

Funzioni $f: A \rightarrow B$ funzione

- $\left\{ \begin{array}{l} \text{si dice iniettiva se } f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2 \\ \text{si dice surgettiva se } \text{Im}(f) = B \\ \text{è biunivoca / bigettiva se è iniettiva e surgettiva} \end{array} \right.$

Esempio

$$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z} \quad f(n) = \begin{cases} n/2 & \text{se } n \text{ pari} \\ -\left(\frac{n+1}{2}\right) & \text{se } n \text{ dispari} \end{cases}$$

Iniettiva? $f(n_1) = f(n_2) \Rightarrow n_1 \text{ e } n_2 \text{ entrambi pari o entrambi dispari}$

$$n_1, n_2 \text{ pari} \quad f(n_1) = f(n_2) \Rightarrow \frac{n_1}{2} = \frac{n_2}{2} \Rightarrow n_1 = n_2$$

$$n_1, n_2 \text{ dispari} \quad f(n_1) = f(n_2) \Rightarrow -\left(\frac{n_1+1}{2}\right) = -\left(\frac{n_2+1}{2}\right) \Rightarrow n_1 = n_2$$

Quindi f iniettiva

Surgettiva? $\forall m \in \mathbb{Z}$ cerco $n \in \mathbb{N}$ t.c. $f(n) = m$

• Se $m \in \mathbb{Z}$ $i \geq 0$ prendo $n = 2m \in \mathbb{N}$
 $f(n) = \frac{n}{2} = \frac{2m}{2} = m \in \text{Im}(f)$

• Se $m \in \mathbb{Z}$ $i < 0$ $-m > 0$ $-2m-1 > 0$ dispari

$$n = -2m-1 \quad f(n) = -\left(\frac{-2m-1+1}{2}\right) = m \in \text{Im}(f)$$

$\Rightarrow \text{Im}(f) = \mathbb{Z}$ f surgettiva

f biunivoca.

$$g: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N} \quad g(m) = \begin{cases} 2m & \text{se } m \geq 0 \\ -2m-1 & \text{se } m < 0 \end{cases}$$

Esempio 1.

A finito $\#A = n < +\infty$ $n \neq 0$

$f: A \rightarrow B$ funzione biunivoca

B finito perché f surg $\Rightarrow \text{Im}(f) = B$

$a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$ perché f iniettiva

$\Rightarrow \# \text{Im}(f) = n \Rightarrow \# B = n$

2. Quante sono le funzioni biunivoche tra A e B se $\#A = \#B = n < +\infty$
 $n \neq 0$

$f: A \rightarrow B$ biunivoca

- $a_1 \xrightarrow{f}$ un qualsiasi elemento di B , $f(a_1)$
- $a_2 \xrightarrow{f}$ un qualsiasi elemento di B tranne $f(a_1)$
chiamiamolo $f(a_2)$
- $a_3 \xrightarrow{f}$ un qualsiasi elemento di B tranne $f(a_1), f(a_2)$
chiamiamolo $f(a_3)$
- $\vdots$
- $a_n \xrightarrow{f}$ unico elemento di B che ancora non sta
nell'immagine

$$\left. \begin{array}{ll} f(a_1) & n \text{ scelte} \\ f(a_2) & n-1 \text{ scelte} \\ f(a_3) & n-2 \text{ scelte} \\ \vdots & \\ f(a_n) & 1 \text{ scelta} \end{array} \right\} n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 1 = n!$$

Composizione : $f: \underline{A} \rightarrow \underline{B}$ $g: \underline{B} \rightarrow C$ funzioni

Posso definire $g \circ f: A \rightarrow C$ funzione

$$a \in A \quad a \longrightarrow f(a) \in B \longrightarrow g(f(a)) \in C$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{g \circ f}$

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (sottointervalli di $\mathbb{R}$)

$\underbrace{f \circ g}_{\searrow}$: $b \in B \xrightarrow{g} g(b) \in C$
non ha senso in generale

$g \circ f$ ha senso se $\text{Im}(f) \subseteq \text{Dominio di } g$

Esempio $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = 2x + 1$$

$$g(x) = \frac{x}{2} - 1$$

Posso definire $g \circ f$

Posso definire $f \circ g$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x + 1) = \frac{2x + 1}{2} - 1 = x - \frac{1}{2}$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{x}{2} - 1\right) = 2\left(\frac{x}{2} - 1\right) + 1 = x - 1 \neq$$

In gen $f \circ g \neq g \circ f$: l'operazione non è commutativa

Elemento neutro / Elementi neutri

$$f: A \rightarrow B$$

mi serve una funzione i

$$\text{t.c. } \underline{f \circ i} = f$$

$$i: A \rightarrow A$$

$$i(a) = a \quad \text{identità}$$

$$(\underline{f \circ i})(a) = f(i(a)) = \underline{f}(a)$$

$$\Rightarrow f \circ i = f$$

Identità di A $i_A = \text{Id}_A$ è elemento neutro destro per f

$$j \circ f$$

$$j: B \rightarrow B \quad j(b) = b$$

Identità di B $i_B = \text{Id}_B$ è elemento neutro sinistro per f .

