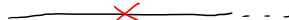


Numeri reali $\mathbb{R} \supsetneq \mathbb{Q} \supsetneq \mathbb{Z} \supsetneq \mathbb{N}$

$\mathbb{N}$ discreto Buon Ordinamento

$\mathbb{Z}$ discreto

$\mathbb{Q}$ denso 

Dim che non è continuo

$\mathbb{R}$ continuo 

Assioma di separazione: Dati $A, B \subseteq \mathbb{R}$ $A, B \neq \emptyset$

t.c. $\forall a \in A \quad \forall b \in B \quad a \leq b$

Allora $\exists c \in \underline{\mathbb{R}}$ t.c. $a \leq c \leq b \quad \forall a \in A \quad \forall b \in B$

Assioma di completezza Dato $A \subseteq \mathbb{R}$ $A \neq \emptyset$ e A limitato //

allora $\exists \text{Sup}(A)$ // ed $\exists \text{Inf}(A)$ // in $\mathbb{R}$

estremo superiore estremo inferiore

Assiomi equivalenti

Esempio per l'assioma di separazione.

$$A = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0 \text{ e } x^2 < 2 \} \quad \star \quad 1 \in A \neq \emptyset$$

$$B = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0 \text{ e } x^2 > 2 \} \quad \times \quad 2 \in B \neq \emptyset$$

Devo dim $a \leq b \quad \forall a \in A \quad \forall b \in B$

Supp che sia falso cioè $\exists b_1 \in B \quad \exists a_1 \in A \quad \text{t.c.}$

• $a_1 > b_1$

$$\begin{array}{l} \text{mult per } a_1 \Rightarrow a_1^2 > a_1 b_1 \\ \text{mult per } b_1 \Rightarrow a_1 b_1 > b_1^2 \end{array} \quad \} \Rightarrow \begin{array}{c} \star \\ 2 > a_1^2 > a_1 b_1 > b_1^2 > 2 \\ \cdot \quad \quad \quad \cdot \end{array}$$

Contraddizione

Quindi $a \leq b \quad \forall a \in A \quad \forall b \in B$

$\Rightarrow$ (Assioma) $\exists c \in \mathbb{R} \quad \text{t.c.} \quad \underline{a \leq c} \leq b \quad \forall a \in A \quad \forall b \in B$

• Voglio dim che $c^2 = 2$.

Per assurdo supponiamo $c^2 < 2$

$$c > a \quad \forall a \in A \Rightarrow c > 0$$

$$c^2 < 2 \Rightarrow c \in A$$

Cerco una contraddizione trovando un elemento $a \in A \quad \text{t.c.} \quad \underline{a > c}$

$$(c^2 < 2 \\ \rightarrow 2 - c^2 > 0)$$

$$c^2 \cdot 2$$

$$-4$$

$$b \dots$$

$$4 \cdot a$$

Cerco $n \in \mathbb{N}$ t.c.

$$\otimes \left(c + \frac{1}{n}\right) \in A \quad \text{cioè ho bisogno di} \quad \left(c + \frac{1}{n}\right)^2 < 2 \quad // \quad \text{Contraddizione}$$

• Risolvere la diseq di 2° grado per dim che $\exists n \in \mathbb{N}$ t.c. ...

$$c^2 + \frac{1}{n^2} + \frac{2c}{n} < 2$$

$$\text{Supp } n \gg 1$$

$$\frac{1}{n} \leq 1$$

$$\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n}$$

(molt per $\frac{1}{n}$)

$$n > 1$$

$$\frac{1}{n} < 1$$

*

$$\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n}$$

$$// \quad c^2 + \frac{1}{n^2} + \frac{2c}{n} < c^2 + \frac{1}{n} + \frac{2c}{n} = \frac{c^2 n + 1 + 2c}{n} \quad // \quad \text{Voglio che sia } < 2$$

$$\frac{c^2 n + 1 + 2c}{n} < 2$$

$$c^2 n + 1 + 2c < 2n$$

$$n(2 - c^2) > 1 + 2c$$

$$n > \frac{1+2c}{2-c^2}$$

con questo n si ha $\otimes$

Esercizio

Dim che non può essere $c^2 > 2$

- $c^2 > 2 \Rightarrow c \in B$
- Trovo $n \in \mathbb{N}$ t.c. $c - \frac{1}{n} \in B$

(contraddice il fatto che $c \leq b \quad \forall b \in B$)

Quindi $c^2 = 2$ il separatore reale di A e B è " $\sqrt{2}$ "

Oss

Sui razionali prende

$$\begin{aligned} E &= \{ y \in \mathbb{Q} \mid y \geq 0 \text{ e } y^2 < 2 \} &= A \cap \mathbb{Q} \\ F &= \{ y \in \mathbb{Q} \mid y \geq 0 \text{ e } y^2 > 2 \} &= B \cap \mathbb{Q} \end{aligned}$$

- Stessa dim $\Rightarrow e \leq f \quad \forall e \in E \quad \forall f \in F$
- Stessa dim $\Rightarrow$ se c è t.c. $e \leq c \leq f \quad \forall e \in E \quad \forall f \in F$

Allora $c^2 = 2$. Quindi Assioma di separazione non vale su $\mathbb{Q}$.

