

EQUAZIONI DIFFERENZIALI

La matematica del CORONAVIRUS

Vogliamo studiare
la funzione

$y(t)$ = numero di
persone infette
(decedute)

al valore
di t = TEMPO

MODELLO 1:

In un intervallo
di tempo δt
la percentuale
di nuove persone
infette $\bar{e} =$
 $\alpha \cdot \delta t$
 α costante

$\Rightarrow$ EQUAZIONE

$$y(t + \delta t) = y(t) + (\alpha \cdot \delta t) \cdot y(t)$$

eq. ^{nte}

(dividiamo per δt)

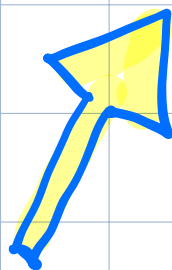
$$\frac{y(t + \delta t) - y(t)}{\delta t} = \alpha \cdot y(t)$$

- Approssimiamo $y(t)$ con una funzione derivabile
- FACCIAMO Lim dell'equez.
per $\delta t \rightarrow 0$

OTTENIAMO: DERIVATA di $y = \frac{dy}{dt} = y'$

$$(1) \quad \frac{dy}{dt} = d \cdot y$$

con $y = y(t)$
 d costante



equazione differenziale del
primo ordine

COME SI RISOLVE ?

Idea : separare le
variabile

←
a sinistra
poniamo y

→
a destra
poniamo t

$$(1) \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = dt$$

Integriamo a sinistra
e a destra

$$\int \frac{dy}{y} = \int dt$$

$$\Rightarrow \ln(y) = d \cdot t + c$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow y &= e^{d \cdot t + c} \\ &= C_1 \cdot e^{d \cdot t} \end{aligned}$$

con C_1 costante

C_1 la possiamo determinare
conoscendo il valore
 $y(0)$ cioè per $t = 0$

$$y(0) = C_1 \cdot e^{d \cdot 0} = C_1$$

Riassumendo :

L'equazione differenziale

$$y' = \alpha y$$

ha soluzione $y = c_1 \cdot e^{\alpha t}$
 c_1 costante

Il sistema (problema di Cauchy)

$$\begin{cases} y' = \alpha y \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

ha soluzione

$$y = y_0 \cdot e^{\alpha t}$$

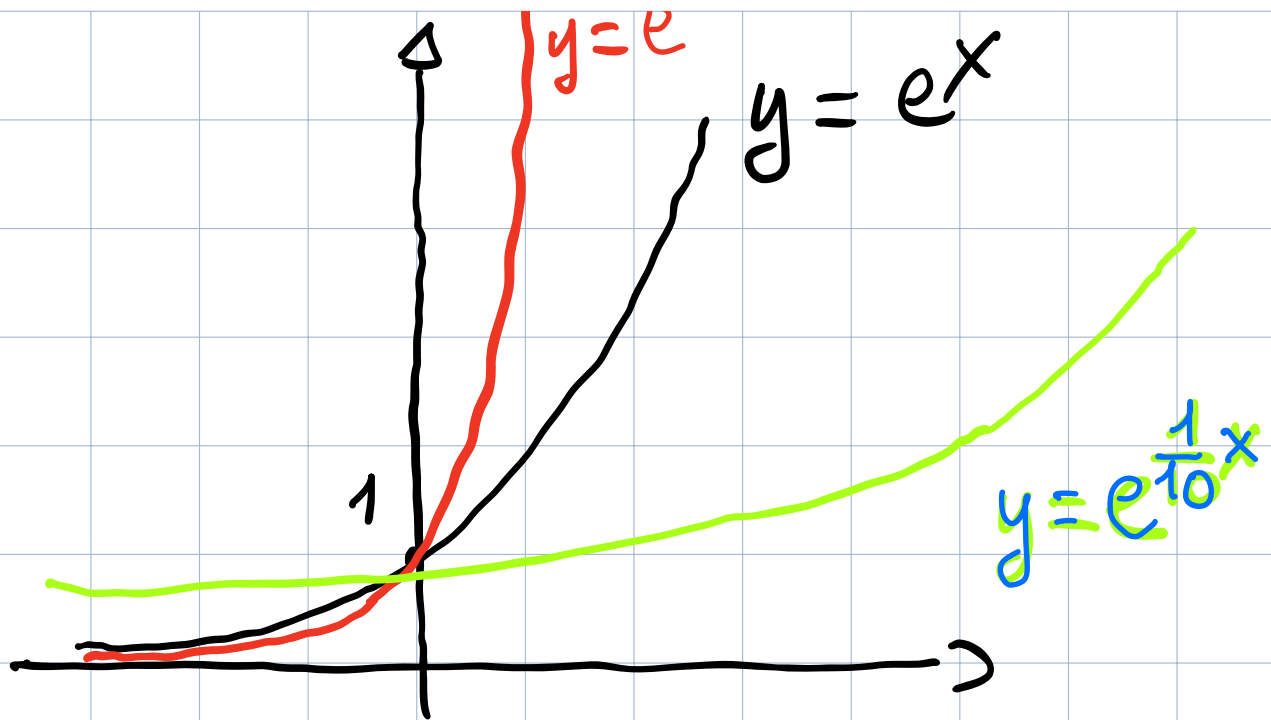
C_1 = numero persone infette
al momento 0

