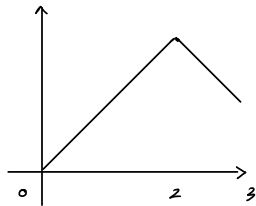


Esempi

$$f(x) = \begin{cases} x & x \in [0, 2] \\ 4 - x & x \in (2, 3] \end{cases}$$



$$f: [0, 3] \rightarrow \mathbb{R}$$

f continua in $[0, 3]$

Punto angoloso in $x = 2$: non derivabile in $(0, 3)$

$$\frac{f(3) - f(0)}{3 - 0} \neq f'(c) \quad \text{per qualche } c \in (0, 3)$$

$$\frac{1}{3} \quad f'(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0, 2) \\ -1 & x \in (2, 3] \end{cases}$$

• **Rolle** $f(x) = x^2$ $[0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$

continua e derivabile in $[0, 2]$ ok Lagrange
ok Cauchy

No Rolle perché $f(0) \neq f(2)$

$f'(x) = 2x$ NON verifica Rolle anche se $f'(0) = 0$

• **Cauchy** $f(x) = x^3$ $x \in [0, 2]$ continua
 $g(x) = x^2$ $x \in [0, 2]$ derivabili

$$\frac{f(2) - f(0)}{g(2) - g(0)} = \frac{8}{4} = 2 = \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{3c^2}{2c} = \frac{3}{2}c \quad c = \frac{4}{3} \in [0, 2]$$

$$f_1(x) = \begin{cases} x^3 & x \in [0, 2) \\ 20 & x = 2 \end{cases} \quad \frac{3}{2}c \in [0, 3]$$

$$\frac{f_1(2) - f_1(0)}{g(2) - g(0)} = \frac{20}{4} = 5 > 3$$

Relazioni tra monotonia e derivata prima

- $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile ovunque

$$f \text{ crescente in } (a, b) \iff f'(x) \geq 0$$

$$f \text{ decrescente in } (a, b) \iff f'(x) \leq 0$$

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \underbrace{o(f, x_0)}_{\text{infinitesimo}}$$

$$\text{Lagrange} \quad \frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)} = f'(c) \quad c \in (x_0, x)$$

$$\text{Se } f'(c) \geq 0 \Rightarrow \text{Rapp incrementale} \geq 0 \Rightarrow f \text{ crescente}$$

$$f'(c) \leq 0 \Rightarrow \text{ " " } \leq 0 \Rightarrow f \text{ decrescente}$$

$$\begin{aligned} f'(c) > 0 &\Rightarrow \text{Rapp incrementale} > 0 \implies \text{strett crescente} \\ f'(c) < 0 &\Rightarrow \text{Rapp incrementale} < 0 \implies \text{strett decrescente} \end{aligned}$$

Oss Punti estremi locali

$f'(x) > 0$ a sx di x_0 $\rightarrow$ $f'(x_0) = 0$ $\leftarrow$ $f'(x) < 0$ a dx di x_0



MAX relativo



Viceversa per il minimo

★ $M_a \exists (-\delta, \delta)$
 $\delta > 0$ t.c. f dec
in $(-\delta, 0)$ e f cresc
in $(0, \delta)$

Esempio $f(x) = x^4 \sin^2\left(\frac{1}{x}\right)$ in $[-1, 1]$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

tutti
minimi

$$f'(x) = 4x^3 \cdot \sin^2\left(\frac{1}{x}\right) + x^4 \cdot 2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \cos\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$= 4x^3 \sin^2\left(\frac{1}{x}\right) - x^2 \sin\left(\frac{2}{x}\right)$$

Der in 0 $f'(0) = 0$

$f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [-1, 1]$ $\star$ 0 è un min relativo

$$x = \frac{1}{k\pi}$$

Studio di funzione.

1. Dominio $(-\infty, a) \cup (b, c) \cup (d, +\infty)$

Esempio

2. Segno e zeri Studia la disequazione
 $f(x) \geq 0$

Esempio $c \in (b, c)$ $f(c) = 0$ $f(x)$

> 0 in $(-\infty, a)$
in (b, e)
 < 0 in (e, c)
in $(d, +\infty)$

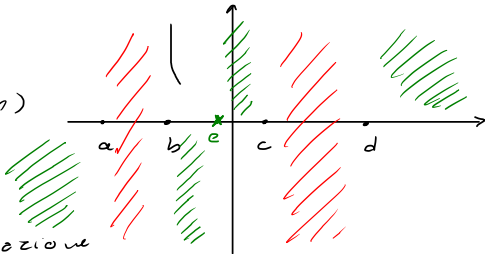
3. Limiti ai bordi del dominio

Esempio lim per $x \rightarrow \pm \infty$ $x \rightarrow a^-$ $x \rightarrow b^+$
 $x \rightarrow c^-$ $x \rightarrow d^+$

