

EQUAZIONI DIFFERENZIALI

COEFFICIENTI COSTANTI

$$y^{(m)} + a_{m-1} y^{(m-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = f(x)$$

DOE $y = y(x)$ funzione
incognita

$$a_0, a_1, \dots, a_{m-1} \in \mathbb{R}$$

y' = derivata prima

$\vdots$

$y^{(m)}$ = derivata m-esima

$f(x)$ funzione data

Equazione omogenea

$$\updownarrow$$
$$f(x) = 0$$

CIOE': $y^{(m)} + \text{---} + a_1 y' + a_0 y = 0$

PROP. Eq. differenziale
a coeff. costanti
omogenea

E' equazione lineare

OVVERO, se poniamo

$$F(y) = y^{(m)} + \text{---} + a_1 y' + a_0 y$$

allora $\odot$ $F(y+z) =$
 $F(y) + F(z)$

$\odot F(\lambda y) = \lambda \cdot F(y)$

dim [Esercizio]

suggerimento: la derivata è operazione lineare

Teorema $\textcircled{1}$ Dete eq.

$$F(y) = y^{(m)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0$$

ALLORA : l'insieme delle
 SOLUZIONI è uno spazio

vettoriale di $\dim = m$

cioè:

$$\{ y \text{ funzioni t.c. } F(y) = 0 \}$$

è sottosp. vettoriale
di $\dim = m$

CONTENUTO in $C^m(\mathbb{R})$

insieme di tutte
le funzioni derivabili
 m volte

Idea :

$$F(y) - y^{(m)} + e_{m-1} y^{(m-1)} + e_1 y' + e_0 y = 0$$



$\exists$ m funzioni

$g_1, \dots, g_m$ t.c.

Qualsiasi y soluzione eq
scrivo come

$$y = \lambda_1 g_1 + \dots + \lambda_m g_m$$

DATA:

$$F(y) = y^{(m)} + e_{m-1} y^{(m-1)} + \dots + e_0 y = 0$$

ALL'EQ. DIFFERENZIALE
ASSOCIAMO pol. caratteristico

$$\lambda^m + Q_{m-1} \lambda^{m-1} + \dots + Q_1 \lambda + Q_0 = 0$$

$y^{(m)}$ derivate m -ime $\leftrightarrow \lambda^m$ potenza m -ima

Esempi

① $y' - y = 0$

$P_{CAR}: \lambda - 1$

RADICI
↑
sol. : $\lambda - 1 = 0$

RADICE : 1 con mult. = 1

SOLUZIONE eq. differenziale

$$y' - y = 0 \quad \text{cioè}$$

$$y' = y$$

SOLUZIONE : e^x $\leftarrow (e^x)' = e^x$

(visto nel modello (1))

SOLUZIONE generale:

$$C_1 \cdot e^x \quad \text{con } C_1 \text{ costante}$$

1.1

$$y' - 5y = 0$$

$$P_{CAR} : \lambda - 5$$

RADICE 5 con $molt=1$

SOLUZIONE eq. diff.

$$y' = 5y$$

$$\Rightarrow y = e^{5x}$$

SOLUZIONE generale

$$C_1 \cdot e^{5x}$$

5 RADICE di $P_{CAR} \Rightarrow e^{5x}$ sol.

eq.ⁿte

come nel modello (1)

$$y' = 5y \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{dy}{dx} = 5y \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{dy}{y} = 5 dx \quad \Leftrightarrow \int \frac{dy}{y} = \int 5 dx$$

$$\Leftrightarrow \ln(y) = 5x + c$$

$$\Leftrightarrow y = c_1 \cdot e^{5x}$$

← dim = 1

N.B.

