SERIE numeriche

DEF. Data una successione

$$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$$

la serie associata ad essa è la successione

$$S_K = \sum_{n=0}^{K} a_n$$

CIOE': Successione:

$a_0, a_1, a_2, \dots . a_K$

$\Rightarrow$ Serie associata

$$s_0 = a_0$$
$$s_1 = a_0 + a_1$$
$$s_2 = a_0 + a_1 + a_2$$
$$\vdots$$
$$s_k = a_0 + a_1 + \ldots + a_k$$
$$= \sum_{n=0}^{k} a_n$$

s_k è una nuova successione

Pb: ammette limite?

Se $\exists$ è finito?

NOTAZIONE:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{K \to +\infty} S_K$$

CASO FONDAMENTALE:

Se $a_n \geq 0 \quad \forall n$

allora S_K è ~~debolmente~~ crescente

debolmente

$$\Rightarrow \exists \lim_{K \to +\infty} S_K$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} e_n = \begin{cases} \nearrow +\infty \\ \searrow L \in \mathbb{R} \end{cases}$$

se $\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} e_n = +\infty \quad \text{si dice} \quad \text{SERIE DIVERGENTE}}$

se $\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} e_n = L \in \mathbb{R} \quad \text{si dice} \quad \text{SERIE CONVERGENTE}}$

CONFRONTO TRA SERIE e INTEGRALI impropri

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Supponiamo
- f decrescente
- f integrabile in $[0, n]$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Consideriamo la successione

$$a_n = f(n) \qquad n \in \mathbb{N}$$

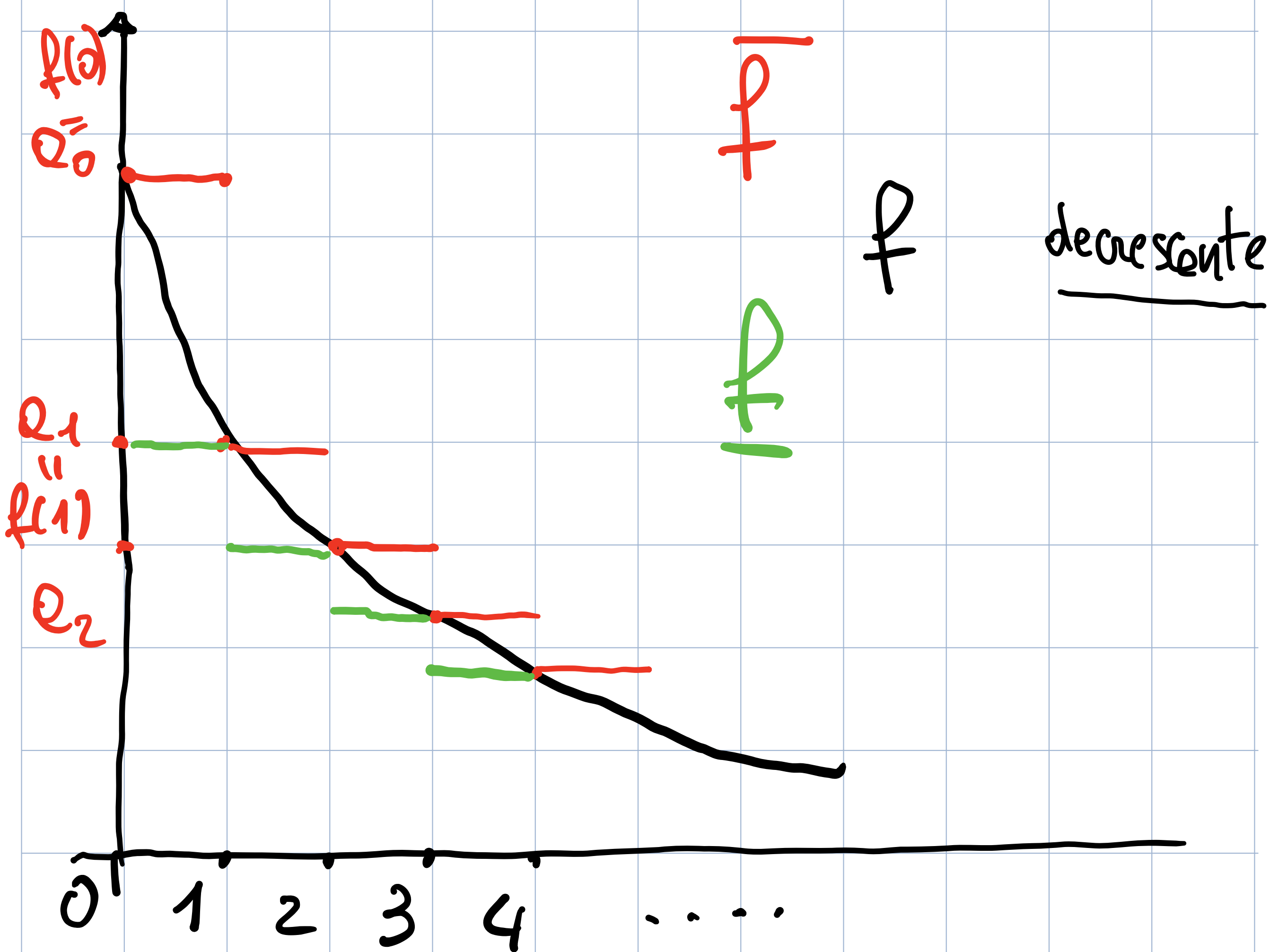
CIOE': $a_0 = f(0)$, $a_1 = f(1)$
$a_2 = f(2)$
ecc...

