

2^{ndo} compito

30/5/2022

ore 14:00

AVLA

F 6

n.b.: obbligatoria l'iscrizione

Sono ammessi coloro

che hanno superato il

1° compito

MARCO FRANCIOSI

ricevimento: Lunedì 14:30
su Teams

Integrali impropri

VISTO : $\int_D f(x) dx$

D intervallo (dominio) LIMITATO

$f(x)$ funzione limitata



$$\sup \{ f(x) : x \in D \} < +\infty$$

$$\inf \{ f(x) : x \in D \} > -\infty$$

VOGLIAMO generalizzare

la nozione di integrale

e : $\rightarrow$

Intervalli LIMITATI
(domini)



funzioni ILIMITATE

Integrali impropri

- Domínio illimitato

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx \stackrel{\text{definizione}}{=} \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx$$

similmente

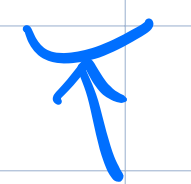
$$\int_{-\infty}^b f(x) dx \stackrel{\text{definizione}}{=} \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = ? \quad \text{Per definizione}$$

ε

$$\int_{-\infty}^a$$


+

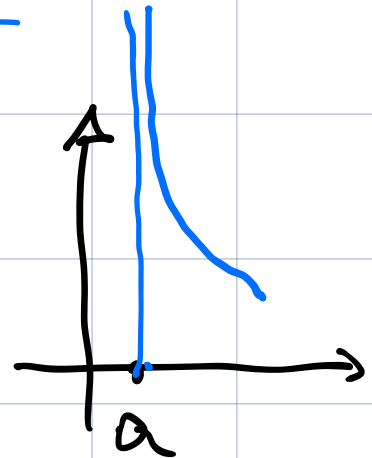
$$\int_a^{+\infty}$$


con $a \in \mathbb{R}$
fissato

devono esistere entrambi

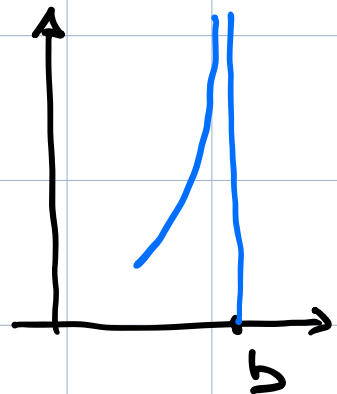
• funzione illimitata

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm \infty$$



oppure

$$\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \pm \infty$$



- Se $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$

$$\int_a^b f(x) dx \doteq \lim_{d \rightarrow a^+} \int_d^b f(x) dx$$

SE $\int$ esiste ed è finito

(CIOE' IL LIMITE ESISTE)

allora si dice che l'integrale
è CONVERGENTE

CRITERI DI CONVERGENZA

criterio confronto

$$0 \leq f(x) \leq g(x) \quad \forall x$$

$$\text{ALLORA: } 0 \leq \int f \leq \int g$$

QUINDI: ① $\int f$ DIVERGE ($=+\infty$)

$\Downarrow$

$\int g$ DIVERGE ($=+\infty$)

② $\int g$ CONVERGE ($\int g < +\infty$)

$\Downarrow$

$\int f$ converge

Teorema confronto asintotico

① f, g funzioni integrabili
 f, g definitivamente ≥ 0

Supponiamo: $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow b^-} g(x) = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = L \neq 0, +\infty$$

ALLORA:

$$\int_a^b f(x) dx \text{ CONVERGE} \Leftrightarrow \int_a^b g(x) dx \text{ converge}$$

Analogamente:

$$\text{se } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = l \neq 0, +\infty$$

else $\int f \text{ conv.} \Leftrightarrow \int g \text{ conv.}$

② f, g funzioni integrabili
 f, g definitivamente ≥ 0

$$\text{Supponiamo } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = l \neq 0, +\infty$$

ALLORA:

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx \text{ converge} \Leftrightarrow \int_a^{+\infty} g(x) dx \text{ converge}$$

n.b. proprietà vale
definitivamente
 $\Updownarrow$

$$\exists x_0 \text{ t.c. } \forall x > x_0$$

vale proprietà

Esempi di riferimento:

1.) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^d} dx$ converge $\Leftrightarrow d > 1$
 diverge $\Leftrightarrow d \leq 1$

