

# Equazioni differenziali

DEF. Un'eq. differenziale  
di ORDINE  $m$   
è  
un'espressione :

$$F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(m)}(x)) = 0$$

DOVE

$y = y(x)$  è funzione  
della variabile  $x$

$y'$  = derivata prima

$\vdots$   
 $y^{(m)}$  = derivata  $m$ -esima

### Esempi

①  $y'(x) = 0$

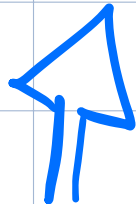
SOL.  $y = \text{costante}$

②  $y'(x) = a$   $a$  costante

SOL.  $y = a \cdot x + b$

③  $y'(x) = y(x)$

SOL: (visto :)

  $y = c \cdot e^x$

Eq. diff. del 1° ordine

$$\textcircled{4} \quad y'' = -k^2 y \quad \underline{k \text{ costante}}$$

Eq. della molla

Eq. diff. del 2° ordine

$$\underline{\text{SOL:}} \quad y = \cos(kx + c)$$

PROBLEMA di CAUCHY:

{ Eq. differenziale  
condizioni iniziali



ovvero:

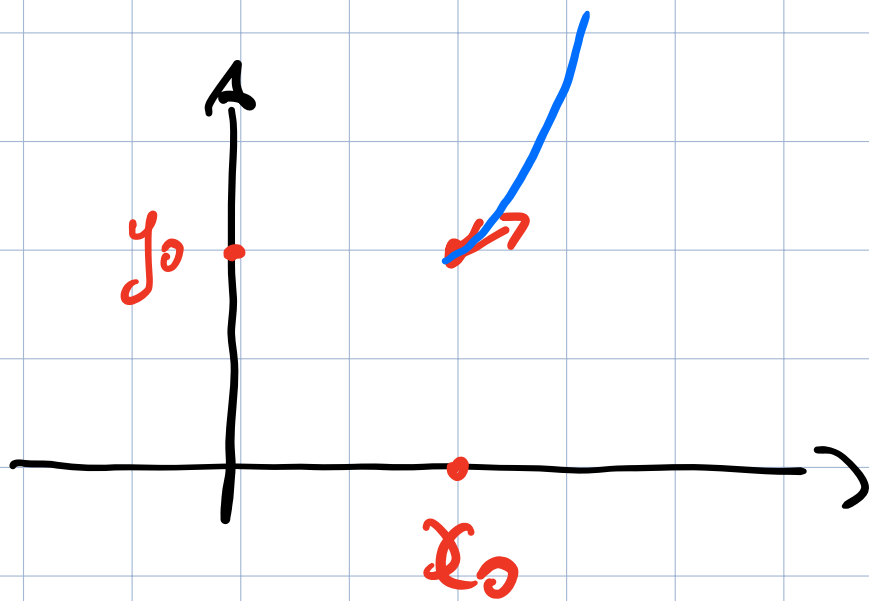
$$\left\{ \begin{array}{l} F(x, y, y', \dots, y^{(m)}) = 0 \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \\ \vdots \\ y^{(m-1)}(x_0) = y_{m-1} \end{array} \right.$$

valori fissati nel punto  $x_0$

Fissiamo il valore di

$y, y', y'', \dots, y^{(m-1)}$

nel punto iniziale  $x_0$



RISOLVERE  
Cauchy : p.b. di  
partire dai  
valori iniziali  
e ricostruire  
la funzione

Esempi

$$\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y'' = -y \\ y(0) = 7 \\ y'(0) = -1 \end{cases}$$