esempio: $f(x) = \frac{1}{x}$
$\Rightarrow a_n = \frac{1}{n}$

Introduciamo due funzioni ausiliarie

- $\overline{f}(x) = f(n) = a_n$ se $x \in [n, n+1)$

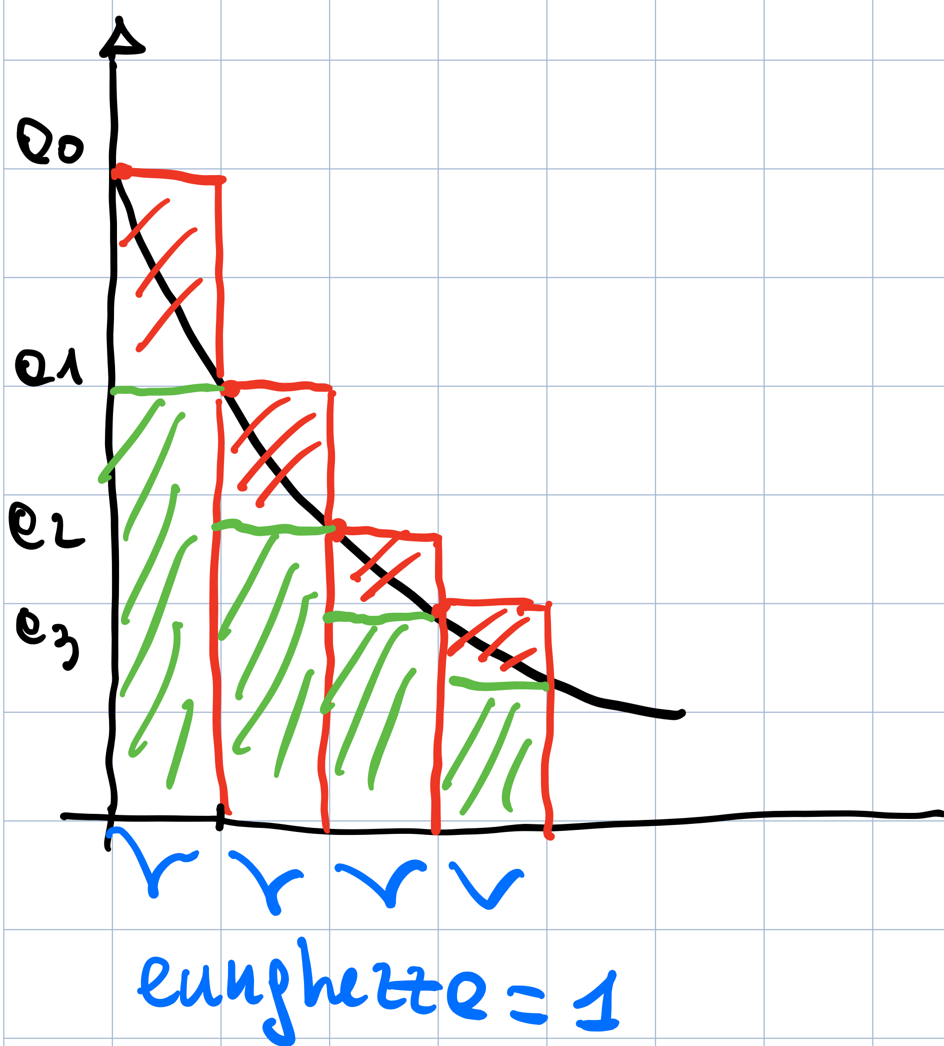
- $\underline{f}(x) = f(n+1) = a_{n+1}$ se $x \in [n, n+1)$



