

Riassunto Sotto opportune condizioni

In un intorno di x_0 possiamo approssimare

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n)$$

$P_{n,f}(x-x_0)$

Calcolo dei limiti $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P_{n,f}(x-x_0)}{P_{n,g}(x-x_0)} = \dots$

Attenzione Scelta dell'ordine n

Esempio $x^2 \cos(x) - \sin^2(x)$ in $x=0$ è infinitesimo

$$x^2(1 + o(x)) - (x + o(x^2))^2 = \cancel{x^2} + o(x^2) - \cancel{x^2} + o(x^2) = o(x^2)$$

non ho il termine principale.

$$x^2 \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3) \right) - \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \right)^2$$

$$= \cancel{x^2} - \frac{x^4}{2} + o(x^4) - \cancel{x^2} + \frac{x^4}{3} + o(x^4) = -\frac{x^4}{6} + o(x^4)$$

///

Termine princ

Se fosse Num di un limite $\rightarrow$ Posso approssimare Den all'ordine 4

Attenzione Calcoli $\rightarrow$ qualcosa del tipo $x^4 + o(x^3)$

Non è termine princ perché $x^4 \in o(x^3)$

Finale dell'app sempre del tipo $a(x-x_0)^{(n)} + o((x-x_0)^{(n)})$

$a \neq 0$ Stesso esponente

Esercizio

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(2x) + 2 \ln(1+x^2) - 1}{x \lg(x) + e^{-x^2} - 1}$$

$$\text{F.I. } \frac{0}{0}$$

Numeratore $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5)$ sviluppo in 0

$x \rightarrow 2x$ posso usare lo sviluppo in 0

$$\cos(2x) = 1 - \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^4}{4!} + o(x^5) = 1 - 2x^2 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^5)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + o(x^5)$$

$x \rightarrow x^2$ sviluppo in 0

$$\begin{aligned} \ln(1+x^2) &= x^2 - \frac{(x^2)^2}{2} + \frac{(x^2)^3}{3} - \frac{(x^2)^4}{4} + \frac{(x^2)^5}{5} + o(x^{10}) \\ &= x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^5) \end{aligned}$$

Numeratore $\cos(2x) + 2 \ln(1+x^2) - 1$

$$= \underbrace{1}_{\text{red}} - \overbrace{2x^2}^{\text{red}} + \frac{2}{3}x^4 + o(x^5) + \overbrace{2x^2 - x^4}^{\text{red}} + o(x^5) - \underbrace{1}_{\text{red}} = -\frac{1}{3}x^4 + o(x^5)$$

Sviluppo ^{$\cos(2x)$} il Den all'ordine 4

$$\operatorname{tg}(x) = \underline{x} + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5) = x + \frac{x^3}{3} + o(x^4)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$$

$x \rightarrow -x^2$ sviluppo in 0

$$e^{-x^2} = 1 + (-x^2) + \frac{(-x^2)^2}{2} + o(x^4) = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2} + o(x^4)$$

$$\text{Den } \underline{x \operatorname{tg}(x)} + e^{-x^2} - 1 = \overbrace{x^2}^{\text{red}} + \frac{x^4}{3} + o(x^4) + \underbrace{1 - x^2}_{\text{red}} + \frac{x^4}{2} + o(x^4) - 1 = \frac{5}{6}x^4 + o(x^4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \text{iniziale} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{3} x^4 + o(x^4)}{\frac{5}{6} x^4 + o(x^4)} = -\frac{2}{5}$$

Esercizio $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1-x^2)^3 - 6 \cos(x) + 5}{\sqrt[3]{1+3x^2} - \ln(1+x^2) - 1}$ F.I. $\frac{0}{0}$

$$\text{Num } (1-x^2)^3 - 6 \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + o(x^6) \right) + 5$$

$$= \underbrace{1} - 3x^2 + \underbrace{3x^4} - x^6 - \underbrace{6} + \underbrace{3x^2} - \underbrace{\frac{x^4}{4}} + \frac{x^6}{5!} + o(x^6) + \underbrace{5}$$

$$= \frac{11}{4} x^4 + o(x^4)$$

Sviluppo dell'ordine 4 ///

$$\sqrt[3]{1+x} = (1+x)^{1/3}$$

In generale $(1+x)^n = \sum_{i \in \mathbb{N}} \binom{n}{i} x^i \quad //$

$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{i! (n-i)!} = \frac{n(n-1) \dots (n-i+1)}{i!}$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{i \geq 0} \binom{\alpha}{i} x^i \quad \binom{\alpha}{i} = \frac{\alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-i+1)}{i!}$$

$\alpha \in \mathbb{N} \quad \alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-i+1) \rightarrow \text{si annulla}$

$\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{N} \quad \alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-i+1) \neq 0$