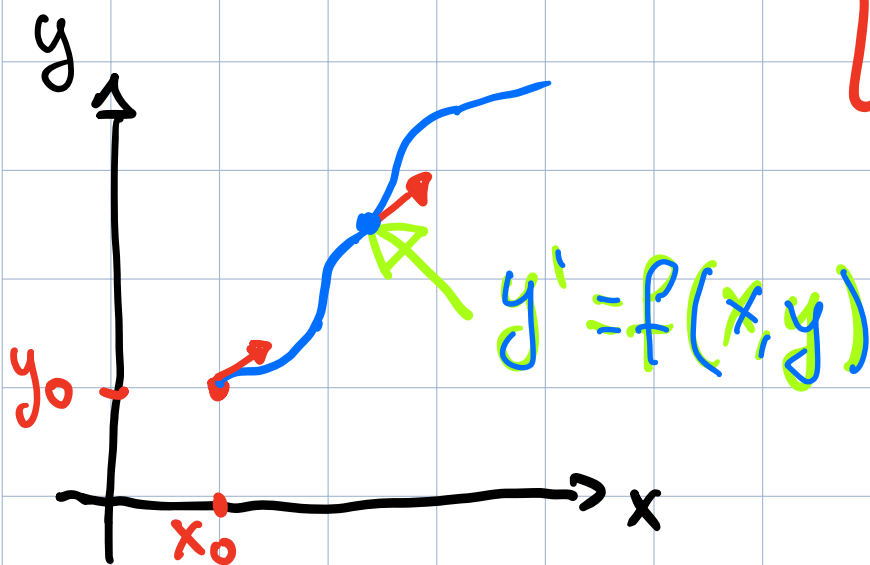
Questioni:

- $\exists$  soluzione ?
- la soluzione è unica ?

- La soluzione ha dominio illimitato oppure ha asintoto verticale?
- 

## EQUAZIONI DIFFERENZIALI del 1° ORDINE

Pb. di Cauchy : 
$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$



Esempi

$$\begin{cases} y' = 5 \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

sol.  $y = 5x + 2$

$$\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 7 \end{cases}$$

sol:  $y = 7 \cdot e^x$

eq.

$$\begin{array}{c} y' = y \\ \Downarrow \\ \frac{dy}{dx} = y \\ \Updownarrow \end{array}$$

$$\frac{dy}{y} = dx$$

$\Leftrightarrow$

$$\int \frac{dy}{y} = \int dx$$

$$\ln(y) = x + C$$

$$y = e^{x+C}$$

$$y = e^C \cdot e^x$$

"  
costante

---

Teorema.

Sia  $f(x, y)$   
funzione di 2 variabili

Consideriamo

CONTINUA

Il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

ALLORA:

1)  $\exists$  almeno una  
SOLUZIONE LOCALE

2) Se  $f(x, y)$  è derivabile  
in  $x_0$  la sol. è  
unica

3) Se  $f(x, y)$  verifica

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| < K \cdot |y_1 - y_2|$$

$$\forall x, \forall y_1, y_2$$

ALLORA  $\exists$  soluzione  
GLOBALE

---

Unicità : controesempio

$$\begin{cases} y' = 3 \cdot y^{\frac{2}{3}} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

ammette 2 soluzioni:  $y=0$   
 $y=x^3$



N.B. Il teorema non  
è costruttivo

Come si trovano le  
soluzioni?

---

EQUAZIONI A VARIABILI  
SEPARABILI

$$y' = f(x, y)$$

variabili  
separabili

$\Leftrightarrow$

$$f(x, y) = g(x) \cdot h(y)$$

Se  $h(y) \neq 0$

$$y' = g(x) \cdot h(y)$$

$\Downarrow$

$$\frac{dy}{dx} = g(x) \cdot h(y)$$

$\Downarrow$

$$\frac{dy}{h(y)} = g(x) \cdot dx$$

SOLUZIONE : integrando

$$\int \frac{dy}{h(y)} = \int g(x) \cdot dx$$

||

$H(y)$

||

$G(x)$



soluzione

$$y = H^{-1}(G(x))$$

Caso variabili  
separabili :

# Esempi delle diffusioni del virus

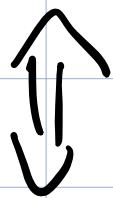
$$\textcircled{1} \quad \begin{cases} y' = y \\ y(0) = 5 \end{cases}$$

$$y' = y \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = y$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{dy}{y} = 1 \cdot dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int 1 \cdot dx$$

$$\ln(y) = x + c$$



$c$  costante

$$y = e^{x+c}$$

con  $c$  costante  
da determinare

Pb. di Cauchy:  $y(0) = 5$

Sostituiamo  $\begin{cases} x=0 \\ y(0)=5 \end{cases}$

$$e^{x+c} \Big|_{x=0} = 5$$

$$\Rightarrow e^c = 5 \Rightarrow c = \ln(5)$$

Sol. Pb. di Cauchy :

