 $x = \boxed{f^{-1}(y)}$

$$f^{-1}(y) = \frac{y+2}{2y-5}$$

Verifica

$$(f \circ f^{-1})(y) = f(f^{-1}(y)) =$$

$$f(x) = \frac{5x+2}{2x-1}$$

$$f\left(\frac{y+2}{2y-5}\right) \rightarrow = \frac{5\left(\frac{y+2}{2y-5}\right) + 2}{2\left(\frac{y+2}{2y-5}\right) - 1} = \frac{\frac{5y+10}{2y-5} + \frac{4y-10}{2y-5}}{\frac{2y+4}{2y-5} - \frac{2y-5}{2y-5}}$$

$$= \frac{\cancel{5y} + \cancel{10} + \cancel{4y} - \cancel{10}}{\cancel{2y} + 4 - \cancel{2y} + 5} = \frac{4}{9}$$

Calcolare $(f^{-1} \circ f)(x)$.

Def $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ $A \subseteq \mathbb{R}$ funzione :

- si dice limitata superiormente (o inf, o limitata) se $\text{Im}(f)$ ha la stessa proprietà

In particolare definiamo $\text{Sup}(f) \stackrel{\text{Def}}{=} \text{Sup}(\text{Im}(f))$
 $\text{Inf}(f) \stackrel{\text{Def}}{=} \text{Inf}(\text{Im}(f))$
Analogo per max e min

- si dice monotona crescente o non decrescente se $\forall x_1 < x_2 \quad x_1, x_2 \in A$ si ha $f(x_1) \leq f(x_2)$

si dice monotona strettamente crescente se $\forall x_1 < x_2 \quad x_1, x_2 \in A$ si ha $f(x_1) < f(x_2)$

si dice monotona decrescente o non crescente se $\forall x_1 < x_2 \quad x_1, x_2 \in A$ si ha $f(x_1) \geq f(x_2)$

- $f: A \rightarrow \mathbb{R} \quad g: A \rightarrow \mathbb{R}$

Def : $(f+g): A \rightarrow \mathbb{R} \quad (f+g)(x) = f(x) + g(x)$

$(f \cdot g): A \rightarrow \mathbb{R} \quad (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$

El neutri + $f_0: A \rightarrow \mathbb{R} \quad f_0(x) = 0$

- $f_1: A \rightarrow \mathbb{R} \quad f_1(x) = 1$

Inversi + $(-f): A \rightarrow \mathbb{R} \quad (-f)(x) = -f(x) \text{ opposta}$

- $\left(\frac{1}{f}\right): \tilde{A} \rightarrow \mathbb{R} \quad \left(\frac{1}{f}\right)(x) = \frac{1}{f(x)} \text{ reciproca}$

$\tilde{A} = \{a \in A \text{ t.c. } f(a) \neq 0\}$

Proposizione 1. $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ strettamente monotona $\Rightarrow$ iniettiva

2. $f: A \rightarrow \text{Im}(f)$ strettamente monotona $\Rightarrow$ (biunivoca)
 $\Rightarrow f^{-1}$ è monotona dello stesso tipo

3. Somma di monotone dello stesso tipo è monotona
Prodotto di monotone dello stesso tipo positive
è monotona

4. Per la composizione si ha
 $(\text{cres}) \circ (\text{cres}) = \text{cresc}$
 $(\text{cres}) \circ (\text{decrec}) = \text{decrec}$
 $(\text{decrec}) \circ (\text{cresc}) = \text{decrec}$
 $(\text{decrec}) \circ (\text{decrec}) = \text{cresc}$

Dim 1 e 3 Esercizi

2. $f: A \rightarrow \text{Im}(f)$ monotona strettamente crescente

Punto 1. $\Rightarrow f$ invertibile $f^{-1}: \text{Im}(f) \rightarrow A$

Voglio dim che f^{-1} è monotona strettamente crescente

Siano $\cdot \underbrace{y_1 < y_2}_{\star \star} \quad y_1, y_2 \in \text{Im}(f) \quad f^{-1}(y_1) = x_1$
 $f^{-1}(y_2) = x_2$