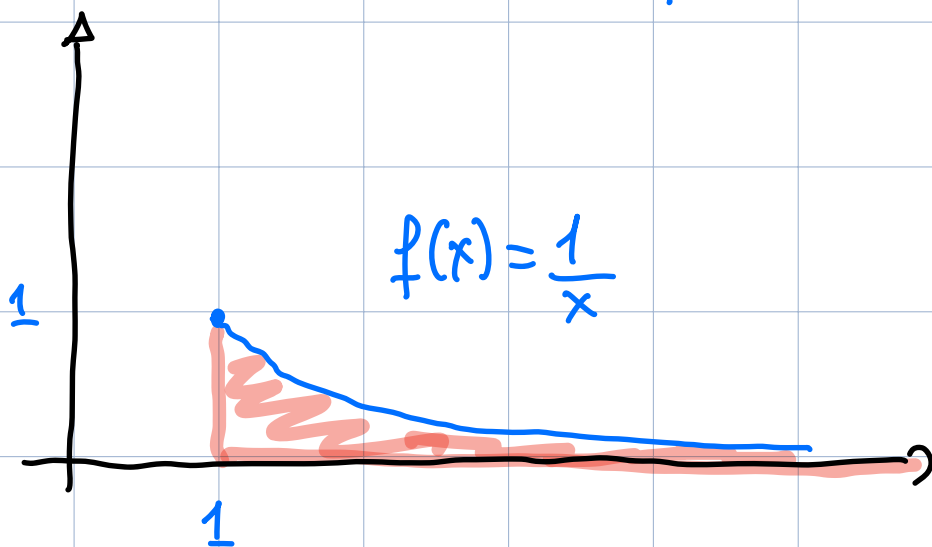
2.) $\int_0^1 \frac{1}{x^d} dx$ converge $\Leftrightarrow d < 1$
 diverge $\Leftrightarrow d \geq 1$

oss. $a=1$ o $b=1$ è puramente
 indicativo

$\int_0^{1/10} \frac{1}{x} dx$ diverge

$\int_{1.000}^{+\infty} \frac{1}{x} dx$ diverge

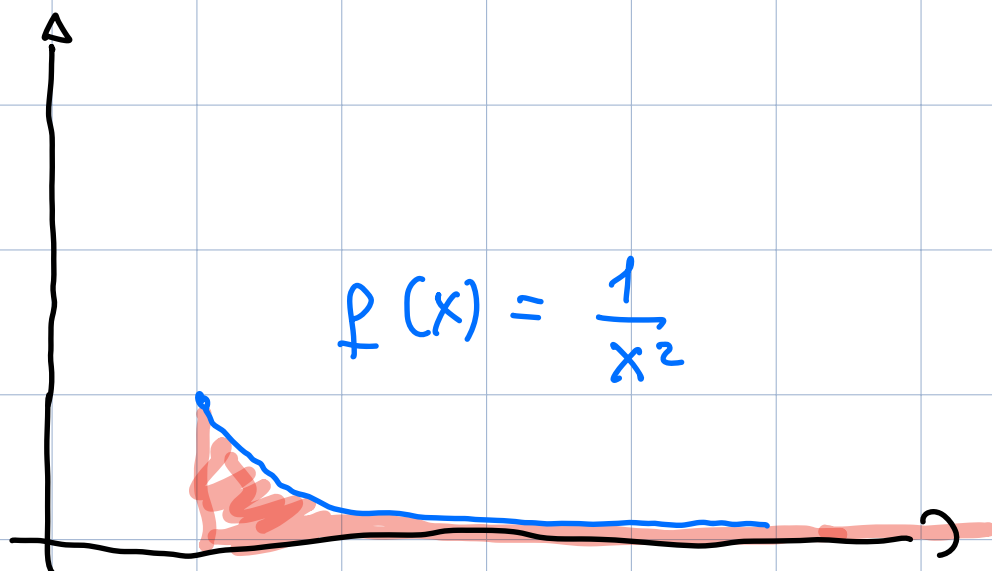
Esempi



$$\int_1^b \frac{1}{x} dx = \left[\ln(x) \right]_1^b = \ln(b)$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{1}{x} dx =$$

