

$$(P_1 \Rightarrow P_2) \stackrel{?}{\Rightarrow} (\neg P_1 \Rightarrow P_2)$$

P_1	P_2	$(P_1 \Rightarrow P_2)$	$(\neg P_1 \Rightarrow P_2)$
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	V	V
F	F	V	F

Oss In gen $\#A < \#P(A)$

Esempio

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \{2n \mid n \in \mathbb{N}\} \\ n & \longrightarrow & 2n \\ \frac{m}{2} & \longleftarrow & m \end{array}$$

Se $\#A = n$ $n < +\infty$

$$\text{Allora } \#P(A) = 2^n$$

Oss Vale anche per $n = 0$
 $A = \emptyset$ $P(A) = \{\emptyset\}$

vale anche se $\#A = +\infty$
 $A = \mathbb{N}$

Def Unione $A \cup B = \{x \text{ t.c. } x \in A \vee x \in B\}$

Intersezione $A \cap B = \{x \text{ t.c. } x \in A \wedge x \in B\}$

Differenza $A - B = \{x \text{ t.c. } x \in A \wedge x \notin B\}$

Differenza Simmetrica $A \Delta B = \{x \in A \wedge x \notin B\} \cup \{x \in B \wedge x \notin A\}$

$$\textcircled{1} = (A - B) \cup (B - A)$$

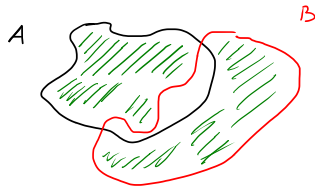
Se consideriamo sottoinsiemi di un insieme "universo" U

Complementare $A^c = \{x \in U \text{ t.c. } x \notin A\} = U - A$

Esercizio • $A = \{5n \mid n \in \mathbb{N}\}$ $B = \{7n \mid n \in \mathbb{N}\}$

$$U = \mathbb{N}$$

• Disegnare questi insiemi



Diff Simmetrica $\textcircled{2} (A \cup B) - (A \cap B)$

Dim $x \in (A - B) \cup (B - A)$ voglio dim $x \in (A \cup B) - (A \cap B)$

$x \in (A - B) \cup (B - A) \Rightarrow (x \in A \wedge x \notin B) \text{ oppure } (x \in B \wedge x \notin A) \Rightarrow$
 $\textcircled{1} \quad A - B \quad \times \quad B - A$

$\star$
 Se $x \in A$ e $x \notin B \Rightarrow \underline{x \in \overline{A} \cup B}$ e $\underline{x \notin A \cap B}$
 $A - B$
 Se $x \in B$ e $x \notin A \Rightarrow x \in B \cup A$ e $x \notin A \cap B$
 $B - A$

$\} \Rightarrow x \in (A \cup B) - (A \cap B)$
②

Quindi ① $\subseteq$ ②

Esercizio ② $\subseteq$ ①

$$x \in (A \cup B) - (A \cap B)$$

$$x \in A \cup B \text{ cioè } x \in A \quad \textcircled{\sigma} \quad x \in B$$

$$\text{e } x \notin A \cap B \text{ cioè } \downarrow \quad \downarrow$$

$$x \notin B$$

$$x \notin A$$

$$\Downarrow$$

$$\Downarrow$$

$$x \in A - B \text{ o } x \in B - A$$

$$\Rightarrow x \in (A - B) \cup (B - A)$$

Esercizio Distributive

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c \quad (A^c)^c = A$$

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

Leggi di De Morgan

Supp $A, B \subset M$: Elemento neutro per $\cup$ $\emptyset$
 $A \cup \emptyset = A \quad \forall A$
 Elemento neutro per $\cap$ M
 $A \cap M = A$

Elemento inverso per $\cup$ $A \cup A^c = M$ el neutro di $\cap$
 Elemento inverso per $\cap$ $A \cap A^c = \emptyset$ " " " $\cup$

Prodotto cartesiano A, B $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ e } b \in B\}$
 E' importante l'ordine!
 $A \times B \neq B \times A$ se $A \neq B$
 Anche quando $A = B$ $A \times A = A^2$
 $(a_1, a_2) \neq (a_2, a_1)$ se $a_1 \neq a_2$

Insiemi numerici $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$$

Due operazioni $+$ $\cdot$

Commutative $a + b = b + a$ $ab = ba$

Distributive $a(b + c) = ab + ac$

Associative $(a + b) + c = a + (b + c)$

El neutro 0 per $+$ 1 per $\cdot$

In gen non ci sono gli inversi

0 e 1 sono inversi di se stessi

Relazione di ordine

$\geq$ ($\geq$) Rel di ordine totale

↓
dati due elementi in $\mathbb{N}$ $a, b \in \mathbb{N}$

$a \geq b$ oppure $b \geq a$

Proprietà fondamentali

1. Riflessiva $a \geq a$

2. Antisimmetrica $a \geq b$ e $b \geq a \Rightarrow a = b$

3. Transitiva $a \geq b$ e $b \geq c \Rightarrow a \geq c$

4. Compatibile con le operazioni

$$\forall a, b, c \in \mathbb{N} \quad a \geq b \Rightarrow a + c \geq b + c \quad \text{comp con } +$$

$$a \geq b \Rightarrow a \cdot c \geq b \cdot c \quad \text{comp con } \cdot$$

Oss $a \cdot 0 = 0$ ci ritorniamo su $\mathbb{Z}$

Principio del Buon Ordinamento (B.O.) Ogni sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{N}$ ha un minimo (minimo rispetto $\geq$)