$$y = 5 \cdot e^x$$

## Esempio (2)

$$\begin{cases} y' = e^{-y} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

$$y' = e^{-y} \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{dy}{dx} = e^{-y} \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{dy}{e^{-y}} = 1 \cdot dx \quad \Leftrightarrow$$

$$e^y dy = 1 dx$$

Integriamo:

$$\int e^y dy = \int 1 \cdot dx$$

sol:  $e^y = x + c$

ovvero

$$y = \ln(x + c)$$

Per determinare  $c$  utilizziamo  
condizione iniziale:

$$y(0) = 0 \quad \text{cioè}$$



$$0 = e^m(0+c)$$

$$\Rightarrow c = \underline{1}$$

conclusione: SOLUZIONE  
del pb.  
di Cauchy

$$\underline{y = e^m(x+1)}$$

# EQUAZIONI DIFFERENZIALI

## 2 COEFFICIENTI COSTANTI

$$y^{(m)} + a_{m-1} y^{(m-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = f(x)$$

DOE  $y = y(x)$  funzione  
incognita

$$a_0, a_1, \dots, a_{m-1} \in \mathbb{R}$$

$y'$  = derivata prima

$\vdots$

$y^{(m)}$  = derivata m-esima

Equazione omogenea

$$\updownarrow$$
$$f(x) = 0$$

CIOE':  $y^{(m)} + \text{---} + a_1 y' + a_0 y = 0$

PROP. Eq. differenziale  
a coeff. costanti  
omogenea

E' equazione lineare

OVVERO, se poniamo

$$F(y) = y^{(m)} + \text{---} + a_1 y' + a_0 y$$

allora  $\odot F(y+z) =$

$$F(y) + F(z)$$

$$\odot F(\lambda y) = \lambda \cdot F(y)$$

dim [Esercizio]

Teorema (1) Dete eq. diff.  
omogenee

$$F(y) = y^{(m)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0$$

ALLORA : l'insieme delle  
SOLUZIONI è uno spazio

vettoriale di  $\dim = m$

cioè:

$$\{ y \text{ funzioni t.c. } F(y) = 0 \}$$

è sottosp. vettoriale  
di  $\dim = m$

CONTENUTO in  $C^m(\mathbb{R})$

insieme di tutte  
le funzioni derivabili  
 $m$  volte

Idea :

$$y^{(m)} + e_{m-1} y^{(m-1)} + e_1 y' + e_0 y = 0$$



$\exists$   $m$  funzioni

$q_1, \dots, q_m$  t.c.

Qualsiasi  $y$  soluzione eq  
scrivo come

$$y = \lambda_1 q_1 + \dots + \lambda_m q_m$$

## TEOREMA ②

Dato eq.  
diff. e coeff. costanti  
non omogenea

$$y^{(m)} + \dots + p_1 y' + p_0 y = f(x)$$

SE  $\bar{y}$  è una soluzione  
particolare dell'eq.

ALLORA : tutte le soluzioni  
sono delle forme

$$y = \bar{y} + \lambda_1 g_1 + \dots + \lambda_m g_m$$

dove  $g_1, \dots, g_m$  sono base  
delle sol. equazione omogenea.