$\rightarrow \sum_{i=0}^n \binom{\alpha}{i} x^i + o(x^n) \quad \text{Sviluppo in } 0$

$$(1+x)^{1/3} = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5}{81} x^3 + 0(x^3)$$

$$\binom{\alpha}{0} \cdot x^0 \quad \binom{\alpha}{1} x$$

$$\binom{1/3}{1} x = \frac{1/3}{1!} \cdot x$$

$$\binom{1/3}{2} x^2 = \frac{1/3 (1/3 - 1)}{2!} x^2 = -\frac{x^2}{9}$$

$$\binom{1/3}{3} x^3 = \frac{1/3 (1/3 - 1) (1/3 - 2)}{3!} x^3 = \frac{10}{27} \cdot \frac{1}{6} x^3 = \frac{5}{81} x^3$$

$$\binom{1/3}{4} x^4 = \dots$$

$$(1 + 3x^2)^{1/3} = 1 + \frac{(3x^2)}{3} - \frac{(3x^2)^2}{9} + 0(x^4) = 1 + x^2 - x^4 + 0(x^4)$$

$$\ln(1+x^2) = x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4)$$

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

$$\text{Den} \quad \sqrt[3]{1+3x^2} - \ln(1+x^2) - 1 = \underbrace{1}_{-} + \underbrace{x^2 - x^4}_{-} - \underbrace{x^2}_{-} + \underbrace{\frac{x^4}{2}}_{-} - \underbrace{1}_{-} + o(x^4)$$

$$= -\frac{1}{2}x^4 + o(x^4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \text{iniziale} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{11}{4}x^4 + o(x^4)}{-\frac{1}{2}x^4 + o(x^4)} = -\frac{11}{2}$$

Esercizio

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\lg(2x) - 2 \operatorname{sen}(x)}{x \sqrt[3]{1+x^2} - x} = 9$$

Oss conclusiva

$$f(x) = \underbrace{P_{n,f}(x-x_0)}_{\text{Pol di Taylor}} + \underbrace{o((x-x_0)^n)}_{\text{Resto di Peano}}$$

Sotto opportune condizioni (serve la der $(n+1)$ -esima in x_0)

$$f(x) = P_{n,f}(x-x_0) + f \frac{^{(n+1)}(y)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1} \quad \text{Resto di Lagrange}$$

per un y in un intorno di x_0

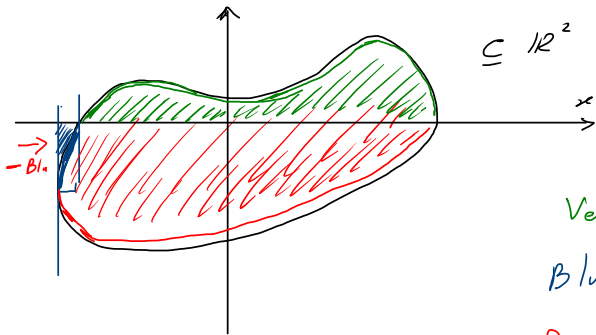
1
(n+1)-esimo

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$$

$$\underset{x}{f(b)} = \underset{x_0}{f(a)} + \underset{y}{f'(c)} (\underset{x-x_0}{b-a})$$

Calcolo integrale $\rightarrow$ Serie $\sum_{n \geq 0} a_n$

Problema del calcolo delle aree



$\subseteq \mathbb{R}^2$

Bordo della figura

è un grafico di funzione?

NO

Verde $\rightarrow$ grafico di $f(x)$

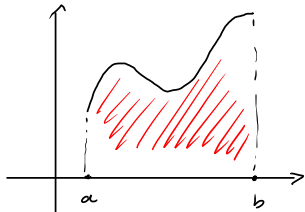
Blu $\rightarrow$ grafico di $g(x)$

Rosso $\rightarrow$ grafico di $h(x)$

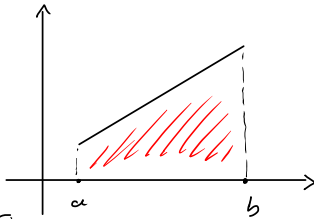
Area iniziale = Area verde + Area rossa - Area blu

Ci occuperemo solo di aree tra grafico di funz e asse x .