λ = indice di diffusione
 $\sim R_0$ sui giornali

$$y(t) = C_1 \cdot e^{\lambda t}$$

OSS. Al variare di λ il
grafico cambia
drasticamente

1 2x



MODELLO (2): Supponiamo che
 il coeff. α
 (di contagiosità)
 diminuisca con
 il passare del tempo

α = percentuale
 nuovi
 contagi

$$\alpha = \alpha_0 - \alpha_1 y(t)$$

α diminuisce
 al variare
 del

$d_0 = \text{percentuale dei guariti}$ tempo

$d_0 > 0$ & $d_1 > 0$

$y = y(t)$ numero infetti

In analogia con modello (1)

$$\begin{aligned} y(t + \delta t) &= y(t) + (d \cdot \delta t) y(t) = \\ &= y(t) + [d_0 - d_1 y] \cdot \delta t \cdot y(t) \end{aligned}$$

eq. mte

dividiamo per δt

$$\frac{y(t + \delta t) - y(t)}{\delta t} = [d_0 - d_1 y(t)] \cdot y(t)$$

Possendo a lim :
(consideriamo y funzione derivabile): $\delta t \rightarrow 0$

$$(2) \quad \frac{dy}{dt} = d_0 \cdot y(t) - d_1 y^2(t)$$

$$\text{Poniamo } \beta_1 = \frac{d_1}{d_0} > 0$$

Riscriviamo parte destra:

$$d_0 y(t) - d_1 y^2(t) = d_0 \cdot y (1 - \beta_1 y)$$

$$(2) \Leftrightarrow \frac{dy}{y(1 - \beta_1 y)} = d_0 dt$$

no separo le variabili

Come nell'equazione (1)
integriamo:

$$\int \frac{dy}{y(1-\beta_1 y)} = \int q_0 dt$$

$$\frac{1}{y \cdot (1 - \beta_1 y)} = \frac{1}{y} + \frac{\beta_1}{1 - \beta_1 y}$$