Principio di Induzione Sia $A \subseteq \mathbb{N}$ che verifica

1. $\exists m \in A$ /// caso iniziale

2. $\forall n \geq m \quad n \in A \Rightarrow n+1 \in A$ /// ipotesi induttiva

Allora $A \supseteq \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq m\}$

* Utilizzo del principio di induzione: Voglio dim $P(n)$ vero $\forall n \in \mathbb{N}$

Chiamo $A = \{n \in \mathbb{N} \mid \text{l.c. } P(n)\}$

dimostro 1. $0 \in A$ i.c. verifico $P(0)$

It. serve 2. se $P(n)$ vera allora $P(n+1)$ vera
 $n \in A \quad n+1 \in A$

} $\Rightarrow A = \mathbb{N}$

Dim che $\widehat{B.O.} \Rightarrow$ Induzione

Ipotesi

Tesi

Per assurdo nego che

$$A \supseteq \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq m\}$$

$$B = \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq m\} - \textcircled{A}$$

Quindi $\underbrace{B \neq \emptyset}_{B.O.} \Rightarrow B$ ha un minimo

Diciamo

$$\textcircled{t = \min\{B\}}$$

$$t \in B$$

$$t = m ?$$

NO

perché $m \in A$ per la proprietà 1.

$$t > m$$

$$t - 1 \geq m$$

$$t - 1 \in B ?$$

NO

perché $t = \min\{B\}$

Quindi $\underline{t-1} \in A \Rightarrow \textcircled{t \in A}$ per la proprietà 2.

Contraddizione: quindi B non può essere $t \in A$

$\neq \emptyset$ ma $B = \emptyset$ equivale a $A \supseteq \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq m\}$

Esercizio Induzione $\Rightarrow$ B.O. x

Esercizio

$$a \in \mathbb{N}$$

$$~~a \in \mathbb{R}~~$$

$$~~\forall a \in \mathbb{R}~~$$

$$\boxed{\forall a \geq 0}$$

Disuguaglianza di Bernoulli

$$\forall n \in \mathbb{N}$$

$$(1+a)^n \geq 1+na \quad P(n)$$

1. $P(0) \quad (1+a)^0 \geq 1+0 \cdot a \quad 1 \geq 1 \quad \text{vera}$

2. Supponiamo $n \geq 0$ e $P(n)$ vera Ipotesi induttiva

Dobbiamo dimostrare $P(n+1)$ vera

$$(1+a)^{n+1} \geq 1+(n+1)a \quad ? \text{ si } \leftarrow$$

$$\underbrace{(1+a)^{n+1}} = \underbrace{(1+a)^n} \cdot (1+a) \underset{P(n)}{\geq} \underbrace{(1+na)} \cdot (1+a) =$$

$$1+na+a+na^2 = 1+(n+1)a + na^2 \geq 1+(n+1)a$$

perché $na^2 \geq 0$

Esercizio

$\forall n \geq 0$

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} = 2 - \frac{1}{2^n} \quad P(n)$$

$$\rightarrow 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k}$$

$k=0 \quad k=1 \quad k=2 \quad k=n$

$$P(0) \quad \sum_{k=0}^0 \frac{1}{2^k} = 1$$

$$2 - \frac{1}{2^0} = 2 - 1 = 1$$

$P(0)$ vera

$P(n) \Rightarrow P(n+1)$

$$\sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{2^k} = 2 - \frac{1}{2^{n+1}} \quad ? \text{ si' } \leftarrow$$

$\frac{2}{2^{n+1}}$

Ip ind

$$\underbrace{\sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{2^k}}_{\text{red}} = \frac{1}{2^{n+1}} + \underbrace{\sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k}}_{P(n)} = \frac{1}{2^{n+1}} + 2 - \frac{1}{2^n}$$

$$= 2 + \frac{1 - 2}{2^{n+1}} = 2 - \frac{1}{2^{n+1}}$$

Esercizio $\forall n \geq 0 \quad \sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$

$\sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Falso che $\sum_{k=0}^n k = \frac{(2n+1)^2}{8}$

(Att. $P(n) \Rightarrow P(n+1)$)

Esempio In ogni insieme di n persone ($n \geq 1$) tutti hanno la stessa età $P(n)$

Dim per ind
 $P(1)$ vera

• Ip ind $P(n)$ vera
Devo dim $P(n+1)$

Insieme B con n persone $\Rightarrow$ tutti la stessa età
 $a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad \dots \quad a_{n-1} \quad a_n \quad a_{n+1}$
 $E(a_2) = \dots = E(a_n) = E(a_{n+1})$

Insieme A con n persone
 $\Rightarrow$ hanno tutti la stessa età
 $E(a_1) = E(a_2) = \dots = E(a_n)$

$\Rightarrow$ tutti hanno la stessa età $P(n+1)$ vera