$$y' = 5x$$

eq. diff. di
ordine = 1

$$\Rightarrow \dim \{ \text{soluzioni} \} = 1$$

$$\textcircled{2} \quad y'' - 4y = 0$$

$$P_{CAR}: \quad \lambda^2 - 4 = 0$$

$$\textcircled{3} \quad y'' - 3y' + 2y = 0$$

$$P_{CAR}: \quad \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

$$\text{m.b.} \quad y'' = y^{(2)} \quad y' = y^{(1)}$$

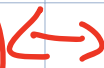
$$\textcircled{4} \quad y^{(3)} + 5y^{(2)} + 4y = 0$$

$$P_{CAR}: \quad \lambda^3 + 5\lambda^2 + 4 = 0$$

Quello che abbiamo visto può essere tradotto nel seguente modo:

Eq. differenziale

$$y' - 5y = 0$$



Eq. polinomiale

$$\lambda - 5 = 0$$

sol. $\lambda = 5$

||

$$\left(\frac{d}{dx} - 5 \text{Id} \right) (y) = 0$$

(OPERATORE derivata - 5. operatore identità) APPLICATO alla funzione y

SOL:

$$y = c_1 \cdot e^{5x}$$

BASE di {soluzioni}: e^{5x}

OVERO: 5 RADICE PCAR $\Rightarrow e^{5x}$ sol. eq. diff.

FATTO :

$$P_{CAR} = (\lambda - Q_1) \cdot (\lambda - Q_2)$$

$$F(y) = \left(\frac{d}{dx} - Q_1 \text{Id} \right) \circ \left(\frac{d}{dx} - Q_2 \text{Id} \right)$$

Diagram illustrating the composition of operators:

- $\frac{d}{dx}$ is labeled "derivata prima" (first derivative).
- Id is labeled "identità" (identity).
- The expression $\left(\frac{d}{dx} - Q_1 \text{Id} \right) \circ \left(\frac{d}{dx} - Q_2 \text{Id} \right)$ is labeled "composizione di operazioni" (composition of operations).
- A double arrow indicates the relationship between the two operators.

derivata seconda



compone due volte derivata prima

CIOE': $y'' \leftrightarrow \lambda^2$

FATTO $\Rightarrow$ Se y_1 è
soluzione di

$$\left(\frac{d}{dx} - q_1 \text{id}\right)(y) = y' - q_1 y = 0$$

allora y_1 è soluzione di

$$\left(\frac{d}{dx} - q_1 \text{id}\right) \circ \left(\frac{d}{dx} - q_2 \text{id}\right) = 0$$

$\parallel$

$$y'' - (q_1 + q_2)y' + q_1 q_2 y = 0$$

Esempio: $P_{CAR} = (\lambda - 5) \cdot (\lambda + 3)$
 $= \lambda^2 - 2\lambda - 15$

Eq. diff. associata:

$y'' - 2y' - 15y = 0$
"

$(y' - 5y) \cdot (y' + 3y) = 0$

SOLUZIONI: sol. (A) + sol. (B)

(A):

$$y' - 5y = 0$$

$$\Leftrightarrow g_1 = e^{5x}$$

BASE
SOL.
di (A)

(B):

$$y' + 3y = 0$$

$$\Leftrightarrow g_2 = e^{-3x}$$

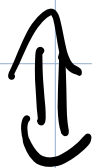
BASE
SOL.
di (B)

Quindi:

$$y'' - 2y' + 5y = 0$$



$$(y' - 5\text{Id}) \circ (y' + 3\text{Id}) = 0$$



$$(y' - 5y = 0) \quad + \quad (y' + 3y = 0)$$



conclusione

SOLUZIONE generale dell'eq.

$$y'' - 2y' - 15y = 0$$

è

$$c_1 \cdot e^{5x} + c_2 \cdot e^{-3x}$$

c_1, c_2
costanti

RIASSUMENDO:

5, -3 RADICI
di PCAR



e^{5x}, e^{-3x}
BASE SOLUZIONI

TEOREMA : Sia $F(y) = 0$ eq. diff.
a coeff. costanti omogenea

P_{CAR} = pol. caratteristico
essociato

Se λ è radice di P_{CAR}
allora :