TEOREMA ②  $\Rightarrow$  Interpretazione  
algebrica

PARENTESI di ALGEBRA LINEARE

SISTEMA LINEARE  $A \cdot X = b$

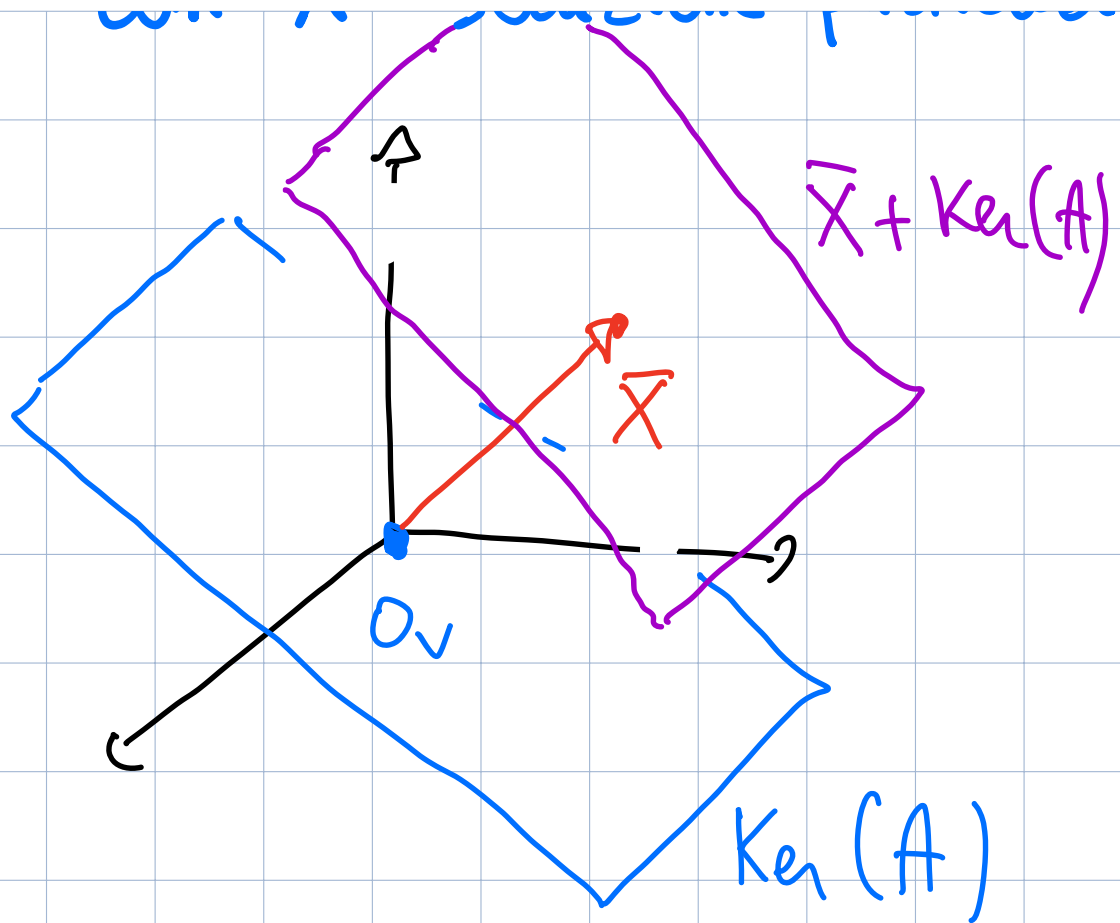
A matrice  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$  incognite

b = vettore termini  
noti

SOLUZIONI SISTEMA LINEARE:

$\overline{X} + \text{Ker}(A)$   
con  $\overline{X}$  soluzione particolare





Traslazione tramite  $\bar{x}$   
 del sottospazio  
 vettoriale  $\text{Ker}(A)$

nostro caso :

$$\bar{y} + K_{\text{er}}(F)$$

↑  
sol. particolare

↑  
 $\lambda_1 p_1 + \dots + \lambda_m p_m$   
soluzione  
eq. omogenea

---

COME determinare le sol.  
equazione omogenea:

Dato eq. diff. omogenea

$$y^{(m)} + Q_{m-1} y^{(m-1)} + \dots + Q_1 y' + Q_0 y = 0$$

ASSOCIAMO pol. caratteristico

$$\lambda^m + Q_{m-1} \lambda^{m-1} + \dots + Q_1 \lambda + Q_0 = 0$$

$y^{(m)}$  derivata  
m-ima  $\leftrightarrow \lambda^m$  potenza  
m-ima

Esempi

①.0  $y' - y = 0$

$P_{CAR}: \lambda - 1 = 0$

RADICE : 1 con mult. = 1

SOLUZIONE eq. differenziale

$$y' - y = 0 \quad \text{cioè}$$

$$y' = y$$

SOLUZIONE :  $e^x$  ←  $(e^x)' = e^x$

SOLUZIONE generale:

$$C_1 \cdot e^x \quad \text{con } C_1 \text{ costante}$$

---

1.1

$$y' - 5y = 0$$

$$P_{CAR} : \lambda - 5$$

RADICE  $5$  con  $molt=1$

SOLUZIONE eq. diff.