Supp $x_1 > x_2 \Rightarrow f$ crescente $\Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$
 NO $\star$ $\star$

Quindi $x_1 < x_2$ cioè

$y_1 > y_2$
contraddizione a $\star \star$

$\cdot f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2) \Rightarrow f^{-1}$ strettamente crescente

4. Per esempio f crescente g decrescente

$(g \circ f)$ cresc o decresc?

$$\underbrace{x_1 < x_2} \quad (g \circ f)(x_1)$$

$$f(x_1) < f(x_2) \quad \text{perché } f \text{ cresc}$$

$\downarrow g$

$$\underbrace{g(f(x_1)) > g(f(x_2))}_{\text{perché } g \text{ decresc}}$$

$$(g \circ f)(x_1) > (g \circ f)(x_2)$$

$\Downarrow$
 $g \circ f$ è decrescente

Le altre dim sono analoghe.

Esempi: 1. Inv $\Leftrightarrow$ biunivoca

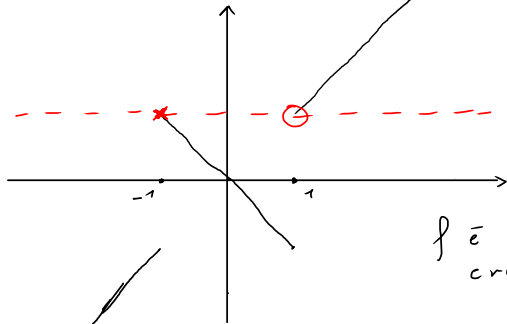
Strettamente monotona $\Rightarrow$ biunivoca

~~$\Leftarrow$~~ NO

$$f(x) = \begin{cases} x & (-\infty, -1) \\ -x & [-1, 1] \\ x & (1, +\infty) \end{cases}$$

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$\mathcal{R}(f)$ f invertibile?
Sì



$$(-1, 1) \in \mathcal{R}(f)$$

$$(1, 1) \notin \mathcal{R}(f)$$

f è monotona
cresce o decresce?

NO

$$f(-1) = -1 \\ (-1, -1) \in \mathcal{R}(f)$$

Osservazione Se f monotona allora $-f$? Regola
 $\frac{1}{f}$? Caso per caso

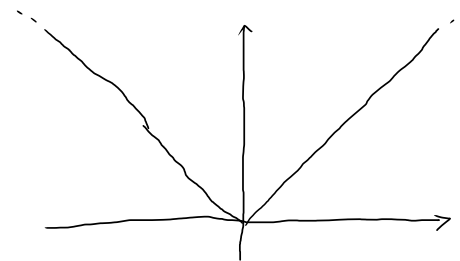
Esempi 1. Funzioni lineari $f(x) = ax + b$
 $a, b \in \mathbb{R}$

Verificare iniettività
surgettività
biunivocità

Se esiste calcolare l'inversa

2. Valore assoluto $|\cdot| : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$

$$|x| = \begin{cases} x & \text{Se } x \geq 0 \\ -x & \text{Se } x < 0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x & x \in [0, +\infty) \\ -x & x \in (-\infty, 0) \end{cases}$$



$||$ surgettiva su $[0, +\infty)$

non è iniettiva

Proprietà fondamentale

Disuguaglianza triangolare

$\forall x, y \in \mathbb{R}$

$$|x+y| \leq |x| + |y|$$

Dim.

Fissato $a > 0$

$$|x| \leq a \Leftrightarrow x \in [-a, a]$$

$\star$
 $\underbrace{-a \leq x \leq a}_{\star}$

In particolare

$$\begin{aligned} -|x| &\leq x \leq |x| \\ -|y| &\leq y \leq |y| \end{aligned}$$

$$\Rightarrow -|x| - |y| \leq x+y \leq |x| + |y| \quad \star \Rightarrow |x+y| \leq |x| + |y|$$

Esercizio

Dim che $\forall x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R} \quad |x_1 + x_2 + \dots + x_n| \leq |x_1| + \dots + |x_n|$

Funzioni Reali "Elementari"