Inverso / Inversi Sia $f: A \rightarrow B$, l'inverso destro di f
è una funzione $g: B \rightarrow A$ t.c.

$$(f \circ g) = Id_B$$

$$\underline{f \circ g}: B \xrightarrow{g} A \xrightarrow{f} B$$

L'inverso sinistro di f è una funzione $h: B \rightarrow A$

$$(h \circ f) = Id_A$$

$$h \circ f: A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{h} A$$

Esercizio Prendere le funzioni $f, g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$
e verificare che sono una inversa dell'altra.
 $f \circ g$ $g \circ f$

Esercizio

$f: A \rightarrow B$ biunivoca $\Rightarrow$ posso definire

$$f^{-1}: B \rightarrow A$$

$f^{-1}(b)$ = controimmagine di b cioè

in gen $\{a \in A : f(a) = b\}$

in questo caso $\exists! a \in A$ l.c. $f(a) = b$

Definisco $f^{-1}(b) =$ quell'unico $a \in A$ l.c. $f(a) = b$

★

- f^{-1} in questo caso è una funzione
per ogni elemento di B $\exists a$ l.c. $f(a) = b$ perché f surg.
tale a è unico perché f iniettiva
Quindi f^{-1} è una funzione.

- $f: A \rightarrow B$ $f^{-1}: B \rightarrow A$
 $(f \circ f^{-1}): B \xrightarrow{f^{-1}} A \xrightarrow{f} B$

$$(f \circ f^{-1})(b) = \underbrace{f}_{\star}(f^{-1}(b)) = b$$

$$(f^{-1} \circ f)(a) = a \quad \forall a \in A$$

Teo Ogni funzione biunivoca ammette inversa che indico
con f^{-1} .

Oss. NON CONFONDERE f^{-1} con $\frac{1}{f}$

f^{-1} è la funzione t.c. $f^{-1} \circ f = \text{Id}$

$\frac{1}{f}$ è la funzione t.c. $\frac{1}{f(x)} \cdot f(x) = 1 \quad \forall f(x) \neq 0$

Esempio $f: (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$

$$f(\underline{x}) = \underline{\frac{1}{x}}$$

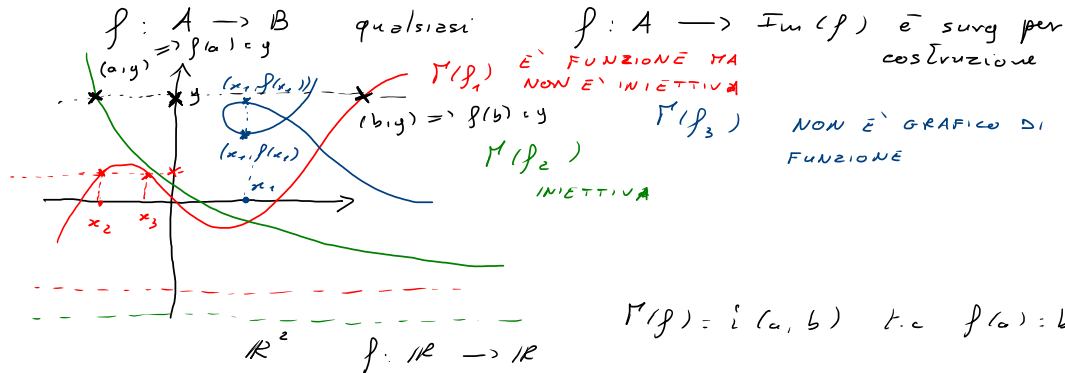
$$\frac{1}{f(x)} = x$$

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{x}$$

$$(f \circ f^{-1})(x) = f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x = \text{id}(x)$$

Oss Interpretazione grafica delle biunivocità
Soprattutto dell'iettività

- Ottenere la surgettività è banale



$$\Gamma(f) = \{(a, b) \text{ t.c. } f(a) = b\}$$

Funzione: ogni retta vert. incrocia grafico in uno e un solo punto

Funzione iniettiva: ogni retta orizzontale incrocia il grafico in non più di un punto