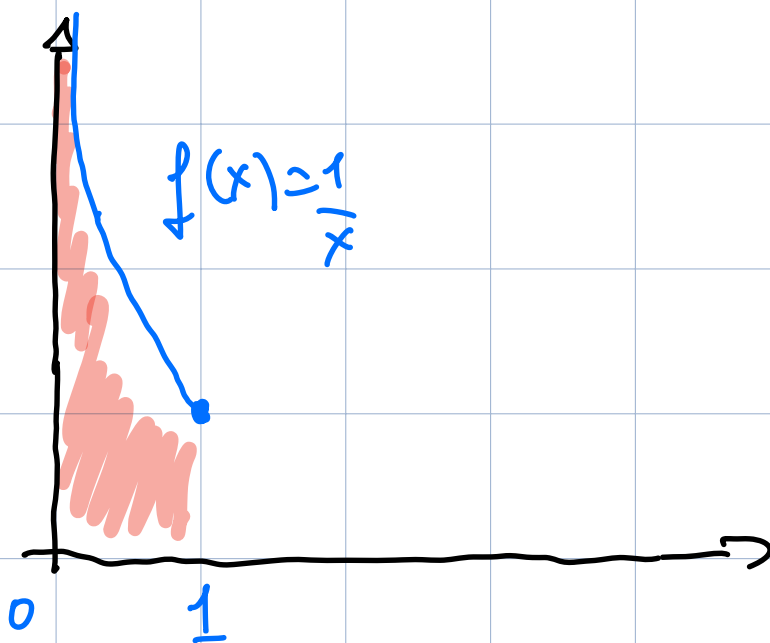
$$= \lim_{b \rightarrow +\infty} \ln(b) = +\infty$$



$$\int_1^b \frac{1}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{x} \right]_1^b = \left[1 - \frac{1}{b} \right]$$

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{1}{x^2} dx = 1$$

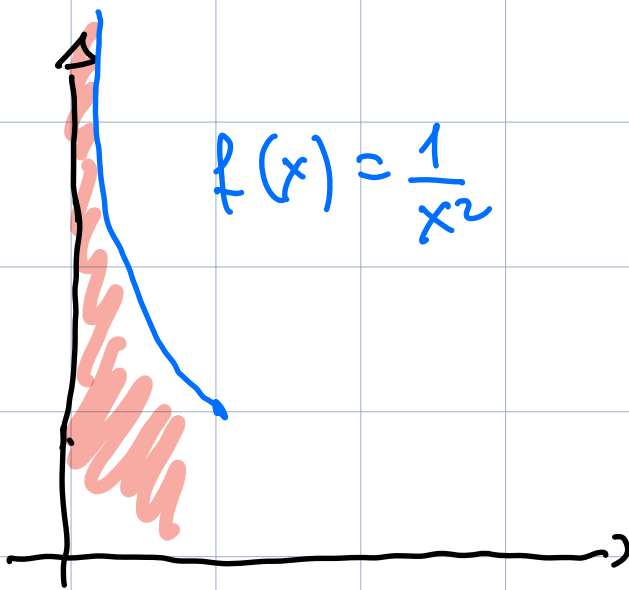
$$\Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx \quad \text{CONVERGE}$$



$$\int_0^1 \frac{1}{x} dx = \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^1 \frac{1}{x} dx$$

$$= \lim_{a \rightarrow 0^+} -\ln(a) = +\infty$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{1}{x} dx \quad \text{DIVERGE}$$



$$\int_0^1 \frac{1}{x^2} dx = \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^1 \frac{1}{x^2} dx$$

$$= \lim_{a \rightarrow 0^+} \left[-\frac{1}{x} \right]_a^1 = \lim_{a \rightarrow 0^+} \frac{1}{a} - 1$$

$$= +\infty$$

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2} dx$$

DIVERGE

Esempi / Esercizi

$$3.) \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^8+10} dx$$

x^8+10 è difficile da fattorizzare

PERO'

$$x^8+10 \geq x^8$$

$$\text{Quindi: } \frac{1}{x^8+10} \leq \frac{1}{x^8}$$

$$\underline{\underline{\delta > 1:}} \quad \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\delta} dx \quad \text{CONVERGE}$$

$$\Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^8+10} dx \quad \text{converge}$$

$$4.) \int_1^{+\infty} \frac{x - \cos(x)}{x^2 + x + 8} dx$$

def.^{nte} $f(x) \geq 0$

$$\frac{x - \cos(x)}{x^2 + x + 8} \sim \frac{1}{x} \quad x \rightarrow +\infty$$

$$= \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

Infetti: numeratore = $x - \cos(x)$

$$= x \left(1 - \frac{\cos(x)}{x}\right)$$

Pertanto $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \cdot \left(1 - \frac{\cos(x)}{x}\right)}{x} = 1$

