

LIMITI

Esercizio ①

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1-x^2)^3 - 6 \cos(x) + 5}{\sqrt[3]{1+3x^2} - \ln(1+x^2) - 1}$$

Forme indeterminate $\frac{0}{0}$

Consideriamo gli sviluppi
di Taylor

NUMERATORE:

$$(1+t)^d = 1 + d \cdot t + \frac{1}{2} (d-1)d \cdot t^2 + o(t^2)$$

lo applichiamo a:

$$t = -x^2 \quad d = 3$$

$$(1 - x^2)^3 = 1 + 3 \cdot (-x^2) +$$

$$\frac{1}{2} 2 \cdot 3 \cdot (-x^2)^2 + o(x^4)$$

$$= 1 - 3x^2 + 3x^4 + o(x^4)$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$$

DENOMINATORE :

$$(1+t)^d \quad \text{con} \quad t = 3x^2, d = \frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned}
 (1+3x^2)^{\frac{1}{3}} &= 1 + \frac{1}{3}(3x^2) + \\
 &\quad + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right) \left(\frac{1}{3}-1\right) \cdot (3x^2)^2 \\
 &\quad + o(x^4) \\
 &= 1 + x^2 - x^4 + o(x^4)
 \end{aligned}$$

$$\ln(1+t) = t - \frac{1}{2}t^2 + o(t^2)$$

calcoliamo per $t = x^2$

$$\ln(1+x^2) = x^2 - \frac{1}{2}x^4 + o(x^4)$$

PERTANTO : $\lim =$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - 3x^2 + 3x^4 + o(x^4) - 6\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)\right) + 5}{1 + x^2 - x^4 + o(x^4) - \left(x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4)\right) - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0 + 0 \cdot x^2 + 3x^4 - \frac{1}{4}x^4 + o(x^4)}{0 + 0 \cdot x^2 - x^4 + \frac{1}{2}x^4 + o(x^4)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{11}{4}x^4 + o(x^4)}{-\frac{1}{2}x^4 + o(x^4)} =$$

$$= \frac{\frac{11}{4}}{-\frac{1}{2}} = -\frac{11}{2}$$

Esercizio (2)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctg(x) - \sin(x^2) - x}{e^{x^2} - \cos(x)}$$

numeratore:

$$\arctg(x) = x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$$

$$\sin(x^2) = x^2 + o(x^3)$$

denominatore:

$$e^{(x^2)} = 1 + x^2 + \frac{1}{2}x^4 + o(x^4)$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + o(x^4)$$

PERTANTO : $\lim =$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3) - (x^2 + o(x^3)) - x}{1 + \underbrace{x^2}_{\text{red}} + \frac{1}{2}x^4 + o(x^4) - \left(1 - \underbrace{\frac{1}{2}x^2}_{\text{red}} + \frac{1}{4!}x^4 + o(x^4)\right)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^2 + o(x^2)}{\frac{3}{2}x^2 + o(x^2)} = -\frac{2}{3}$$

Esercizio (3)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{8 \cos(\sqrt{x}) - (2-x)^3 - 8x}{\ln(1+\sqrt{x}) - \tan(\sqrt{x}) + \frac{x}{2}}$$

numérateur :

$$\cos(t) = 1 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{4!}t^4 + o(t^4)$$

$$t = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$$

$$\begin{aligned}\rightarrow \cos(\sqrt{x}) &= 1 - \frac{1}{2}(\sqrt{x})^2 + \frac{1}{4!}(\sqrt{x})^4 + o(\sqrt{x}^4) \\ &= 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{24}x^2 + o(x^2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(2-x)^3 &= 2^3 - 3 \cdot 2^2 \cdot x + 3 \cdot 2 \cdot x^2 + o(x^2) \\ &= 8 - 12x + 6x^2 + o(x^2)\end{aligned}$$

DENOMINATEUR :

$$\ln(1+t) = t - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{4}t^4 + o(t^4)$$

$$t = \sqrt{x}:$$

$$\ln(1+\sqrt{x}) = \sqrt{x} - \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x\sqrt{x} - \frac{1}{4}x^2 + o(x^2)$$

$$\lg(\sqrt{x}) = \sqrt{x} + \frac{1}{3}x\sqrt{x} + o(x^2)$$

Pertanto: $\lim =$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{8 \cdot \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{24} + o(x^2)\right) - \left(8 - 12x + 6x^2 + o(x^2)\right) - 8x}{\sqrt{x} - \frac{x}{2} + \frac{x\sqrt{x}}{3} - \frac{x^2}{4} + o(x^2) - \left(\sqrt{x} + \frac{1}{3}x\sqrt{x} + o(x^2)\right) + \frac{x}{2}}$$

$$8 \cdot \frac{x^2}{24} \rightarrow$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{8 - 8 - 4x + 12x - 8x + \frac{x^2}{3} - 6x^2 + o(x^2)}{\sqrt{x} - \sqrt{x} - \frac{x}{2} + \frac{x}{2} + \frac{x\sqrt{x}}{3} - \frac{x\sqrt{x}}{3} - \frac{x^2}{4} + o(x^2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{1}{3} - 6\right)x^2 + o(x^2)}{-\frac{x^2}{4} + o(x^2)} = \frac{-\frac{17}{3}}{-\frac{1}{4}} = \frac{68}{3}$$

SERIE

Esercizio (4)

Determinare gli $d \in \mathbb{R}$ t.c.
la serie seguente converge

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(e^{\frac{1}{n^d}} - 1\right)}{n}$$

sviluppo di Taylor (o limite notevole)