Per costruzione: $\underline{f}(x) \le f(x) \le \overline{f}(x)$

Perché f è decrescente

Integrali:



$$S_K = \sum_{n=0}^{K} a_n$$

$$= \int_0^{K+1} \bar{f}(x)\,dx$$

Ma f decrescente $\Rightarrow$ per costruzione

$$S_K = a_0 + \int_0^{K+1} \underline{f}(x)\,dx$$

CRITERIO del confronto per integrali :

$$\underline{f}(x) \leq f(x) \leq \bar{f}(x)$$

& $$\int \bar{f}(x) = a_0 + \int \underline{f}(x)$$

QUINDI:

$$\boxed{\begin{gathered} \int_0^{+\infty} f(x)\,dx \text{ converge} \\ \Updownarrow \\ \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \text{ converge} \\ \text{dove } a_n = f(n) \end{gathered}}$$

Poiché $\sum e_n = \int \overline{f}(x)\,dx$

$= e_0 + \int \underline{f}(x)\,dx$

$\boxed{\text{OSS}}$ Possiamo applicare criterio per f def.$^{\text{nte}}$ decrescente

cioè: $\exists\ x_0 \in \mathbb{R}^+$ t.c.

$\forall\ x \geq x_0$ $f(x)$ è decrescente

$$\int_0^K = \int_0^{x_0} + \int_{x_0}^K$$

$$\sum_{n=0}^{K} = \sum_{n=0}^{[x_0]+1} + \sum_{[x_0]+2}^{K}$$

ESEMPI :

Serie armonica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \quad \text{DIVERGE}$$

Poiché $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx$ diverge

serie armonica generalizzata

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$

DIVERGE $\forall \alpha \leq 1$

CONVERGE $\forall \alpha > 1$

In generale:

$$S_K = \sum_{n=0}^{K} a_n$$

Supponiamo che la serie converga OVVERO

$$\exists \lim_{k\to\infty} S_k = L \in \mathbb{R}$$

notazione: $\displaystyle \sum_{n=0}^{\infty} a_n = L$

cosa possiamo dire di

$$\lim_{n\to\infty} a_n = ?$$

PROP. $\displaystyle \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ CONVERGE

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n = 0}$$

DIM. $S_K = \sum_{n=0}^{K} a_n$

$$S_K - S_{K-1} = a_K$$

$$\lim_{K\to\infty} \underbrace{(S_K - S_{K-1})}_{\substack{\shortparallel \\ a_K}} = L - L = 0$$

$\square$

CIOE':

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

è condizione necessaria

per la convergenza della serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

ATTENZIONE: non è condizione sufficiente

Esempio:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$$

MA

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

SERIE GEOMETRICA

LEMMA algebrico:

$$1-b^{n+1}=(1-b)\cdot\left(1+b+b^2+\dots+b^n\right)$$

ad esempio:

$$1-b^2=(1-b)(1+b)$$
$$1-b^3=(1-b)(1+b+b^2)$$

Lemma $\Rightarrow$ se $b\neq 1$

$$1+b+b^2+\dots+b^k=\frac{1-b^{k+1}}{1-b}$$

CIOÈ: Sia $b>0$, $b\neq 1$

Data $\{e_n\}$

$$e_n = b^n$$

La serie $$S_K = \sum_{n=0}^{K} b^n$$

$$= \frac{1-b^{K+1}}{1-b}$$

n.b. $b<1$: $b^{K+1} \longrightarrow 0$

$$\lim_{K\to\infty} S_K = \sum_{n=0}^{\infty} b^n$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{1-b^{k+1}}{1-b} = \frac{1}{1-b}$$