CIOE' $x - \cos(x) \sim x$

↑ POTENZA=1

Denominatore: $x^2 + x + 8 =$

$$x^2 \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{8}{x^2}\right)$$

QUINDI: $\frac{\text{num}}{\text{denom}} = \frac{x \cdot \left(1 - \frac{\cos(x)}{x}\right)}{x^2 \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{8}{x^2}\right)}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(1 - \frac{\cos(x)}{x}\right)}{x^2 \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{8}{x^2}\right)} = 0$$

ci chiediamo: come va a 0?

$$\frac{x \cdot (1 + o(1))}{x^2 (1 + o(1))} = \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

OUVERTURE :

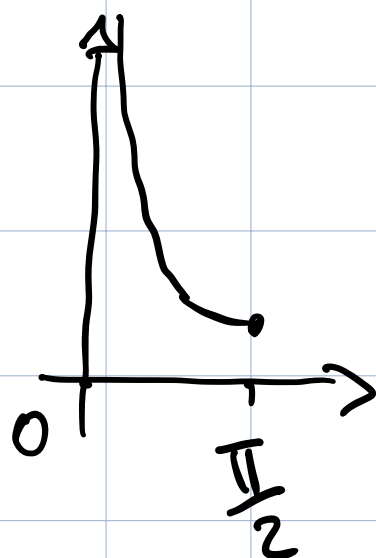
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{\frac{1}{x}} = 1$$

$\int_1^{+\infty} f(x) dx$ diverge perché

$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$ diverge

$$5.) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin(x)} dx$$

$\forall a > 0$ $\int_a^{\frac{\pi}{2}}$ è DEFINITO
UNICO PROBLEMA: in 0:



Limite notevole:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

$\Downarrow$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{\sin(x)}} = 1$$

$\Downarrow$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{x} dx \text{ DIVERGE} \Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin(x)} dx \text{ DIVERGE}$$

$$6.) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{\sin(x)}} dx \quad \underline{\text{CONVERGE}}$$

poiche' $\sqrt{\sin(x)} = \sqrt{x + o(x^2)}$

$$= \sqrt{x} + o(x)$$

O, enolopemente,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{\sin(x)}} = 1$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{x}} dx \quad \text{CONVERGE} \quad \text{poiche' } \frac{1}{2} < 1$$

allora $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{\sin(x)}} dx$ converge

$$7.) \int_1^{+\infty} \text{oncten} \left(\frac{1}{x^2+x+1} \right) dx$$

converge

Perché

$$.) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2+x+1} = 0$$

$$.) \text{oncten}(t) = t + o(t) \text{ in}$$

un intorno di
 $t_0 = 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\text{orden} \left(\frac{1}{x^2+x+1} \right)}{\frac{1}{x^2+x+1}} = 1$$

Per tanto

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2+x+1} dx \quad \text{converge} \quad \boxed{2 > 1}$$

$$\frac{1}{x^2+x+1} \sim \frac{1}{x^2}$$

$\Downarrow$

$$\int_1^{+\infty} \text{orden} \left(\frac{1}{x^2+x+1} \right) dx$$

converge

$\epsilon' : \text{esiste } \left(\frac{1}{x^4 x + 1} \right) \sim \frac{1}{x^2}$

$x \rightarrow +\infty$

NOTAZIONE: $f(x) \sim g(x)$

$x \rightarrow +\infty$

SE

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = c \neq 0, +\infty$$

$$8.) \int_1^{+\infty} \frac{1}{e^{2x} + \ln(x)} dx \quad \text{converge}$$

Poiché definitivamente

$$e^{2x} + \ln(x) > x^2$$

Quindi

$$\frac{1}{e^{2x} + \ln(x)} \leq \frac{1}{x^2}$$

↑
converge

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{e^{2x} + \ln(x)} dx \leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx \Rightarrow \text{converge}$$

ESERCIZI

①) $\int_e^{+\infty} \frac{1}{x \cdot \ln(x)} dx$ DIVERGE

sostituzione: $\ln(x) = t$ estremi:

$$\frac{1}{x} dx = dt \quad e \mapsto 1$$

$$+\infty \mapsto +\infty$$

$$\int_e^{+\infty} \frac{1}{\ln(x)} \cdot \frac{1}{x} dx =$$

$$= \int_1^{+\infty} \frac{1}{t} dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \ln(b) = +\infty$$

N.B.