Ipotesi $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ limitata

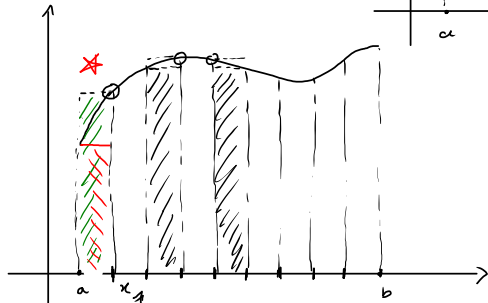
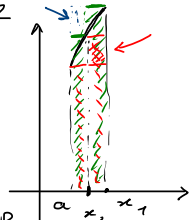


Esempio funzioni lineari



$$\text{Area} = \frac{f(a) + f(b)}{2} \cdot (b - a)$$

★



Intervalli

Aumento
↓

→ App Sup
→ App Inf

Al limite coincidono

Def Una suddivisione di un intervallo $[a, b]$ è un'insieme di punti $D = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b\}$

($x_1 - x_0, x_2 - x_1, \dots, x_n - x_{n-1}$ saranno le basi dei rettangoli)

Una suddivisione $D_1 = \{a = y_0 < y_1 < \dots < y_m = b\}$

si dice più fine di D se $D \subset D_1$

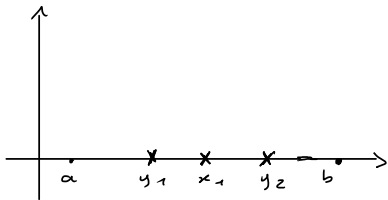
cioè $\forall x_i \exists y_j$ t.c.

$$x_i = y_j \quad \text{ma } x_1 \notin D_1$$

$$D = \left\{ a, \frac{b-a}{2}, b \right\}$$

$$D_1 = \{a, y_1, y_2, b\}$$

Non è più fine di D



$\Rightarrow D_2 = D \cup D_1$
è più fine
di entrambe

Def $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ limitata

D una suddivisione di $[a, b]$

La somma superiore di f rispetto a $D = \{x_0, \dots, x_n\}$

$$S(D, f) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \cdot \underset{\text{base}}{\text{Sup}} \{ \underset{\text{altezza}}{f(x)} : x \in [x_{i-1}, x_i] \}$$

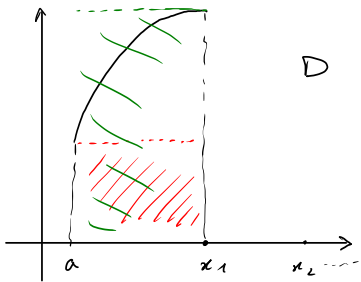
Sicuramente
$$S(D, f) \geq \text{Area}$$

La somma inferiore di f rispetto a D

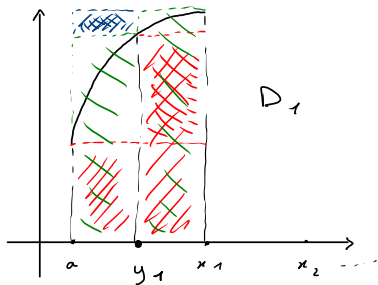
$$s(D, f) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \cdot \text{Inf} \{ f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i] \}$$

Sicuramente
$$s(D, f) \leq \text{Area}$$

$$s(D, f) \leq \text{Area} \leq S(D, f)$$



D



D_1

$$D = [a, x_1, x_2, \dots]$$

$$D_1 \supset D \text{ pr\u0103 line\u0103}$$

$$D_1 = [a, y_1, x_1, x_2, \dots]$$

$$\mathcal{R}(D, f) = (x_1 - a) f(a) + \dots$$

$$\mathcal{S}(D, f) = (x_1 - a) f(x_1) + \dots$$

$$\mathcal{R}(D_1, f) = (y_1 - a) f(a) + (x_1 - y_1) f(y_1) + \dots > \mathcal{R}(D, f)$$

$$\mathcal{S}(D_1, f) = (y_1 - a) f(y_1) + (x_1 - y_1) f(x_1) + \dots < \mathcal{S}(D, f)$$

In generale

In general $(x_1 - a) \underbrace{\sup \{ f(x) \mid x \in [a, x_1] \}}_{\times} // S(D, f)$

$$(y_1 - a) \underbrace{\sup \{ f(x) \mid x \in [a, y_1] \}}_{\times} + (x_1 - y_1) \underbrace{\sup \{ f(x) \mid x \in [y_1, x_1] \}}_{\times}$$

$$\sup \{ f(x) : x \in [a, x_1] \} \geq \sup \{ f(x) : x \in [a, y_1] \} \quad S(D_1, f)$$

$$\Rightarrow \sup \{ f(x) : x \in [y_1, x_1] \}$$

$$\leq (y_1 - a) \sup \{ f(x) : x \in [a, x_1] \} + (x_1 - y_1) \sup \{ f(x) : x \in [a, x_1] \}$$

$$= \sup \{ f(x) \mid x \in [a, x_1] \}^x \quad (y_1 - a + x_1 - y_1)$$

$$(x_1 - a)$$

In generale $D \subset D_1 \Rightarrow$

$$\lambda(D, f) \leq \lambda(D_1, f) \leq \text{Area} \leq S(D_1, f) \leq S(D, f)$$