Oss 1. $\mathbb{Q}$ sono densi nei reali

$$\forall a, b \in \mathbb{R} \quad a < b \quad \exists c \in \mathbb{Q} \quad \text{t.c.} \quad a < c < b$$

$$\begin{array}{r} 2, 23528\underline{3} \\ 2, 23528\underline{5} \end{array}$$

$$2, 23528\underline{(4)} \quad |$$

2. $\# \mathbb{R} > \# \mathbb{Q} = \# \mathbb{Z} = \# \mathbb{N}$
Cantor "Dim"

Assioma di completezza $A \subseteq \mathbb{R} \quad A \neq \emptyset \quad A$ limitato $\equiv$
 $\Rightarrow \exists \inf(A), \sup(A) \in \mathbb{R}$

Def (A limitato) Sia $A \subseteq \mathbb{R} \quad A \neq \emptyset$ A si dice limitato superiormente se $\exists M \in \mathbb{R} \quad \text{t.c.} \quad a \leq M \quad \forall a \in A$

M si dice anche **maggiorante** di A

A si dice limitato inferiormente se $\exists m \in \mathbb{R} \quad \text{t.c.} \quad a \geq m \quad \forall a \in A$

m si dice anche **minorante** di A

A si dice limitato se è limitato inferiormente e superiormente

Oss $+\infty$ e $-\infty$ sono simboli che rappresentano "confini" superiore e inferiore per $\mathbb{R}$
NON SONO in $\mathbb{R}$. $\pm\infty \notin \mathbb{R}$

$$\mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$$

Def Se $A \subseteq \mathbb{R}$ non limitato superiormente allora
 $\text{Sup}(A) = +\infty$ ///
Se $A \subseteq \mathbb{R}$ non limitato inferiormente allora
 $\text{Inf}(A) = -\infty$

Oss. A non limitato superiormente
($\text{lim sup} \Rightarrow \exists M \quad M > a \quad \forall a \in A$)
(non $\text{lim sup} \Rightarrow \forall M \quad \exists a \in A \quad a > M$)
Nessun M è maggiorante di A

Esempio: $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \quad \text{Sup}(\mathbb{Q}) = +\infty \quad \text{Inf}(\mathbb{Q}) = -\infty$
 $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R} \quad \text{Sup}(\mathbb{N}) = +\infty$
E' lim inferiormente per esempio
da $-1 \leq a \quad a \in \mathbb{N}$

Oss Possiamo considerare per $A \subseteq \mathbb{R}$ limitato superiormente
 A e $B = \{ \text{Maggioranti di } A \}$
 A lim sup $\Rightarrow B \neq \emptyset$
Per def $a \leq b \quad \forall a \in A \quad \forall b \in B$

Assioma di Separazione $\Rightarrow \exists c \in \mathbb{R} \quad a \leq c \leq b \quad \forall a \in A$
 $\forall b \in B$

Def Sia $A \neq \emptyset \quad A \subseteq \mathbb{R}$ limitato superiormente
Allora $\text{Sup}(A)$ è il minimo dei maggioranti di A
Sia $A \neq \emptyset \quad A \subseteq \mathbb{R}$ limitato inferiormente
Allora $\text{Inf}(A)$ è il massimo dei minoranti di A

IMP. $\text{Sup}(A)$ può non appartenere ad A
 $A = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0 \text{ e } x^2 < 2 \}$ $c = \sqrt{2} = \text{Sup}(A) \notin A$
 $\text{Max}(A)$ è sempre un elemento di A
 $M = \text{Max}(A) \iff M = \text{Sup}(A)$
 $\text{e } M \in A$

Esempio

Gli intervalli di $\mathbb{R}$

Def $I \subseteq \mathbb{R}$ si dice intervallo se e solo se

$$\forall a, b \in I \quad a \leq b \quad \text{e} \quad \forall c \in \mathbb{R} \quad a \leq c \leq b \\ \Rightarrow c \in I$$

$$\begin{aligned} (2, 3) &= \{ x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 3 \} & 2, 3 \notin (2, 3) \\ [2, 3) &= \{ x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x < 3 \} & 2 \in [2, 3) \text{ e } 3 \notin [2, 3) \\ &\rightarrow]2, 3[\text{ notazione equivalente a } (2, 3) \end{aligned}$$

$(2, 3)$ è limitato

Maggioranti di $(2, 3)$

$$x \geq 4$$

$$\text{Maggioranti} \supseteq [3, +\infty)$$

Serve dim $\text{Maggioranti} \subseteq [3, +\infty)$

Sia $a \notin [3, +\infty)$ dimostro che non è un maggiorante cioè trovo
 $b \in (2, 3) \quad b > a \quad a \notin [3, +\infty) \Rightarrow a < 3$

$a < 3$ • se $a < 2$ nessun problema $\frac{5}{2} \in (2, 3)$ $\frac{5}{2} > a$

• se $a > 2$ trovo un t.c. $a < a + \frac{1}{n} < 3$

(come per l'assioma di separazione)

• Maggioranti di $(2, 3)$ sono $[3, +\infty)$

$\text{Sup}(2, 3) = \text{trecce?}$ 3

$\text{Max}(2, 3)$ Non Esiste

$\text{Inf}(2, 3) = 2$

$\text{min}(2, 3)$ Non Esiste

$\text{Int}[2, 3) = 2$

$\text{min}[2, 3) = 2$

$[a, b)$ (a, b)
 $[a, b]$ $(a, b]$

Oss 1. Unione di intervalli non è in generale un intervallo

$$(0, 1) \cup (2, 3)$$

I_1, I_2 intervalli

Si può dire che $\forall I_1 \cup I_2$ è un intervallo

se e solo se $I_1 \cap I_2 \neq \emptyset$



2. Intersezione di intervalli $\begin{cases} \sigma \in \emptyset \\ \sigma \in \text{intervallo} \end{cases}$

Esercizio

$$I_n = \left(\frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n} \right) \quad n \in \mathbb{N} - \{0\}$$

$$I_1 = (1, 2)$$

$$I_2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right)$$

Descrivere

$$I = \bigcup_{n \geq 1} I_n$$

$$J = \bigcap_{n \geq 1} I_n$$