Integrale indefinito

$$\int \frac{1}{x \ln(x)} dx = \ln(\ln(x))$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} = +\infty$$

$$2.) \int_1^e \frac{1}{x \ln(x)} dx$$

è ancora integrale improprio

poiché $\lim_{x \rightarrow 1^+} x \ln(x) = 0$

o, meglio, $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x \ln(x)} = +\infty$

SOSTITUZIONE : $t = \ln(x)$

$$dt = \frac{1}{x} dx$$

estremi: $e \rightarrow 1$

$$1 \rightarrow 0$$

$$\int_1^e \frac{1}{x \ln(x)} dx = \int_0^1 \frac{1}{t} dt$$

DIVERGE

3.)
$$\int_1^e \frac{1}{\ln(x)} dx$$

Idea: sfruttiamo il limite notevole

SOSTITUZIONE : $x = 1+t$

$$\int_1^e \frac{1}{\ln(x)} dx = \int_0^{e-1} \frac{1}{\ln(1+t)} dt$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1$$

$$\text{cioè } \frac{1}{\ln(1+t)} \sim \frac{1}{t}$$

$$\text{in } \underline{t=0}$$

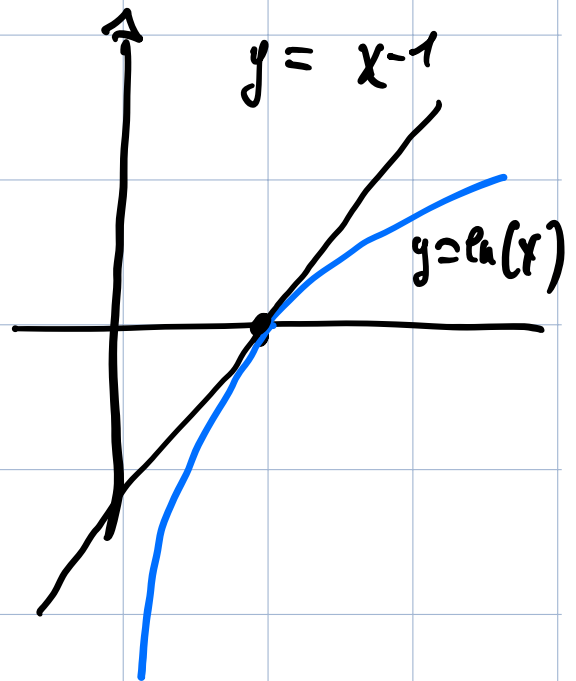
Però :

$$\int_0^{e-1} \frac{1}{\ln(1+t)} dt \text{ diverge}$$

perché

$$\int_0^{e-1} \frac{1}{t} dt \text{ diverge}$$

$$e^m(x) \leq x+1$$



$$\int_1^e \frac{1}{e^m(x)} dx > \int_1^e \frac{1}{x-1} dx$$

$$\int_0^{e-1} \frac{1}{t} dt$$

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx$$

Integrale
improprio

Condizione
necessaria per
la convergenza

Teorema. Sia $f(x)$
continua

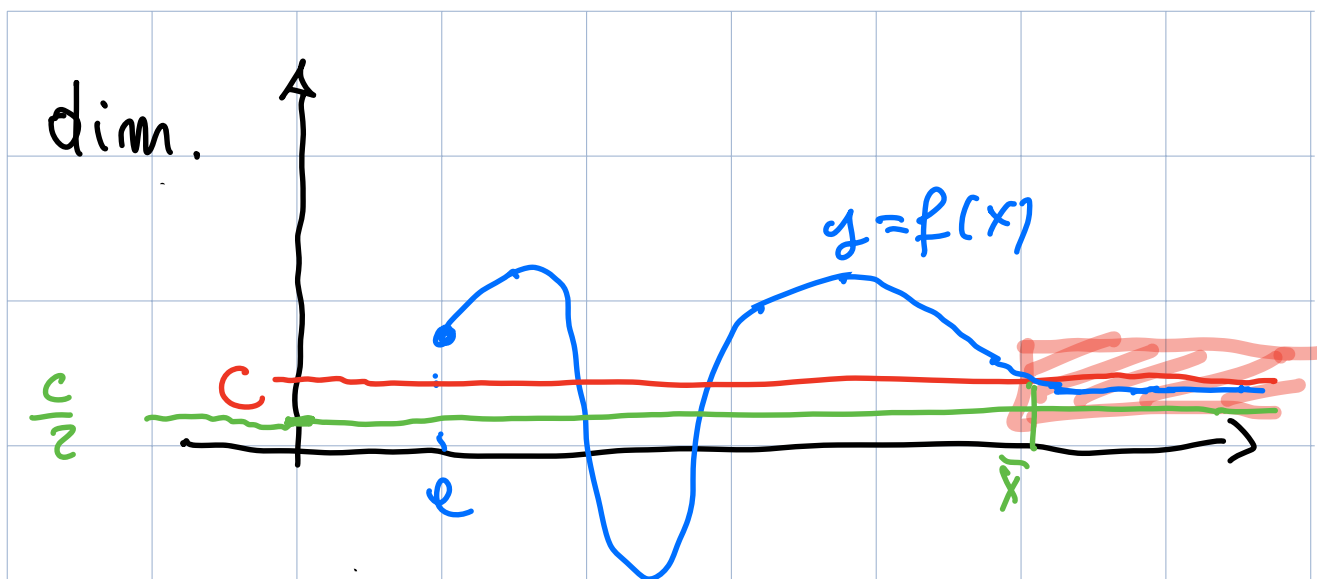
def. nte ≥ 0 .