$$y' = 5y$$

$$\Rightarrow y = e^{5x}$$

SOLUZIONE generale

$$C_1 \cdot e^{5x}$$

5 RADICE di  $P_{CAR} \Rightarrow e^{5x}$  sol.

$$\textcircled{2} \quad y'' - 4y = 0$$

$$P_{CAR}: \quad \lambda^2 - 4 = 0$$

$$\textcircled{3} \quad y'' - 3y' + 2y = 0$$

$$P_{CAR}: \quad \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

$$\textcircled{4} \quad y''' + 5y'' + 4y = 0$$

$$P_{CAR}: \quad \lambda^3 + 5\lambda^2 + 4\lambda = 0$$

FATTO :

$$P_{CAR} = (\lambda - q_1) \cdot (\lambda - q_2)$$

$$F(y) = (y' - q_1 \text{Id}) \circ (y' - q_2 \text{Id})$$

Diagram illustrating the components of the operator  $F(y)$ :

- $y'$  is labeled "derivata prima" (first derivative).
- $\text{Id}$  is labeled "identità" (identity).
- $\circ$  is labeled "composizione di operazioni" (composition of operations).
- A double arrow  $\Uparrow$  above the expression indicates the relationship to the characteristic polynomial.

derivata seconda



compone due volte derivata prima

CIOE':  $y'' \leftrightarrow \lambda^2$

FATTO  $\Rightarrow$  Se  $y_1$  è  
soluzione di

$$y' - q_1 = 0$$

allora  $y_1$  è soluzione di

$$(y' - q_1 \text{Id}) \circ (y' - q_2 \text{Id}) = 0$$

$\parallel$

$$y'' - (q_1 + q_2)y' + q_1 q_2 y = 0$$



Esempio:  $P_{CAR} = (\lambda - 5) \cdot (\lambda + 3)$   
 $= \lambda^2 - 2\lambda - 15$

Eq. diff. associata:

$y'' - 2y' - 15y = 0$   
"

$(y' - 5y) \cdot (y' + 3y) = 0$

SOLUZIONI: sol. (A) + sol. (B)

(A):

$$y' - 5y = 0$$

$$\Leftrightarrow g_1 = e^{5x}$$

BASE  
SOL.  
di (A)

(B):

$$y' + 3y = 0$$

$$\Leftrightarrow g_2 = e^{-3x}$$

BASE  
SOL.  
di (B)

Quindi:

$$y'' - 2y' + 5y = 0$$

$\uparrow$

$$(y' - 5\text{Id}) \circ (y' + 3\text{Id}) = 0$$

$\uparrow$

$$(y' - 5y = 0) \quad + \quad (y' + 3y = 0)$$



conclusione

SOLUZIONE generale dell'eq.

$$y'' - 2y' - 15y = 0$$

è

$$c_1 \cdot e^{5x} + c_2 \cdot e^{-3x}$$

$c_1, c_2$   
costanti

5, -3 RADICI  
di PCAR



$e^{5x}, e^{-3x}$   
BASE SOLUZIONI

TEOREMA : Sia  $F(y) = 0$  eq. diff.  
 $P_{CAR}$  = pol. caratteristico associato

Se  $\lambda$  è radice di  $P_{CAR}$

allora :

$e^{\lambda x}$  è soluzione dell'eq.  
diff.  $F(y) = 0$

Esempio

$$① \quad F(y) = y'' - 4y = 0$$

$$P_{CAR}: \quad \lambda^2 - 4 = 0$$

RADICI :  $\begin{array}{l} / \quad 2 \\ \backslash \quad -2 \end{array}$

$\Rightarrow$  SOLUZIONI :  $\begin{array}{l} / \quad e^{2x} \\ \backslash \quad e^{-2x} \end{array}$

$\Rightarrow$  SOLUZIONE  
generale :  $c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x}$

con  $c_1, c_2$  costanti

---

Pb :  $P_{CAR}$  è pol. a coeff. in  $\mathbb{R}$

dobbiamo distinguere i seguenti  
casi :

1)  $P_{CAR}$  ha radici reali distinte

2)  $P_{CAR}$  ha radici reali & complesse

3)  $P_{CAR}$  ha radici multiple  
(con molteplicità  $> 1$ )

1)  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  radici reali di  
 $P_{CAR}$

$\Downarrow$

$e^{\alpha_1 x}, \dots, e^{\alpha_k x}$  sono sol.