$e^{\lambda x}$ è soluzione dell'eq.
diff. $F(y) = 0$

Esempio

$$① \quad F(y) = y'' - 4y = 0$$

$$P_{CAR}: \quad \lambda^2 - 4 = 0$$

RADICI : $\begin{matrix} / & 2 \\ \backslash & -2 \end{matrix}$

$\Rightarrow$ SOLUZIONI : $\begin{matrix} / & e^{2x} \\ \backslash & e^{-2x} \end{matrix}$

$\Rightarrow$ SOLUZIONE
generale : $c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x}$

con c_1, c_2 costanti

Pb : P_{CAR} è pol. a coeff. in $\mathbb{R}$

dobbiamo distinguere i seguenti
casi :

1) P_{CAR} ha radici reali distinte

2) P_{CAR} ha radici reali & complesse

3) P_{CAR} ha radici multiple
(con molteplicità > 1)

1) $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ radici reali di
 P_{CAR}

$\Downarrow$

$e^{\alpha_1 x}, \dots, e^{\alpha_k x}$ sono sol.

2)

$$\text{Se } d = \underline{\gamma + i\beta} \in \mathbb{C}$$

radice complessa di
 P_{CAR}

allora poiché P_{CAR} ha coeff. reali

$$\Rightarrow \text{anche } \underline{\bar{d} = \gamma - i\beta}$$

è radice complessa
di P_{CAR}

$\Downarrow$

$$\underline{e^{(\gamma + i\beta)x}}$$

$$\underline{e^{(\gamma - i\beta)x}}$$

Sono soluzioni
funzioni a valori in $\mathbb{C}$

$$\text{ma } e^{i\beta x} \stackrel{\text{def}}{=} \cos(\beta x) + i \sin(\beta x)$$

$$e^{-i\beta x} \stackrel{\text{def}}{=} \cos(-\beta x) + i \sin(-\beta x)$$

Quindi possiamo scegliere
come base
delle soluzioni:

$$e^{\gamma x} \cdot \cos(\beta x), \quad e^{\gamma x} \cdot \sin(\beta x)$$

CONCLUSIONE:

$$d = \gamma + i\beta$$

$$\hookrightarrow e^{\gamma x} \cdot \cos(\beta x)$$

$$\bar{d} = \gamma - i\beta$$

RADICI
di P_{CAR}

$$e^{\gamma x} \cdot \sin(\beta x)$$

Sol.
di
 $F(y) = 0$

SOLUZIONE generale :

$$C_1 \cdot e^{\lambda x} \cos(\beta x) + C_2 e^{\lambda x} \sin(\beta x)$$

ESEMPIO :

$$y'' + y = 0 \quad \left(\begin{array}{l} \text{eq.} \\ \text{lineare} \end{array} \right)$$

$$P_{CAR}: \lambda^2 + 1 = 0$$

$$\text{RADICI: } \begin{cases} \lambda = i = 0 + i \cdot 1 \\ \bar{\lambda} = -i = 0 - i \cdot 1 \end{cases}$$

$$\text{SOLUZIONI: } \begin{cases} \cos(x) \\ \sin(x) \end{cases} \quad \text{BASE}$$

SOLUZIONE generale :

$$c_1 \cdot \cos(x) + c_2 \cdot \sin(x)$$

||

$$C \cdot \sin(x + \alpha)$$

SPIEGAZIONE :

$$e^{i\beta x} = \cos(\beta x) + i \sin(\beta x)$$

$$e^{-i\beta x} = \cos(-\beta x) + i \sin(-\beta x)$$

$$= \cos(\beta x) - i \sin(\beta x)$$

$\Downarrow$

$$e^{i\beta x} + e^{-i\beta x} = 2 \cdot \cos(\beta x)$$

$$e^{i\beta x} - e^{-i\beta x} = 2i \cdot \sin(\beta x)$$

Quindi : combinazione lineare

di $e^{i\beta x}, e^{-i\beta x} \iff$ comb. lineare
 $\cos(\beta x), \sin(\beta x)$