Supponiamo:

$$(a) \quad \exists \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = c$$

$$(b) \quad \int_a^{+\infty} f(x) dx \quad \text{converge}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$



$$f(x) \geq 0 \quad \forall x > x_0 \quad \text{PER ASSURDO}$$

$$\text{Se } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = c > 0$$

$$\varepsilon = \frac{c}{2} \quad \text{nella def. di limite}$$

$$\text{Allora } \exists \bar{x} : \forall x > \bar{x} \quad f(x) > \frac{c}{2}$$

Quindi

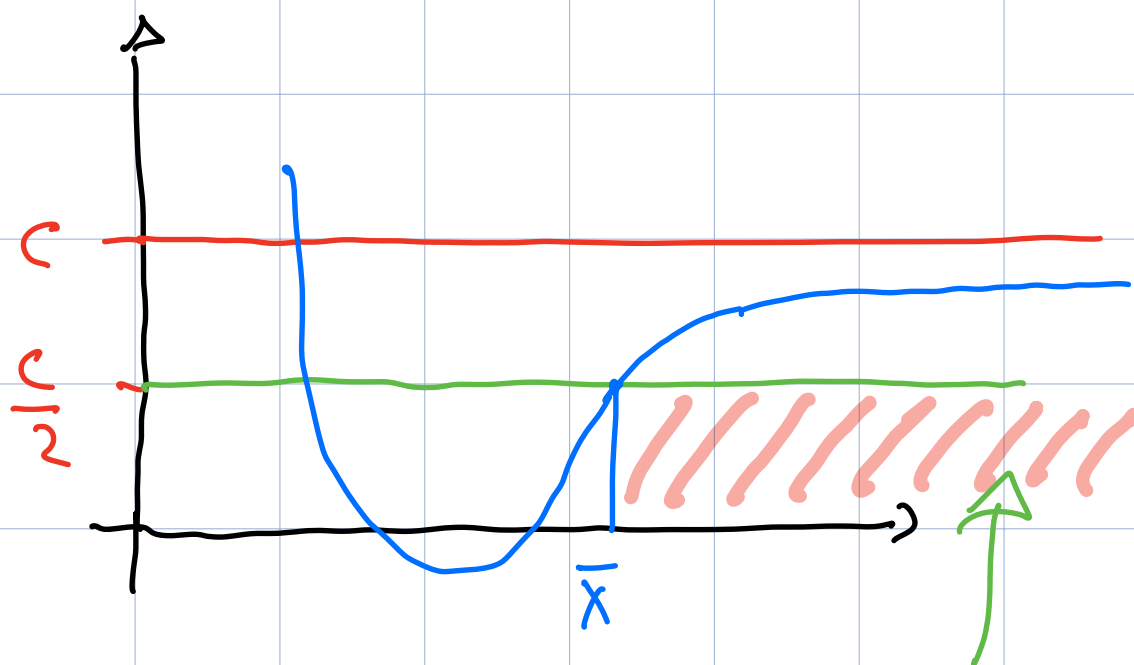
$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \int_a^{\bar{x}} f(x) dx + \int_{\bar{x}}^b f(x) dx \\ &\geq \int_a^{\bar{x}} f(x) dx + \int_{\bar{x}}^b \frac{c}{2} dx \end{aligned}$$

tende a $+\infty$]

$$\int_{\bar{x}}^b \frac{c}{2} dx = b \cdot \frac{c}{2} - \bar{x} \cdot \frac{c}{2}$$

||

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} = +\infty$$



Aree di
misura infinite

Esercizio

Determinare per
quali d

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{2d} \ln^d(x)} dx \text{ converge}$$

Sol.