5. Trovano: discontinuità (tipo)

Se $f \rightarrow +\infty$ per $x \rightarrow x_0 \in \mathbb{R}$ asintoto verticale

Se $f \rightarrow l \in \mathbb{R}$ per $x \rightarrow \pm \infty$ asintoto orizz (orizz x)



• Asintoti obliqui Retta $y = ax + b$ t.c.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - ax - b = 0 \quad \text{Ipotesi}$$

$$\text{o } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - ax - b = 0$$

Calcolo di a e b : $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} - a - \frac{b}{x} = 0$

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a \in \mathbb{R}$ può esistere as obliquo
altrimenti non esiste as obliquo

Trovato a $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) - ax = b \in \mathbb{R}$ ho trovato as obliquo
altrimenti non c'è

Esercizio Calcolare asintoto obliquo (se esiste)

di $f(x) = x \ln \left(\frac{ex^2 + 1}{x^2 + 1} \right)$

4. Simmetrie / Periodicità

$f(x)$ è pari o dispari?
 $f(x)$ è periodica?

Se f pari o dispari $\Rightarrow$ Studio solo in $[0, +\infty) \cap$ dominio
Poi $f(x) = f(-x)$ o $f(x) = -f(-x)$
ribalto il grafico

Se f periodica di periodo r (cioè $f(x+r) = f(x) \forall x$)
Allora lo studio in un intervallo di lunghezza r $[a, a+r]$
e poi traslo il grafico

5. Studio di f' Calcolo di f' , punti di non derivabilità

studio di $f'(x) \geq 0 \rightarrow$ monotonia, estremi locali

6. Studio derivate successive : derivata seconda

Calcola (dove possibile) $f''(x)$ studio $f''(x) \geq 0$



$$f''(x) > 0$$



f' crescente $\Rightarrow$ coeff ang delle tg crescente

Analogamente $f'' < 0$

Oss Se $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

$\Rightarrow f'$ dec $\Rightarrow$ concavità verso il basso



$\ln(x)$ $\ln(x) \rightarrow \frac{1}{x}$

$$\rightarrow -\frac{1}{x^2}$$

f''

Se x_0 estremo locale



conc verso il basso



conc verso l'alto $f'' > 0$

$f'' < 0$

Non è un $\iff$

Esempio $x^n = f$ $f' = n x^{n-1}$ $f'' = n(n-1) x^{n-2}$

... $f^{(n)} = \underbrace{n!}_{> 0}$

n dispari in 0 non ha max o min

n pari in 0 ha min

Esercizio $f(x) = (1+x^2) e^{-\frac{1}{x-1}}$ Grafico + max e min (se esistono) in $[0,1) \cup (1,2]$

Domínio $x \neq 1$ $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$

Nessuna simmetria

Segno e zeri $f(x) \geq 0$ (> 0) sul dominio

Limiti $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 0$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

Asintoti obliqui $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$ Niente as obliquo

Derivata $f'(x) = 2x \cdot e^{-\frac{1}{x-1}} + (1+x^2) e^{-\frac{1}{x-1}} \left(\frac{1}{(x-1)^2} \right)$
 $= \frac{e^{-\frac{1}{x-1}}}{(x-1)^2} [2x^3 - 4x^2 + 2x + 1 + x^2] = \frac{e^{-\frac{1}{x-1}}}{(x-1)^2} [2x^3 - 3x^2 + 2x + 1]$

$f' \geq 0 \Leftrightarrow 2x^3 - 3x^2 + 2x + 1 \geq 0$ $\angle$ sempre > 0

$$2x^3 - 3x^2 + 2x + 1 \geq 0$$

$$g(x) = 2x^3 - 3x^2 + 2x + 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \underline{+\infty}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \underline{-\infty}$$

$$\underline{g'(x)} = 6x^2 - 6x + 2$$

$$x_{1/2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 48}}{12} \quad \text{NON } \in \mathbb{R} \quad \text{////}$$

$$\Rightarrow \underline{g'(x) > 0} \quad \forall x$$



$\Rightarrow \underline{g(x)}$ si annulla una e una sola volta di cui uno in x_0

$$g(x) \begin{cases} < 0 & (-\infty, x_0) \\ > 0 & (x_0, +\infty) \end{cases}$$

$$\Rightarrow f'(x) \begin{cases} < 0 & (-\infty, x_0) \\ > 0 & (x_0, +\infty) \end{cases}$$