Se $b>1$: $b^k \longrightarrow +\infty$

Se $b=1$: $b^n = 1 \quad \forall n$

$\Rightarrow \quad a_n = 1 \quad \forall n$

$$S_k = \sum_{n=0}^{k} 1^n = \sum_{n=0}^{k} 1 = k \to +\infty$$

conseguenza:

PROP. Sia $a_n = b^n$ con $0<b$

ALLORA:

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} b^n \text{ CONVERGE} \iff b<1}$$

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} b^n \text{ DIVERGE} \iff b \geq 1}$$

DIM.

$$S_k = \sum_{n=0}^{k} b^n = \frac{1-b^{k+1}}{1-b}$$

$$\lim_{k\to\infty} b^{k+1} = \begin{cases} \to 0 & \text{se } b<1 \\ \to +\infty & \text{se } b>1 \end{cases}$$

Quindi se $b > 1 \Rightarrow \sum = +\infty$

se $b < 1 \Rightarrow \sum b^n = \frac{1}{1-b}$

Poichè

$\sum = \frac{1-b^{k+1}}{1-b}$ $\Rightarrow$ tende a 0

Se $b = 1$ $\qquad a_n = b^n = 1 \quad \forall n$

$\Rightarrow \quad S_k = 1 + k$

$\Rightarrow \quad \sum 1^n = \sum 1$ DIVERGE

$\square$

$n \qquad \infty$

$a_n = b^n \rightarrow \sum_{n=0} b^n$

RAPPORTO $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{b^{n+1}}{b^n} = b$

RADICE n-ime : $\sqrt[n]{b^n} = b$

$\Rightarrow$ CRITERI di convergenza per serie a termini positivi

CRITERIO del RAPPORTO:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = b$$

ALLORA:

$$\begin{cases} \underline{b<1} \Rightarrow \sum a_n \text{ converge} \\ b=1 \Rightarrow \text{non si può dire niente} \\ \underline{b>1} \Rightarrow \sum a_n \text{ DIVERGE} \end{cases}$$

CRITERIO della RADICE

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_n} = b$$

allora:

$$\begin{cases} b < 1 \Rightarrow \sum a_n \text{ converge} \\ b = 1 \Rightarrow \text{non si può dire niente} \\ b > 1 \Rightarrow \sum a_n \text{ DIVERGE} \end{cases}$$

ALTRI CRITERI:

CRITERIO confronto

$$0 \le a_n \le b_n \quad \forall n$$

$\sum a_n$ DIVERGE $\Rightarrow \sum b_n$ DIVERGE

$\sum b_n$ CONVERGE $\Rightarrow \sum a_n$ CONVERGE

CRITERIO del QUOZIENTE

Date 2 successioni

$$\{a_n\} \quad , \{b_n\}$$

se $\exists$ finito e non nullo

$$\boxed{\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = \beta \qquad \beta \neq 0, +\infty}$$

ALLORA:

$\sum a_n$ CONVERGE $\Leftrightarrow$ $\sum b_n$ converge

$\sum a_n$ DIVERGE $\Leftrightarrow$ $\sum b_n$ DIVERGE

come COROLLARIO abbiamo

CRITERIO dell'ORDINE di INFINITESIMO

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)} = \beta$$

$$\beta \neq 0, +\infty$$

ALLORA:

$\alpha \leq 1 \Rightarrow \sum a_n$ DIVERGE

$\alpha > 1 \Rightarrow \sum a_n$ CONVERGE

Esempi

(1) $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n^2+2} \quad \text{DIVERGE}$$

Poiché

$$\frac{n+1}{n^2+2} \sim \frac{1}{n}$$

CIOE':

$$\frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n^2\left(1+\frac{2}{n^2}\right)} \sim \frac{1}{n}$$

$$= \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

equiv.$^{\text{nte}}$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n+1}{n^2+2}}{\frac{1}{n}} = 1$$