Soluzione

generale : $C_1 \cdot \cos(x) + C_2 \cdot \sin(x)$

3) Se λ è radice di P_{CAR}
con mult. ≥ 2

cioè : $P_{CAR} : (\lambda - \lambda)^K \cdot P_1(\lambda)$

$K = \text{molteplicità di } \lambda$

$\Rightarrow$ SOLUZIONI :

$e^{\lambda x}, x \cdot e^{\lambda x}, x^2 \cdot e^{\lambda x}, \dots, x^{K-1} \cdot e^{\lambda x}$

ESEMPIO.

$$y'' = 0$$

$$P_{CAR}: \lambda^2 = 0$$

RADICE: 0 con mult = 2

BASE
SOLUZIONI: $e^{\theta \cdot x}$, $x \cdot e^{\theta x}$

$$e^{\theta x} = 1$$

soluzione generale:

$$c_1 \cdot e^{\theta x} + c_2 x e^{\theta x} = \underline{c_1 + c_2 x}$$

Esempio riassuntivo

$$F(y) = y^{(4)} - 2y^{(3)} + 2y^{(2)} - 2y' + y = 0$$

$$P_{CAR}: \lambda^4 - 2\lambda^3 + 2\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$$

$$= (\lambda - 1)^2 \cdot (\lambda^2 + 1)$$

$(\lambda - 1)$ divide 2 volte P_{CAR}

$$\text{RADICI: } \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ con mult.} = 2 \\ i \\ -i \end{array} \right.$$

$$1 \text{ con mult.} = \underline{\underline{2}} \rightarrow e^{\lambda x}, x e^{\lambda x}$$

$$i, -i \rightarrow \cos x, \sin x$$

SOLUZIONE GENERALE:

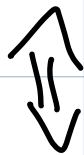
$$c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 \cos(x) + c_4 \sin(x)$$

con c_1, c_2, c_3, c_4 costanti

Equazione differenziale omogenea
di ordine 4 $\Rightarrow$

Le soluzioni costituiscono
uno spazio vettoriale di
dimensione = 4

ESPLICITAZIONE
COSTANTI



imporre condizioni
iniziali

Esempi.

$$\textcircled{1} \quad \begin{cases} y' - 5y = 0 \\ y(0) = 25 \end{cases}$$

sol. generale $y' - 5y = 0$

$$\Leftrightarrow \lambda - 5 = 0 \quad \lambda = 5 \text{ RADICE}$$

SOL. GENERALE : $c_1 \cdot e^{5x}$

c_1 costante che determiniamo
con la condizione iniziale

$$y(0) = c_1 \cdot e^{5 \cdot 0} = 25$$

$$\Rightarrow c_1 = 25$$

cioè : soluzione di

$$\begin{cases} y' - 5y = 0 \\ y(0) = 25 \end{cases}$$

e

$$y = 25 \cdot e^{5x}$$

$$\textcircled{2} \quad \begin{cases} y'' - y = 0 \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

$$y'' - y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad p_{\text{CAR}}(\lambda): \lambda^2 - 1$$

$$\text{RADICI: } \lambda = \begin{matrix} 1 \\ -1 \end{matrix}$$

$$\text{BASE SOLUZIONI: } e^x, e^{-x}$$

SOLUZIONE GENERALE

$$c_1 \cdot e^x + c_2 \cdot e^{-x}$$

$$\text{CONDIZIONI INIZIALI: } \begin{cases} y(0) = 2 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

$$y(0) = c_1 \cdot e^0 + c_2 \cdot e^{-0} = 2$$

$$y'(0) = c_1 \cdot e^0 - c_2 \cdot e^{-0} = 1$$

$$\text{cioè: } \begin{cases} c_1 + c_2 = 2 \\ c_1 - c_2 = 1 \end{cases}$$

$$\underline{\text{Sol.}} \quad c_1 = \frac{3}{2}$$

$$c_2 = \frac{1}{2}$$

$$\text{Soluzione finale} \quad y = \frac{3}{2} e^x + \frac{1}{2} e^{-x}$$