2)

$$\text{Se } d = \underline{\gamma + i\beta} \in \mathbb{C}$$

radice complessa di  
 $P_{CAR}$

allora PROP. viste precedentemente

implica che :  $\underline{\bar{d} = \gamma - i\beta}$

è radice complessa  
di  $P_{CAR}$

$\Downarrow$

$$\underline{e^{(\gamma + i\beta)x}}$$

$$\underline{e^{(\gamma - i\beta)x}}$$

Sono soluzioni

funzioni a valori in  $\mathbb{C}$

$$\text{ma } e^{i\beta x} \stackrel{\text{def}}{=} \cos(\beta x) + i \sin(\beta x)$$

$$e^{-i\beta x} \stackrel{\text{def}}{=} \cos(-\beta x) + i \sin(-\beta x)$$

Quindi possiamo scegliere  
come base  
delle soluzioni:

$$e^{\gamma x} \cdot \cos(\beta x), \quad e^{\gamma x} \cdot \sin(\beta x)$$

CONCLUSIONE:

$$d = \gamma + i\beta$$

$$\hookrightarrow e^{\gamma x} \cdot \cos(\beta x)$$

$$\bar{d} = \gamma - i\beta$$

RADICI  
di  $P_{CAR}$

$$e^{\gamma x} \cdot \sin(\beta x)$$

Sol.  
di  
 $F(y) = 0$



SOLUZIONE generale :

$$C_1 \cdot e^{\lambda x} \cos(\beta x) + C_2 e^{\lambda x} \sin(\beta x)$$

ESEMPIO :

$$y'' + y = 0 \quad \left( \begin{array}{l} \text{eq.} \\ \text{lineare} \end{array} \right)$$

$$P_{CAR}: \lambda^2 + 1 = 0$$

$$\text{RADICI: } \begin{cases} \lambda = i = 0 + i \cdot 1 \\ \bar{\lambda} = -i = 0 - i \cdot 1 \end{cases}$$

$$\text{SOLUZIONI: } \begin{cases} \cos(x) \\ \sin(x) \end{cases} \quad \text{BASE}$$

SPIEGAZIONE :

$$e^{i\beta x} = \cos(\beta x) + i \sin(\beta x)$$

$$e^{-i\beta x} = \cos(-\beta x) + i \sin(-\beta x)$$

$$= \cos(\beta x) - i \sin(\beta x)$$

$\Downarrow$

$$e^{i\beta x} + e^{-i\beta x} = 2 \cdot \cos(\beta x)$$

$$e^{i\beta x} - e^{-i\beta x} = 2i \cdot \sin(\beta x)$$

Quindi : combinazione lineare

di  $e^{i\beta x}, e^{-i\beta x} \iff$  comb. lineare  $\cos(\beta x), \sin(\beta x)$

Soluzione

generale :  $C_1 \cdot \cos(x) + C_2 \cdot \sin(x)$

---

3) Se  $\lambda$  è radice di  $P_{CAR}$   
con mult.  $\geq 2$

cioè :  $P_{CAR} : (\lambda - \lambda)^K \cdot P_1(\lambda)$

$K = \text{molteplicità di } \lambda$

$\Rightarrow$  SOLUZIONI :

$e^{\lambda x}, x \cdot e^{\lambda x}, x^2 \cdot e^{\lambda x}, \dots, x^{K-1} \cdot e^{\lambda x}$

ESEMPIO.

$$y'' = 0$$

$$P_{CAR}: \lambda^2 = 0$$

RADICE: 0 con mult = 2

BASE  
SOLUZIONI:  $e^{\theta \cdot x}$ ,  $x \cdot e^{\theta x}$

$$e^{\theta x} = 1$$

soluzione generale:

$$c_1 \cdot e^{\theta x} + c_2 x e^{\theta x} = \underline{c_1 + c_2 x}$$

## Esempio riassuntivo

$$F(y) = y^{(4)} - 2y^{(3)} + 2y^{(2)} - 2y' + y = 0$$

$$P_{CAR}: \lambda^4 - 2\lambda^3 + 2\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$$