Poiché cerco A, B costanti

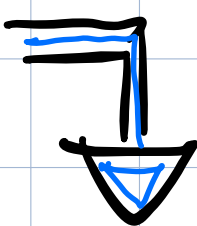
$$\text{E.c.} \quad \frac{A}{y} + \frac{B}{1 - \beta_1 y} = \frac{1}{y(1 - \beta_1 y)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{A \cdot (1 - \beta_1 y) + B y}{y(1 - \beta_1 y)} = \frac{1}{y(1 - \beta_1 y)}$$

$$\Rightarrow A \cdot 1 + (-A \cdot \beta_1 + B)y = 1$$

$$\begin{cases} A \cdot 1 = 1 & A = 1 \\ -A \cdot \beta_1 + B = 0 & B = \beta_1 \end{cases}$$

$$\int \frac{dy}{y(1 - \beta_1 y)} = \int \frac{dy}{y} + \int \frac{\beta_1}{1 - \beta_1 y} dy$$

$$\frac{P_1}{1-P_1 y} = - \frac{-P_1}{1-P_1 y}$$


$$\int = \ln(y) - \ln(1-P_1 y)$$

$$= \ln\left(\frac{y}{1-P_1 y}\right)$$

↳ letto
sinistro eq.

• letto destro eq.: $20 \cdot t + c$

CONCLUSIONE:

Integrale dell'equazione

differentiale e^-

$$\ln\left(\frac{y}{1-\beta_1 y}\right) = d_0 t + C$$

exp:

$$\frac{y}{1-\beta_1 y} = C_1 \cdot e^{d_0 t}$$

$C_1 =$
costante
che dipende
da $y(0)$

$$\ln\left(\frac{y}{1-\beta_1 y}\right) = d_0 t + C$$

$$\frac{y}{1-\beta_1 y} = C_1 \cdot e^{d_0 t}$$

Ipotesi:

$$d > 0$$



$$1 - \beta_1 y > 0$$

$$y = c_1 \cdot e^{\dot{a}t} (1 - \beta_1 y)$$

$$y + c_1 \cdot e^{\dot{a}t} \cdot \beta_1 y = c_1 e^{\dot{a}t}$$

CONCLUSIONE:

soluzione dell'eq.
differenziale (2) e

$$y = \frac{c_1 \cdot e^{\dot{a}t}}{1 + c_1 \cdot \beta_1 \cdot e^{\dot{a}t}}$$

DOVE c_1 costante che dipende
da $y(0)$

d_0, d_1 costanti che determinano d

$$\beta_1 = \frac{d_1}{d_0}$$

$$d = d_0 - d_1 t$$

grafico di $y = ?$

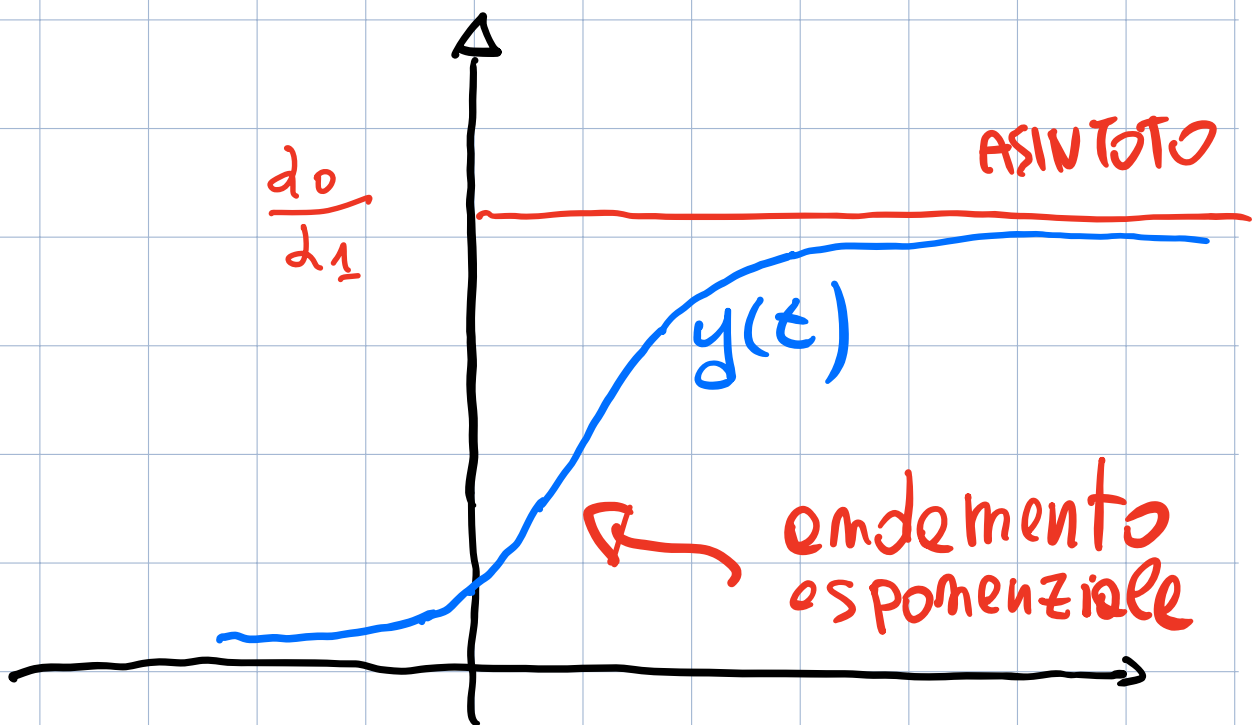
oss: per t "piccolo"