Dom $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$

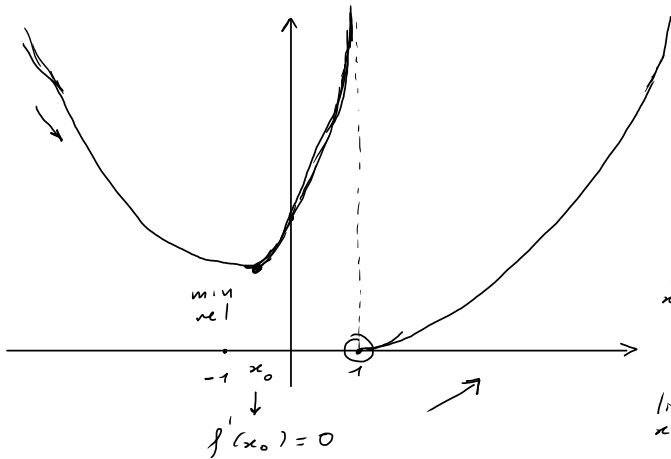
cerco x_0

$$g(1) = 2$$

$$g(0) = 1$$

$$g(-1) = -6$$

Dove f' è definita
 $\Rightarrow$ Teo degli zeri
 $x_0 \in (-1, 0)$



$$f(0) = e \quad f(2) = 5e^{-1} = 5/e$$

$$f(x_0) = ?$$

$$f(0) = e$$

$$\text{In } [0, 1) \cup (1, 2]$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$$

$$\text{Non ha max, ha Sup} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 0$$

$$\text{Non ha min, ha Inf} = 0$$

• $f(x) = e^x \sqrt[5]{\frac{x+1}{x-1}}$

Domínio

$x \neq 1 \quad \mathbb{R} - \{1\}$
 $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$

Simmetrie NO

Segno $f(x) \geq 0$ equivale a studiare $\frac{x+1}{x-1} > 0$

$f(x) \begin{cases} > 0 & (-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \\ < 0 & (-1, 1) \end{cases}$

$f(-1) = 0$

Limiti $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

Asintoto NO

Derivata

$f'(x) = e^x \sqrt[5]{\frac{x+1}{x-1}} + e^x \frac{1}{5 \sqrt[5]{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^4}} \cdot \frac{(x-1) - (x+1)}{(x-1)^2}$

$= e^x \left[\frac{(x+1)^{1/5}}{(x-1)^{1/5}} + \frac{(x-1)^{4/5}}{5 (x+1)^{4/5}} \cdot \frac{-2}{(x-1)^2} \right] = \dots$ Conti...

$$= \frac{e^x}{5(x+1)^{4/5}(x-1)^{6/5}} \underbrace{(5x^2 - 7)}_{> \text{Segno}}$$

> 0 dove è def
 $x \neq 1 \quad x \neq -1$

$$f'(x) = 0 \quad x = \pm \sqrt{\frac{7}{5}}$$

$$-\sqrt{\frac{7}{5}} \text{ max rel} \quad \sqrt{\frac{7}{5}} \text{ min rel}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f'(x) = +\infty$$

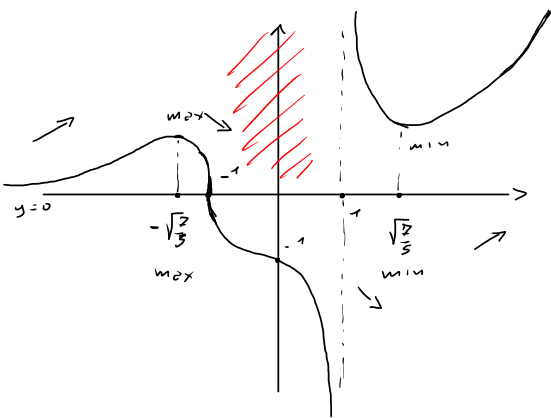
flesso a tg verticale

in $x = -1$ in cui $f(-1) = 0$

$$x_{1/2} = \pm \sqrt{\frac{7}{5}}$$

$$f'(x) \left. \begin{array}{l} > 0 \\ < 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} (-\infty, -\sqrt{\frac{7}{5}}) \\ (\sqrt{\frac{7}{5}}, +\infty) \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} > 0 \\ < 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} (-\sqrt{\frac{7}{5}}, -1) \cup (-1, 1) \\ \cup (1, \sqrt{\frac{7}{5}}) \end{array}$$



$$f(0) = -1$$

- $$f(x) = \frac{1}{1+\cos(x)} - \ln \frac{1}{1+\cos(x)} = \frac{1}{1+\cos(x)} + \ln(1+\cos(x))$$

Domínio $1+\cos(x) > 0$ $1+\cos(x) \neq 0$
 $\cos(x) \geq -1 \quad \forall x \Rightarrow$ Devo escludere solo i valori
 in cui $\cos(x) = -1$ $\pi + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$
 $\mathbb{R} - \{\pi + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$

Periodicità $f(x+2\pi) = f(x)$ Posso studiarla in un
 intervallo di lunghezza 2π
 $[0, 2\pi] - \{\pi\}$ NO Considero $(-\pi, \pi) \in \text{Domínio}$

