

Applicazioni delle derivate al calcolo dei limiti

f, g derivabili in un intorno di x_0 . Supp $f(x_0) = g(x_0) = 0$

$$\bullet \quad f(x) = f(\underset{\text{"0"}}{x_0}) + f'(x_0)(x - x_0) + w_f(x - x_0) \quad \underline{w_f \in o(x - x_0)}$$

$$g(x) = g(\underset{\text{"0"}}{x_0}) + g'(x_0)(x - x_0) + w_g(x - x_0) \quad \underline{w_g \in o(x - x_0)}$$

Valide in un intorno di x_0

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)(x - x_0) + w_f(x - x_0)}{g'(x_0)(x - x_0) + w_g(x - x_0)} = \frac{f'(x_0) + \frac{w_f(x - x_0)}{(x - x_0)}}{g'(x_0) + \frac{w_g(x - x_0)}{(x - x_0)}} \quad \begin{matrix} \nearrow 0 \\ \star \\ \searrow 0 \end{matrix}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \star \frac{f'(x_0)}{g'(x)}$$

F. I. $\frac{0}{0}$

Teo (de l'Hopital) Siano f, g derivabili in un intorno di $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

$$\text{Supp } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0 //$$

~~x~~ $g'(x) \neq 0$ in un intorno di $x_0 //$ (è poss $g'(x_0) = 0$)

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} //$$

Allora $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l$ (inoltre $g(x) \neq 0$ in un intorno di x_0)

Dim. 1. g è iniettiva in un intorno di x_0

Se $x_1 \neq x_2$ t.c. $g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow$ Nell'intervallo $[x_1, x_2]$ g verifica Rolle
 $\Rightarrow \exists c$ t.c. $g'(c) = 0$: contraddice ~~x~~

$\Rightarrow g(x) \neq 0$ in un intorno di x_0

2. Supp $x_0 \neq \pm \infty$ Definiamo per continuità

$$f(x_0) = g(x_0) = 0 \quad \text{Nell'intervallo } [x_0, x_1]$$

f/g verifica le ipotesi di Cauchy

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{g(x_1) - g(x_0)} = \frac{f(x_1)}{g(x_1)} = \frac{f'(\alpha)}{g'(\alpha)} \quad \begin{array}{l} \text{per qualche } \alpha \in (x_0, x_1) \\ \text{per ipotesi} \end{array}$$

$$\lim_{x_1 \rightarrow x_0} \frac{f(x_1)}{g(x_1)} = \lim_{x_1 \rightarrow x_0} \frac{f'(\alpha)}{g'(\alpha)} = \lim_{\alpha \rightarrow x_0} \frac{f'(\alpha)}{g'(\alpha)} \stackrel{\downarrow}{=} l$$

3. Supp $x_0 = +\infty$ Si applica la sost $x \rightarrow \frac{1}{y}$
 $x \rightarrow +\infty \quad y \rightarrow 0^+$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(1/y)}{g(1/y)} \quad \text{Fare il } \lim_{y \rightarrow 0^+} \quad \text{Posso applicare } 2$$

Quindi $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} \stackrel{H}{=} \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{f(1/y)}{g(1/y)} =$

$$= \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{f'(1/y) \cdot (-1/y^2)}{g'(1/y) \cdot (-1/y^2)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} \stackrel{H}{=} l.$$

$y \rightarrow 1/x$ per ipotesi

IMP. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

NO $\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f}{g} \right)'(x) //$

Esercizi •

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 + \ln(x) - e^{x-1}}{(x-1)^2} = -1$$

Componiamo $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - e^{x-1}}{x-1} = -1$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1$$

F.I. $\frac{0}{0}$ $g(x) = (x-1)^2$

$$g'(x) = 2x - 2 \neq 0 \text{ per } x \neq 1$$

(H) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x} - e^{x-1}}{2(x-1)} = -1$

F.I. $\frac{0}{0}$

Verifica le ipotesi di Hopital der ok
Der den = 2 $\neq 0$ ok

(H) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{-\frac{1}{x^2} - e^{x-1}}{2} = -1$

Terza ipotesi ok

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) + \ln(1-x)}{x^2}$ F.I. $\frac{0}{0}$

Tutto der $g(x) = x^2$ $g'(x) = 2x \neq 0$ in un intorno di 0

H $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) + \frac{1}{1-x} \cdot (-1)}{2x} = -\frac{1}{2}$ F.I. $\frac{0}{0}$

Tutto der Der den = 2 $\neq 0$

H $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin(x) + \frac{1}{(1-x)^2} (-1)}{2} = -\frac{1}{2}$ Terza ipotesi

- (Stupid2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 2x - 2} - x + 5 = 6$ F.I. $+\infty - \infty$

Razionalizzare $\rightarrow$ Fine

$$\sqrt{x^2 + 2x - 2} - x + 5 = x \left(\sqrt{1 + \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2}} - 1 + \frac{5}{x} \right) =$$

$$\frac{\sqrt{1 + \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2}} - 1 + \frac{5}{x}}{\frac{1}{x}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \text{F. I. } \frac{0}{0}$$

Der e Der den $-\frac{1}{x^2} = 0$ in un intorno di $+\infty$

$$H \frac{\frac{1}{2\sqrt{1 + \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2}}} \left(-\frac{2}{x^2} + \frac{4}{x^3}\right) - \frac{5}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}} \quad \text{più complicato di prima}$$

F. I. $\frac{0}{0}$

Sostituzione $\frac{1}{x} \rightarrow y$ $x \rightarrow +\infty$ $y \rightarrow 0^+$

$$\frac{\sqrt{1 + 2y - 2y^2} - 1 + 5y}{y} \quad \text{Da controllare per } y \rightarrow 0^+$$

$$H = \frac{\frac{1}{2\sqrt{1 + 2y - 2y^2}} (2 - 4y) + 5}{1} \xrightarrow{y \rightarrow 0} 6 = (\text{Risale a } 6) \text{ limite iniziale}$$