$$1 \leq 1 + c_1 \beta_1 e^{d_0 t} \leq \text{costante } K$$

$$\Rightarrow y \sim \frac{c_1 \cdot e^{d_0 t}}{K}$$

per t
piccolo

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \frac{1}{\beta_1} = \frac{d_0}{d_1}$$



Provete a vedere grafico di:

$$y = \frac{5 \cdot e^t}{1 + \frac{1}{2}e^t}$$

$$y = \frac{e^t}{1 + e^t}$$

$$y = \frac{e^t}{1+2e^t}$$

$$y = \frac{5e^t}{1+e^t}$$

oss: Questo modello
si adatta di più
a contare il
numero dei deceduti

MODELLO ③: modello
SIR

introdotta da epidemiologi nel '900

$S = S(t)$ = suscettibili

$I = I(t)$ = infettivi

$R = R(t)$ = rimossi
(morti + guariti)

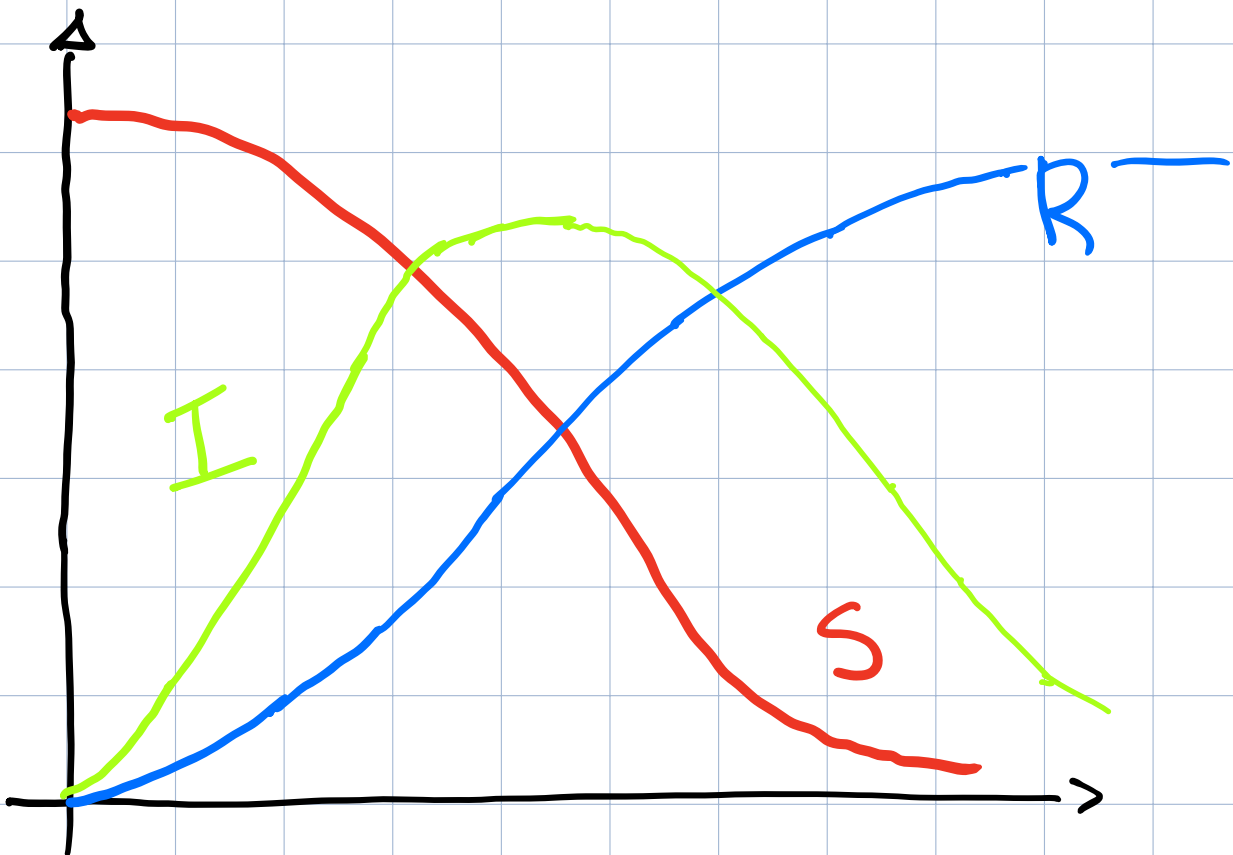
Equazioni:

$$\left\{ \begin{array}{l} S + I + R = \text{tutta la popolazione} \\ \frac{dR}{dt} = \beta \cdot I \\ \frac{dI}{dt} = d \cdot S \cdot I - \beta I \end{array} \right.$$

$$\left(\frac{dS}{dt} = -d \cdot S \cdot I \right.$$