Simmetria $\cos(-x) = \cos(x)$ pari $\Rightarrow f(x)$ è pari

Limiti È suff. studiarla in $[0, \pi)$ $x \ln(x) \rightarrow 0$
 $f(0) = \frac{1}{2} - \ln \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \ln(2) \quad ||||$ $x \rightarrow 0$

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x) = +\infty$$

$$\underbrace{\frac{1}{1+\cos(x)}}_{\ln} \left(1 + \underbrace{\ln(1+\cos(x))}_{\sim} \cdot (1+\cos(x)) \right)$$

⊙

Derivata $f'(x) = - \frac{-\sin(x)}{(1+\cos(x))^2} + \frac{1}{1+\cos(x)} \cdot \underline{(-\sin(x))} =$
 $= \frac{1}{(1+\cos(x))^2} \cdot [\sin(x) - \sin(x) \oplus \sin(x) \cos(x)] =$
 $= -\frac{1}{2} \frac{\sin(2x)}{(1+\cos(x))^2}$

Segno di f' dipende dal segno
di $\underline{-\sin(2x)}$ $x \in [0, \pi)$

$$f'(x) \begin{cases} < 0 & (0, \pi/2) \\ > 0 & (\pi/2, \pi) \end{cases}$$

$$f'(x) = 0 \text{ in } x = 0$$

Calcoli...

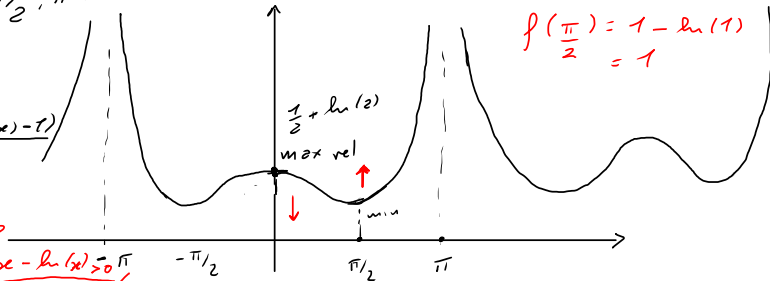
$$f''(x) = \frac{-(2\cos^2(x) + \cos(x) - 1)}{(1+\cos(x))^3}$$

Esercizio Segno

$$\frac{1}{g(x)} - \ln\left(\frac{1}{g(x)}\right) \quad g(x) \geq 0$$

$\forall x > 0, \underline{x - \ln(x) > 0}, \pi$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 - \ln(1) = 1$$



- $$f(x) = \frac{1}{\ln^2(x)} - \frac{2}{\ln(x)} + 1 = \left(\frac{1}{\ln(x)} - 1 \right)^2$$

Esercizio Dominio $x > 0$ $\ln(x) \neq 0$ $x \neq 1$
 $(0, 1) \cup (1, +\infty)$

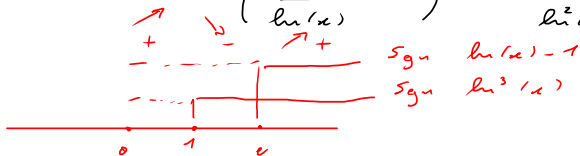
Segno sempre ≥ 0

Nulla solo in $\ln(x) = 1$ cioè $x = e$ $f(e) = 0$ min assoluto

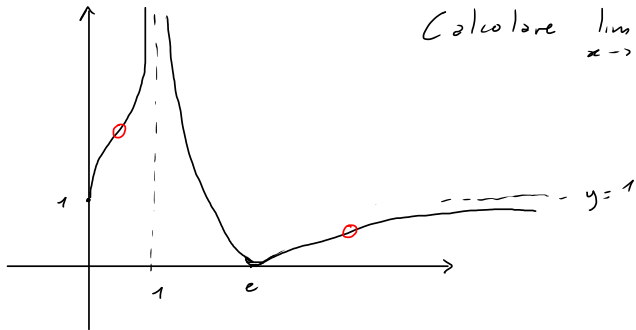
Limiti $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$ $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$

Derivata $2 \left(\frac{1}{\ln(x)} - 1 \right) \cdot -\frac{1/x}{\ln^2(x)} = 2 \frac{(\ln(x) - 1)}{\cancel{x} \ln^3(x)}$



Calcolare $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x)$



Calcolare $f''(x) = -2 \frac{(\ln^2(x) + \ln(x) - 3)}{x^2 \ln^4(x)}$

Studiare segno

$\underbrace{\ln^2(x) + \ln(x) - 3}_{y} \rightsquigarrow y^2 + y - 3 \quad \text{///}$
 $y \leftrightarrow \ln(x)$