$d > 0$ $\frac{1}{n^d}$ è infinitesimo:

$$e^{\frac{1}{n^d}} - 1 \sim \frac{1}{n^d}$$

Quindi:

$$\frac{e^{\frac{1}{n^d}} - 1}{n} \sim \frac{1}{n^{d+1}}$$

Serie converge $\Leftrightarrow \sum \frac{1}{n^{d+1}}$
converge

Per il criterio della
serie armonica generalizzata

Serie converge se ESPONENTE > 1

nostro caso: se $d+1 > 1$
cioè $d > 0$

• Consideriamo caso $d < 0$

$$e^{\frac{1}{n^d}} - 1 \geq 1 \quad \text{definitivamente}$$

PERCHÉ $\frac{1}{n^d} \rightarrow +\infty$ SE $d < 0$

cioè $\exists \bar{n}$ t.c.

$$e^{\frac{1}{n^d}} - 1 \geq 1 \quad \forall n > \bar{n}$$

Pertento

$$\sum_{n=\bar{n}}^{\infty} \frac{e^{\frac{1}{n^d}} - 1}{n} \geq \sum_{n=\bar{n}}^{\infty} \frac{1}{n}$$

$$\sum \frac{1}{n} \quad \text{DIVERGE}$$

$$\Rightarrow \sum \text{DIVERGE}$$

CASO $d = 0$:

$$\frac{1}{n^d} = 1 \quad \forall n$$

$$\sum = \sum \frac{e-1}{n}$$

$(e-1)$ costante

$$\sum \frac{1}{n} \text{ diverge}$$

$$\Rightarrow \sum \text{ diverge}$$

ALTRO MODO :

$$\sum e_n \text{ converge}$$

$\Downarrow$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

QUINDI : SE $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L \neq 0$

allora $\sum a_n$ diverge

In generale :

SERIE con parametro

serie
armonica
generalizzata

$$\sum \frac{1}{n^p}$$

↑
Taylor

serie
geometrica

$$\sum b^n$$

↑
criterio
RADICE
o
RAPPORTO

Esercizio (5)

Studio
di convergenza
di $a_n > 0$

la convergenza delle serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n + 7n}{2^n}$$

Idee : $\frac{4^n + 7n}{2^n} \sim \left(\frac{4}{2}\right)^n$

In particolare :

se $2 > 4$ la serie
converge

Poiché $\frac{4}{2} < 1$

se $2 < 4$ la serie diverge

Eq.ⁿte : criterio radice

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{4^n + 7^n}{2^n}} = \frac{4}{2}$$

se $d \leq 4$

$d < 4$: Serie $\sim \sum \left(\frac{4}{2}\right)^n$

$\left(\frac{4}{2}\right) > 1 \Rightarrow$ Serie
DIVERGE

Eq.ⁿte : criterio delle
radice

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{4^n + 7^n}{2^n}} = \frac{4}{2} > 1$$

ULTIMO CASO $d=4$
 $d=4 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\quad} = \underline{1}$

Torniamo alla successione

$$Q_n = \frac{4^n + 7n}{d^n} \quad | \quad d=4$$

$$\Rightarrow Q_n = \frac{4^n + 7n}{4^n} \sim 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Q_n = 1 > 0$$

non è verificata la

condizione necessaria
di convergenza
della serie :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0 \Rightarrow$ Serie
diverge

ESERCIZIO.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{2}\right)^5 \cdot \sum_{i=n}^{n+100} \frac{1}{i^5}$$

N.B. questa è una successione

A_n : $\sum_{i=n}^{n+100} \frac{1}{i^5}$ è la
somma
di
101 numeri

$$\left(\frac{n}{2}\right)^5 = \frac{n^5}{32}$$

STIMA $\sum_{i=n}^{n+100} \frac{1}{i^5}$:

$$\frac{1}{n^5} + \frac{1}{(n+1)^5} + \frac{1}{(n+2)^5} + \dots + \frac{1}{(n+100)^5}$$

101 termini

$$\frac{101}{(n+100)^5} \leq \sum_{i=n}^{n+100} \frac{1}{i^5} \leq \frac{101}{n^5}$$

$$\frac{n^5}{32} \cdot \frac{101}{(n+100)^5} \leq Q_n \leq \frac{n^5}{32} \cdot \frac{101}{n^5}$$

$\downarrow n \rightarrow \infty$

$$\frac{101}{32}$$

$\downarrow n \rightarrow \infty$

$$\frac{101}{32}$$

Esercizio

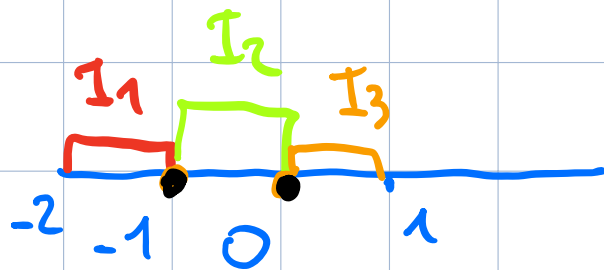
Dato $f(x) = \begin{cases} f_1 & \text{in } I_1 \\ f_2 & \text{in } I_2 \\ f_3 & \text{in } I_3 \end{cases}$

con $I_1 \cup I_2 \cup I_3 = [-2, 1]$

$$I_1 = [-2, -1]$$

$$I_2 = (-1, 0)$$

$$I_3 = [0, 1)$$



f_1 continuo in I_1

f_2 continuo in I_2

f_3 continua in I_3

Allora $f(x)$ è

continua in $[-2, 1)$

tranne al più

in $x = -1$, $x = 0$

Per tanto $f(x)$ è

INTEGRABILE in $[-2, 1]$

QUINDI

$$g(x) = \int_{-2}^x f(t) dt \quad \text{è continua in } [-2, 1]$$

non è derivabile
dove $f(x)$ non è
continua