Sistemi di equazioni
differenziali lineari

SOLUZIONE grafica:

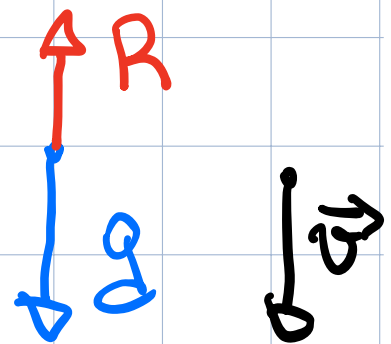


ALTRI esempi di eq. differenziali

- ① velocità di caduta di
un grave in presenza
di attrito

y = velocità di caduta

Forze che
agiscono



R = resistenza dell'aria

g = forza di gravitazione

MODELLO :

Resistenza $R = -b \cdot y$



$y = \text{velocità}$
 $y' = \text{accelerazione}$

equazione

$$F = m \cdot a$$

$$y' = g - \frac{b}{m} y$$

//
accelerazione

SOLUZIONE :

$$\frac{y'}{g - \frac{b}{m} y} = 1$$

Scrivendo $y' = \frac{dy}{dt}$

otteniamo

$$\frac{dy}{Q - \frac{b}{m}y} = dt$$

Integrando:

$$\int_{y_0}^y \frac{dy}{Q - \frac{b}{m}y} = \int_0^t dt$$

SOLUZIONE:

$$\ln \left(\frac{g - \frac{b}{m} y}{g - \frac{b}{m} y_0} \right) = -\frac{b}{m} t$$

$\} \rightarrow$

$$y = \frac{m}{b} g - \left(\frac{m}{b} g - y_0 \right) e^{-\frac{b}{m} t}$$