$1 \neq 0, +\infty$

$\sum \frac{1}{n}$ diverge $\Rightarrow \sum \frac{n+1}{n^2+2}$ diverge

2 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$ converge

Perché $\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

$$\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right) \sim \frac{1}{n^2}$$

eq.$^{\text{nte}}$: $$\lim_{n\to\infty} \boxed{\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}{\frac{1}{n^2}}} = 1$$

$\frac{1}{n^2} \neq 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ converge}$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right) \text{ converge}$$

Taylor: $\ln(1+t) = t + o(t)$

in $\underline{t=0}$

$\ln(1+t) \sim t$

NOSTRO CASO: $\boxed{t = \frac{1}{n^2}}$

$t \to 0 \iff \frac{1}{n^2} \to 0$

$\iff n^2 \to +\infty$

③ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$ DIVERGE

Poiché $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = \frac{1}{1} = 1$

Pertanto $\lim_{n\to\infty} a_n = 1 \neq 0$

non è verificata la condizione necessaria

$\Rightarrow \sum$ DIVERGE

④ $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n + 5n^2}{3^n + 6n}$$

Idea: $a_n = \dfrac{2^n + 5n^2}{3^n + 6n} \sim \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$

CRITERIO RADICE:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2^n + 5n^2}{3^n + 6n}} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{2^n \cdot \left(1 + \frac{5n^2}{2^n}\right)}}{\sqrt[n]{3^n \cdot \left(1 + \frac{6n}{3^n}\right)}} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2\cdot\sqrt[n]{1+\frac{5n^2}{2^n}}}{3\cdot\sqrt[n]{1+\frac{6n}{3^n}}} = \frac{2}{3}$$

$\frac{5n^2}{2^n} \to 0$, $\frac{6n}{3^n} \to 0$

$$\frac{2}{3} < 1 \Rightarrow \text{Serie converge}$$

5) $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2+(-1)^n}{2^n}$$

$$\frac{1}{2^n} \leq \frac{2+(-1)^n}{2^n} \leq \frac{3}{2^n}$$

$$\sum \frac{3}{2^n} = 3 \cdot \sum \frac{1}{2^n}$$

$$\sum \frac{1}{2^n} \quad \text{CONVERGE}$$

$$\boxed{= \sum \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad \text{base } b < 1}$$

$\Rightarrow$

$$\sum \frac{1}{2^n} \leq \sum \frac{2+(-1)^n}{2^n} \leq \sum \frac{3}{2^n}$$

$\Rightarrow$ converge

$\Rightarrow \sum$ CONVERGE

⑥ $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+\sqrt{n}}{(n+1)^3}$$ converge

$$a_n = \frac{1+\sqrt{n}}{(n+1)^3}$$

numeratore $\to \infty$
come $n^{\frac{1}{2}}$

denominatore $\to \infty$
come n^3

OVVERO:

$$a_n \sim \frac{1}{n^{3-\frac{1}{2}}}$$

$$e_n \sim \frac{1}{n^{\frac{5}{2}}}$$

Poiché:

$$e_n = \frac{\sqrt{n}\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{n^3\cdot\left(1+\frac{3n^2}{n^3}+\frac{3n}{n^3}+\frac{1}{n^3}\right)}$$

CRITERIO del quoziente

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1+\sqrt{n}}{(n+1)^3}}{\frac{1}{n^{5/2}}} = \underline{1}$$

$\neq 0, +\infty$

Quindi $\sum \frac{1+\sqrt{n}}{(n+1)^3} \sim$

$\sim \sum \frac{1}{n^{5/2}}$

$\frac{5}{2} > 1 \Rightarrow$ SERIE converge

7 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{\frac{1}{n}}-1}{n}$ converge

perché $e^{\frac{1}{n}} - 1 \sim \frac{1}{n}$

Quindi

$$e_n = \frac{e^{\frac{1}{n}} - 1}{n} \sim \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}$$

$$= \frac{1}{n^2}$$

equiv.^{nte}

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\frac{e^{\frac{1}{n}} - 1}{n}}{\frac{1}{n^2}} =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{e^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} = 1 \neq 0, +\infty$$

$\sum \frac{1}{n^2}$ converge $\Rightarrow$

$$\sum \frac{e^{\frac{1}{n}}-1}{n} \quad \text{converge}$$