2 problemi

$$\lim_{x \rightarrow +\infty}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$$

Quindi:

$$\int_1^{+\infty} = \int_1^e + \int_e^{+\infty}$$

$\int_1^{+\infty}$ converge $\Leftrightarrow$

$\int_1^e$ converge

$\int_e^{+\infty}$ converge

(A)

STUDIO $\int_e^{+\infty}$:

VISTO $\int_e^{+\infty} \frac{1}{x \ln(x)} dx$ diverge

OSS : Per $0 \leq d \leq \frac{1}{2}$

$$\forall x \geq e \quad x^{2d} \cdot e_n^d(x) \leq x \cdot e_n^{\frac{1}{2}}(x)$$

$$\leq x \cdot e_n(x)$$

cioè:

$$\frac{1}{x^{2d} e_n^d(x)} > \frac{1}{x \cdot e_n(x)} \quad \forall x \geq e$$

Quindi

$$\int_e^{+\infty} \frac{1}{x e_n(x)} dx \text{ diverge} \Rightarrow$$

$$\underline{0 \leq d \leq \frac{1}{2}}: \quad \int_e^{+\infty} \frac{1}{x^{2d} e_n^d(x)} dx \text{ diverge}$$

Se $d > \frac{1}{2}$:

$$\forall x > e \quad \frac{1}{x^{2d} \ln^d(x)} \leq \frac{1}{x^{2d}}$$

$$\left(d > \frac{1}{2} \right) \Rightarrow \int_e^{+\infty} \frac{1}{x^{2d}} dx \text{ converge}$$

$$\Rightarrow \int_e^{+\infty} \frac{1}{x^{2d} \ln^d(x)} dx \text{ converge}$$

conclusion :

$$\int_e^{+\infty}$$

converge $\Leftrightarrow$

$$\alpha > \frac{1}{2}$$

diverge $\Leftrightarrow$

$$0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2}$$

B

Studio

$$\int_1^e$$

:

oss. nell'intervallo $[1, e]$

la funzione

$$x^{2\alpha}$$

ha max e min

2 numeri positivi

O, meglio,

$$\forall x \text{ t.c. } 1 \leq x \leq e$$

si ha $1 \leq x^{2d} \leq e^{2d}$

Per tanto in $[1, e]$

$$1. \underline{p_n^d(x)} \leq x^{2d} \underline{p_n^d(x)} \leq e^{2d} \cdot \underline{p_n^d(x)}$$

costanti

Quindi $\int_1^e$ converge $\Leftrightarrow \int_1^e \frac{1}{p_n^d(x)} dx$
converge

$$\int_1^e \frac{1}{p_n^d(x)} dx$$

sostituzione $x = 1+t$

$$\int_1^e = \int_0^{e-1} \frac{1}{e^{nd}(1+t)} dt$$

Limite notevole:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{nd}(1+t)}{t^d} = 1$$

"

$$\left(\frac{e^n(1+t)}{t} \right)^d$$

QUINDI per il teo. confronto
asintotico

$$\int_0^{e-1} \frac{1}{t^d} dt \text{ converge}$$

$\Updownarrow$

$$\Leftrightarrow \underline{d < 1}$$

$$\int_0^{e-1} \frac{1}{e^{n^d}(1+t)} dt \text{ converge}$$

CONCLUSIONE:

$$\int_1^e \text{ converge}$$

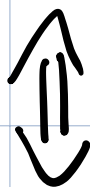
$\Updownarrow$

$$\underline{d < 1}$$

RISPOSTA FINALE :

$$\int_1^{+\infty}$$

converge



$$\int_1^e$$

converge



$$d < 1$$

$$\& \int_e^{+\infty}$$

converge



$$d > \frac{1}{2}$$

soluzione:

$$\frac{1}{2} < d < 1$$

Esercizio.