- Funzioni potenza $\forall n \in \mathbb{N} \quad f(x) = x^n$

$n=0$ f_1 perché $x^0 = 1 \quad \forall x$

Definite su tutto $\mathbb{R} \quad f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

Simmetria $f(-x) = (-x)^n = \begin{cases} x^n & n \text{ pari} \\ -x^n & n \text{ dispari} \end{cases}$

Per "conoscere" f è suff studiarla per $x \in [0, +\infty)$

1. $x \in [0, +\infty) \quad x^n \geq 0$ funzione positiva o nulla

2. $x < y \quad x, y \in [0, +\infty)$

Molt per x ottengo

Molt per y ottengo

$$\left. \begin{array}{l} x^2 < xy \\ xy < y^2 \end{array} \right\} \Rightarrow x^2 < y^2$$

Si generalizza (induzione) dimostrando $x^n < y^n$

Quindi $\forall n > 0$ $f(x) = x^n$ è strettamente crescente
nell'intervallo $[0, +\infty)$

3. $f(0) = 0$ e $f(x) \geq 0$ per $x \in [0, +\infty)$
4. Voglio dim $\sup(f) = +\infty$

cioè $\forall \pi > 0$ cerco $x \in [0, +\infty)$ t.c. $f(x) > \pi$

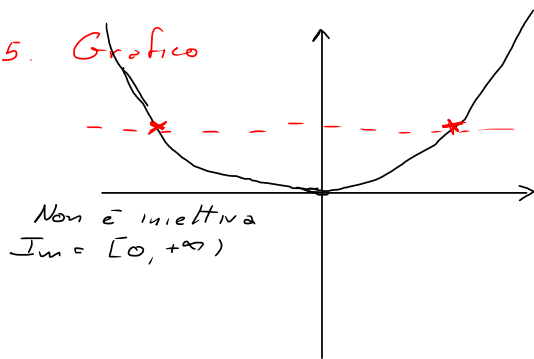
Prendo $x > 1$ $x = 1 + a$ $a > 0$

$$x^n = (1 + a)^n \underset{\text{Bernoulli}}{\geq} 1 + na > \pi //$$

$\exists n \in \mathbb{N}$ t.c. $na > \pi$

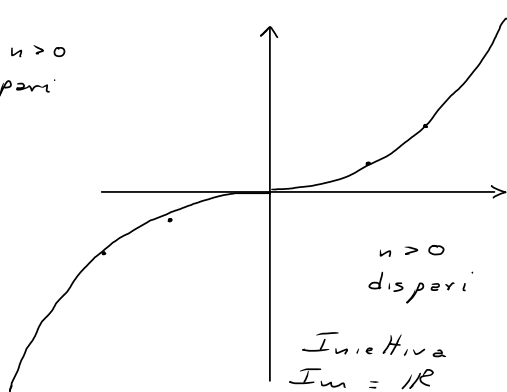
Dunque $\sup(f) = +\infty$ $\forall n \geq 1$

5. Grafico



Non è iniettiva
 $\text{Im} = [0, +\infty)$

$n > 0$
 pari



$n > 0$
 dispari

Iniettiva
 $\text{Im} = \mathbb{R}$
 biunivoca
 $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

x^n per $[0, +\infty)$

Mon cresce
 $\text{Inf} = \min = f(0) = 0$
 $\text{Sup}(f) = +\infty$

Per $x \in (-\infty, 0)$

$$f(-x) = \begin{cases} x^n & n \text{ pari} \\ -x^n & n \text{ dispari} \end{cases}$$

$$\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z} \quad \text{Per } n < 0 \quad f(x) = x^n = \left(\frac{1}{x}\right)^{-n} = \frac{1}{x^{-n}}$$