(prime due)

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos(x) - \sin(x)}{x \sin^2(x)} = -\frac{1}{3} \cdot 1 = -\frac{1}{3} \quad \text{F.I. } \frac{0}{0}$$

Der den $\sin^2(x) + x \cdot 2 \sin(x) \cos(x) = \sin^2(x) + x \sin(2x)$

Der ancora $\frac{2 \sin(x) \cos(x) + \sin(2x) + x \cos(2x) \cdot 2}{2 \sin(2x)}$ ancora $\frac{0}{0}$

Der $2 \sin(2x)$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos(x) - \sin(x)}{x^3} \cdot \frac{x^2}{\sin^2(x)}$$

H

$$H \quad \frac{\cos(x) - x \sin x - \cos(x)}{3x^2}$$

$$H \quad \frac{-\sin(x) - x \cos(x)}{6x}$$

$$H \quad \frac{-\cos(x) - \cos(x) + x \sin(x)}{6}$$

$$\xrightarrow{x \rightarrow 0} -\frac{1}{3}$$

$$-\frac{\sin(x)}{6x} - \frac{\cos(x)}{6} \xrightarrow{x \rightarrow 0} -\frac{1}{3}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(\pi x) (x^3 + x^2 + x - 3)}{\ln^2(x)} \quad \star$$

$$F.I. \frac{0}{0}$$

$$\text{Der den } 2 \ln(x) \cdot \frac{1}{x} \quad \text{////}$$

$$x^3 + x^2 + x - 3 = (x-1)(x^2 + 2x + 3)$$

Esercizio $\rightarrow$ Provare con H

$$\frac{\sin(\pi x) (x-1)(x^2 + 2x + 3)}{\ln^2(x)} = \underbrace{\frac{\sin(\pi x)}{\ln(x)}}_H \cdot \frac{(x-1)}{\ln(x)} \cdot (x^2 + 2x + 3)$$

$\downarrow x \rightarrow 1$
 1

$\downarrow x \rightarrow 1$
 6

$$H \quad \frac{\cos(\pi x) \cdot \pi}{\frac{1}{x}} = x\pi \cos(\pi x) \xrightarrow{x \rightarrow 1} -\pi$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \star = -\pi \cdot 1 \cdot 6 = -6\pi$$

Oss 1. Limiti notevoli $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$$

Con Hopital $\rightarrow$ immediati

Problema: per applicare Hopital devo fare la derivata di $\sin(x)$ e^x e $\ln(x)$ per calcolare le quali ho usato i limiti notevoli.

2. Ipotesi necessarie

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \sin(1/x)}{\ln(1+\sqrt{x})}$$

$$\text{F.I. } \frac{0}{0}$$

Prime due ipotesi ok provo la terza

$$H \quad \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right) + x \cos\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)}{\frac{1}{1+\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}} = (\underbrace{2\sqrt{x}} + \underbrace{2x}) \cdot \left[\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x} \cos\left(\frac{1}{x}\right) \right]$$

$\lim_{x \rightarrow 0^+}$ N. E. $\frac{1}{\sqrt{x}} \cos\left(\frac{1}{x}\right)$
 Terza ipotesi non è verificata

NON posso applicare H perché

$$\frac{x \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\ln(1+\sqrt{x})} = \underbrace{\frac{\sqrt{x}}{\ln(1+\sqrt{x})}}_{\rightarrow 1} \cdot \underbrace{\sqrt{x} \sin\left(\frac{1}{x}\right)}_{\rightarrow 0} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 \quad \equiv$$

• $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{1+x} = \cancel{0} \quad 0$ Non è F.I

Der H $\frac{\frac{1}{1+x}}{1} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$ ///

Esercizi

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^2 - x + 5) e^{-\sqrt{\ln(x)}}$$

F. I. $+\infty \cdot 0$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - x + 5}{e^{\sqrt{\ln(x)}}} \quad \text{F. I. } \frac{\infty}{\infty}$$

$$\text{Der den} = e^{\sqrt{\ln(x)}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\ln(x)}} \cdot \frac{1}{x} = \frac{e^{\sqrt{\ln(x)}}}{2x\sqrt{\ln(x)}}$$

$$H = \frac{4x - 1}{\frac{e^{\sqrt{\ln(x)}}}{2x\sqrt{\ln(x)}}} = \frac{(8x^2 - 2x)\sqrt{\ln(x)}}{e^{\sqrt{\ln(x)}}}$$

Den = prec

Num : stesso deg
+ $\sqrt{\ln(x)}$

- Soluzione 1. Sost $\sqrt{\ln(x)} = y$ ---- (gerarchia infinita)
- Soluzione 2. $(2x^2 - x + 5)e^{-\sqrt{\ln(x)}} =$

$$e^{\ln(2x^2 - x + 5) - \sqrt{\ln(x)}} = e^{\ln(2x^2 - x + 5) - \sqrt{\ln(x)}}$$

Basta calcolare $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(2x^2 - x + 5) - \sqrt{\ln(x)}$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(2x^2 - x + 5) \cdot \left(1 - \frac{\sqrt{\ln(x)}}{\ln(2x^2 - x + 5)}\right) = +\infty$$

$$\frac{\sqrt{\ln(x)}}{\ln(2x^2 - x + 5)} \stackrel{H}{=} \frac{0}{\infty} = 0$$

↓ 0 gerarchia

Esercizio

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x \sin(x)}$$

F. I. $+\infty - \infty$

Ricorrersi a H - ~ provare a risolvere