Studiare la
convergenza di

$$\int_1^{+\infty} (\sqrt{4x^2 + x} - 2x) dx$$

SOL.

$$\bullet f(x) = \sqrt{4x^2 + x} - 2x \geq 0 \quad \forall x \geq 1$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \quad ?$$

$$\text{IDEA: } \sqrt{4x^2 + x} =$$

$$= \sqrt{(2x)^2 \left(1 + \frac{x}{4x^2}\right)} = 2x \cdot \sqrt{1 + \frac{x}{4x^2}}$$

$$\text{Quindi: } \sqrt{4x^2+x} - 2x =$$

$$= 2x \cdot \left(\sqrt{1 + \frac{x}{4x^2}} - 1 \right)$$

tende a 0

tende a 0

Consideriamo lo sviluppo di
Taylor della funzione

$$g(t) = \sqrt{1+t} \quad \text{in } t=0$$

$$g(t) = (1+t)^{\frac{1}{2}}$$

$$g(t) = 1 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{8}t^2 + o(t^2)$$

Ho usato la formula

$$(1+t)^d = 1 + d \cdot t + \frac{d(d-1)}{2} t^2 + o(t^2)$$

nostro caso:

$$t = \frac{1}{4x} \rightarrow 0$$

$$\sqrt{1 + \frac{1}{4x}} \underset{=t}{=} =$$

$$= 1 + \frac{1}{2} \cdot \underbrace{\frac{1}{4x}}_{t^1} - \frac{1}{8} \underbrace{\left(\frac{1}{4x}\right)^2}_{t^2} + o\left(\underbrace{\frac{1}{x^2}}_{t^2}\right)$$

ALLORA:

$$f(x) = 2x \cdot \left(\sqrt{1 + \frac{1}{4x}} - 1 \right)$$

$$= 2x \cdot \left(\cancel{1} + \frac{1}{8x} - \frac{1}{8 \cdot 4^2 \cdot x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) - \cancel{1} \right)$$

$$= 2x \left(\frac{1}{8x} - \frac{1}{128x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \right)$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{64x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

CONCLUSIONE :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{1}{4}$$

$\frac{1}{4} > 0 \Rightarrow$ non è verificata
la condizione
necessaria

$$\left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \right)$$

$\Rightarrow \int$ è DIVERGENTE

Funzione integrale

Dato $f(x)$ integrabile
vogliamo studiare

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt$$

vantaggio: conosciamo la
derivata!

$$F'(x) = f(x)$$

m.b.

NON SEMPRE

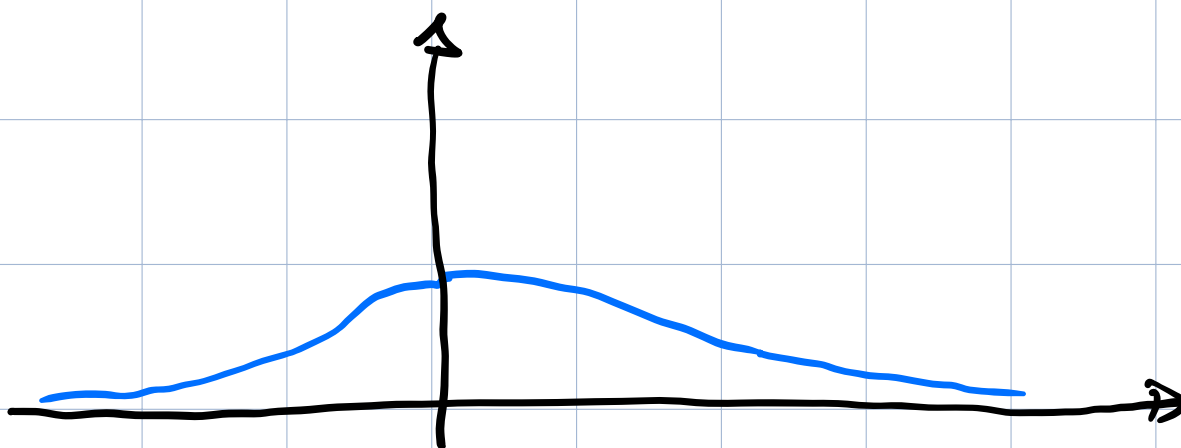
∃ espressione mediante
funzioni "semplici"

di $F(x) = \int_0^x f(t) dt$

Esempio:

$$f(x) = e^{-x^2}$$

GAUSSIANA



$F(x)$ non è esprimibile mediante
funzioni semplici.

La lasciamo così!

$$F(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$$

$$F(0) = 0$$

F è DISPARI poiché
 f è PARI

F è DERIVABILE &

$$F'(x) = e^{-x^2}$$

$f'(x) > 0 \quad \forall x \Rightarrow f$ è
crescente

avete visto $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$ converge

FATTO: (risultato di
ANALISI complessa)

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$$

$$F''(x) = (e^{-x^2})' = -2x e^{-x^2}$$

$\Rightarrow$ Per $x > 0$ F è concavo

$x < 0$ F è convesso

$x = 0$ p.to di FLESSO

GRAFICO di F