Esempio Prendere suddivisioni con intervalli di ampiezza

tutte uguali a $\frac{b-a}{n}$: chiamiamola D_n

$$\text{Fare } \lim_{n \rightarrow +\infty} S(D_n, f)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda(D_n, f)$$

Attenzione D_{n+1} in gen NON è più fine di D_n

$D_n \subset D_{2n}$ comunque un ordine c'è e il limite ha senso

Def Una funzione limitata $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ si dice integrabile (secondo Riemann) in $[a, b]$ se

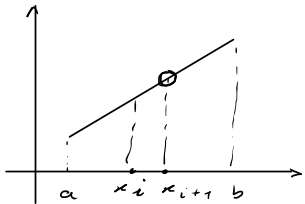
$$\inf_D S(D, f) = \sup_D s(D, f) \quad \text{tale valore si indica}$$

con $\int_a^b f(x) dx = \text{Area}$


intervallo funzione differenziale $\sim$ ampiezza della suddivisione

Esempio f lineare

crescente



D_n n intervalli di
ampiezza $\frac{b-a}{n}$

$$\frac{f(a) + f(b)}{2} \cdot (b-a)$$

$$x_0 = a \quad x_1 = a + \frac{(b-a)}{n} \quad x_2 = a + 2 \frac{(b-a)}{n} \quad \dots \quad x_{n-1} = a + (n-1) \frac{(b-a)}{n}$$

$$x_n = a + n \frac{(b-a)}{n} = b$$

$$\sup \{ f(x) : [x_{i-1}, x_i] \} = f(x_i)$$

$$f(x) = \alpha x + \beta$$
$$\alpha > 0$$

$$S(D_n, f) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) f(x_i) = \sum_{i=1}^n \frac{b-a}{n} \left(\alpha \cdot \left(a + i \frac{(b-a)}{n} \right) + \beta \right)$$
$$= \sum_{i=1}^n \alpha a \frac{(b-a)}{n} + \underbrace{\alpha i \frac{(b-a)^2}{n^2}}_{\text{green stars}} + \beta \frac{(b-a)}{n} \quad \text{green stars}$$

$$\alpha a (b-a) + \beta (b-a) + \alpha \frac{(b-a)^2}{n^2} \sum_{i=1}^n i =$$

★
★ ★
★ ★ ★
///
→
 $\frac{n(n+1)}{2}$

$$\alpha a (b-a) + \beta (b-a) + \alpha \frac{(b-a)^2}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty}$$

$$\alpha a (b-a) + \beta (b-a) + \frac{\alpha (b-a)^2}{2} ///$$

$$\frac{f(a) + f(b)}{2} \cdot (b-a) = \frac{\alpha a + \beta + \alpha b + \beta}{2} \cdot (b-a)$$

$$= \left[\frac{\alpha (b+a)}{2} + \beta \right] (b-a) = \frac{\alpha}{2} (b^2 - a^2) + \beta (b-a)$$

$$\rightarrow (\alpha a + \beta)(b-a) + \alpha \frac{(b^2 + a^2 - 2ab)}{2}$$

$$= (b-a) \left[\alpha a + \beta + \alpha \frac{(b-a)}{2} \right] = (b-a) \left[\frac{\alpha a + 2\beta + \alpha b}{2} \right]$$

Esercizio Calcolare $\lim_{n \rightarrow +\infty} S(D_n, f)$
 e vedere che si ottiene lo stesso risultato

$$\int_a^b (\alpha x + \beta) dx = \alpha \frac{(b^2 - a^2)}{2} + \beta (b - a) //$$

" $\alpha \frac{x^2}{2} + \beta x$

Esempio Funzione di Dirichlet $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{in } \mathbb{Q} \\ 1 & \text{in } \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$

$$f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$S(D, f) = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) \sup \{ f : \text{in } [x_i, x_{i+1}] \}$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) = \underbrace{x_1 - x_0} + \underbrace{x_2 - x_1} + \underbrace{x_3 - x_2} + \dots = \overset{1}{b - a}$$

$$\Delta(D, f) = \sum_{i=0}^{n-1} \inf \{ f(x) \mid x \in [x_i, x_{i+1}] \} \cdot (x_{i+1} - x_i) = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \forall D \quad S(D, f) = 1 \\ \forall D \quad \Delta(D, f) = 0 \end{array} \right\} \rightarrow f \text{ non \u00e9 integrabile secondo Riemann.}$$

Esercizio $f(x) = x^2$ in $[0, a]$

$g(x) = x^3$ in $[0, a]$

Provare e calcolare $S(D_n, f)$ $\Delta(D_n, f)$ $S(D_n, g)$ $\Delta(D_n, g)$

$$\begin{array}{ccc} \sum (i+1)^2 & \sum (i+1)^3 & \int_0^a x^2 dx \\ \downarrow & \downarrow & \int_0^a x^3 dx \\ \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} & \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 & \end{array}$$