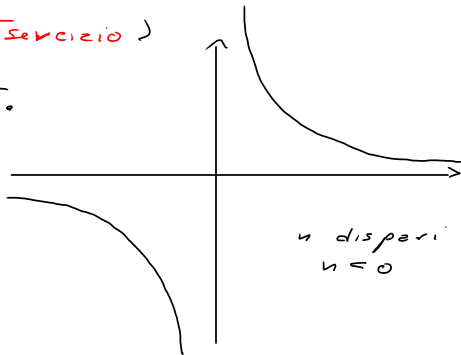
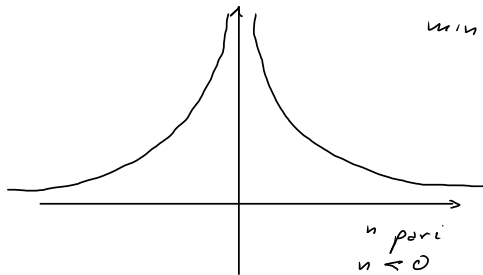
Esponenti negativi $\rightarrow$ Reciproco definito solo per $x \neq 0$

Funzione potenza con esp positivo è crescente in $[0, +\infty)$

$\Rightarrow$ Funzione potenza con esp negativo è decrescente in $[0, +\infty)$

$$I_n f = 0 \quad \text{Sup} = +\infty \quad (\text{Esercizio})$$

min N.E.



$\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$

funzione inversa

Supp $n > 0$

$$f(x) = x^n$$

$$f: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty) \quad n \text{ pari}$$

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad n \text{ dispari}$$

invertibili:

$$f^{-1}: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty) \quad n \text{ pari}$$

$$f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad n \text{ dispari}$$

Deve essere la funzione l.c. $f^{-1} \circ f = id$

$$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(x^n) = x$$

Se $f^{-1}(y)$ è della forma y^m (ancora una funzione potenza)

$$\text{allora } f^{-1}(x^n) = (x^n)^m = x^{nm} = x \Leftrightarrow nm = 1 \quad m = \frac{1}{n}$$

Oss n dispari $f^{-1}(x) = x^{1/n} = \sqrt[n]{x} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

n pari
 $n \neq 0$ $f^{-1}(x) = x^{1/n} = \sqrt[n]{x} : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$

Perch  ho preso $f(x) = x^n : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ inv

Per  $f(x) = x^n$ $[-\infty, 0] \rightarrow [0, +\infty)$   invertibile
Dom Im

Quindi esiste

$f^{-1}(x) = x^{1/n}$ $[0, +\infty) \rightarrow (-\infty, 0]$

prendo la radice negativa
 $-\sqrt[n]{x}$

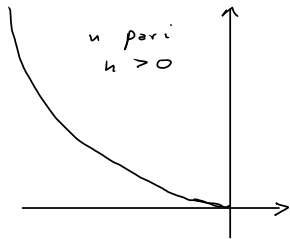
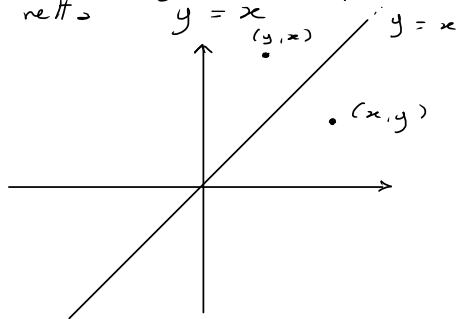


Grafico
 $f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$

$$\Gamma(f^{-1}) = \{(y, x) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.c.}$$

$$(x, y) \in \Gamma(f)\}$$

Ribaltare il grafico rispetto
alla retta



$$f(x) = x^n \quad n \neq 0$$

$$\Gamma(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.c.}$$

$$y = f(x)\}$$

$$\downarrow$$

$$f^{-1}(y) = x$$

$$\downarrow$$

$$(y, x) \in \Gamma(f^{-1})$$

Gráfico

$$f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$$

$$f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$$

n pari
 $n \neq 0$

$$f(x) = x^n$$

↓
ramo pos

n dispari

ramo neg

$$f(x) = x^n$$

$$f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$$

Esercizio Disegnare il grafico di:

$$f: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = |(x+1)^2 - 5| - 2$$

Per approssimazioni successive

$$f_1(x) = x^2 \rightsquigarrow f_2(x) = (x+1)^2 \rightsquigarrow f_3(x) = (x+1)^2 - 5$$

$$\rightsquigarrow f_4(x) = |(x+1)^2 - 5| \rightsquigarrow f_5 = f_4 - 2 \quad f_6 = |f_5 - 2|$$