//  
 $\lambda^2 + \lambda^2$

$$(\lambda^4 - 2\lambda^3 + \lambda^2) + (\lambda^2 - 2\lambda + 1) = 0$$

$$\lambda^2 (\lambda^2 - 2\lambda + 1) + (\lambda^2 - 2\lambda + 1) = 0$$

$$(\lambda^2 - 2\lambda + 1) \cdot (\lambda^2 + 1) = 0$$

$$(\lambda - 1)^2 \cdot (\lambda^2 + 1) = 0$$

$$= (\lambda - 1)^2 \cdot (\lambda^2 + 1)$$

$(\lambda - 1)$  divide 2 volte per  $\lambda$

RADICI:  $\left\{ \begin{array}{l} 1 \\ i \\ -i \end{array} \right.$  con mult. = 2

1 con mult. = 2  $\rightarrow$   $\boxed{e^{1x}}, \boxed{x e^{1x}}$

$$\boxed{i, -i} \rightarrow \boxed{\cos x}, \boxed{\sin x}$$

$$i = 0 + 1 \cdot i \rightarrow e^{(0+1i)x} = \cos(x) + i \sin(x)$$

SOLUZIONE GENERALE:

$$c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 \cos(x) + c_4 \sin(x)$$

con  $c_1, c_2, c_3, c_4$  costanti

Equazione differenziale omogenea  
di ordine 4  $\Rightarrow$

Le soluzioni costituiscono  
uno spazio vettoriale di  
dimensione = 4

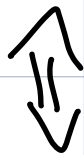
N.B.  $d = 2 + 3i$  RADICE  
(Esempio) di PCAR

ALLORA:  $\bar{d} = 2 - 3i$   $\bar{e}$   
e due volte  
radice

$\Rightarrow$  SOLUZIONI:  $e^2 \cdot \cos(3x)$   
 $e^2 \cdot \sin(3x)$



ESPLICITAZIONE  
COSTANTI



imporre condizioni  
iniziali

Esempi.

$$\textcircled{1} \quad \begin{cases} y' - 5y = 0 \\ y(0) = 25 \end{cases}$$

sol. generale  $y' - 5y = 0$

$$\hookrightarrow \lambda - 5 = 0$$

5 RADICE

SOL. GENERALE :  $c_1 \cdot e^{5x}$

$c_1$  costante da determiniamo  
con la condizione iniziale

$$y(0) = c_1 \cdot e^{5 \cdot 0} = 25$$

$$\Rightarrow c_1 = 25$$

cioè : soluzione del problema

di Cauchy

$$\begin{cases} y' - 5y = 0 \\ y(0) = 25 \end{cases}$$

e

$$y = 25 \cdot e^{5x}$$

$$\textcircled{2} \quad \begin{cases} y'' - y = 0 \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

$$y'' - y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad p_{\text{CAR}}(\lambda): \lambda^2 - 1$$

$$\text{RADICI: } \lambda = \begin{matrix} 1 \\ -1 \end{matrix}$$

$$\text{BASE SOLUZIONI: } e^x, e^{-x}$$

SOLUZIONE GENERALE

$$c_1 \cdot e^x + c_2 \cdot e^{-x}$$

$$\text{CONDIZIONI INIZIALI: } \begin{cases} y(0) = 2 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

$$y(0) = c_1 \cdot e^0 + c_2 \cdot e^{-0} = 2$$

$$y'(0) = c_1 \cdot e^0 - c_2 \cdot e^{-0} = 1$$

$$\text{cioè: } \begin{cases} c_1 + c_2 = 2 \\ c_1 - c_2 = 1 \end{cases}$$

$$\underline{\text{Sol.}} \quad c_1 = \frac{3}{2}$$

$$c_2 = \frac{1}{2}$$

$$\text{Soluzione finale} \quad y = \frac{3}{2} e^x + \frac{1}{2} e^{-x}$$