Punti di non derivabilità

$f: A \to \mathbb{R}$ $\quad x_0 \in A$

1. x_0 punto angoloso se $\exists \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = l_1 \in \mathbb{R}$

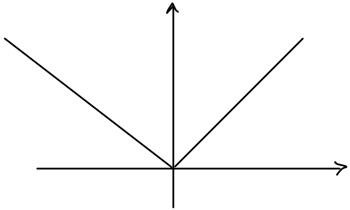
$\exists \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = l_2 \in \mathbb{R}$ e $l_1 \neq l_2$

2. x_0 flesso a tg verticale se $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \pm\infty$

3. x_0 cuspide $\exists \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \pm\infty$

$\exists \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \mp\infty$

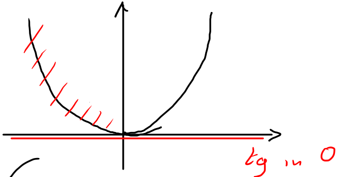
Esempio $f(x) = |x|$



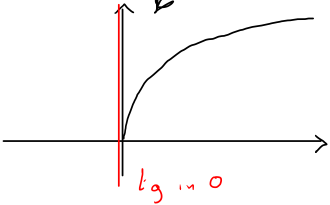
Der dx in 0 è $+1$

Der sx in 0 è -1

Esempio



inversa



Der = 0 $\Rightarrow$ tg oriz

$f(x) = x^2 \qquad x \geq 0$

Invertibile

$g(x) : [0, +\infty) \longrightarrow [0, +\infty)$

$g(x) = \sqrt{x}$

$$\lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{x} + h - \cancel{x}}{h\left(\sqrt{x+h} + \sqrt{x}\right)} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Per $x \to 0^+$ tale derivata tende a $+\infty$

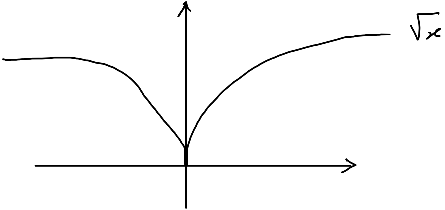


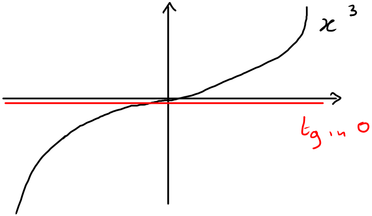
grafico di $\sqrt{|x|}$

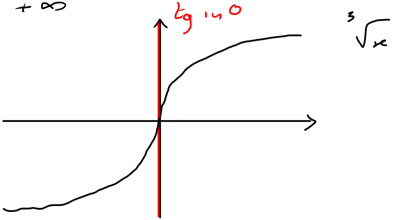
In 0 cuspide

Flesso tg verticale $\qquad g(x) = \sqrt[3]{x} \qquad \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt[3]{x+h} - \sqrt[3]{x}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{x} + h - \cancel{x}}{h\left(\sqrt[3]{(x+h)^2} + \sqrt[3]{x(x+h)} + \sqrt[3]{x^2}\right)} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

Per $x \to 0$ la derivata $\longrightarrow +\infty$





Proposizione Sia f derivabile in x_0 allora f continua in x_0

Dim
$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \underbrace{\omega(x)}_{\in\, o(x - x_0)}$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} f(x_0) + \underbrace{f'(x_0)}_{\in \mathbb{R}}\underbrace{(x - x_0)}_{\to 0} + \underbrace{\omega(x)}_{\to 0} = f(x_0)$$

Oss Abbiamo spesso calcolato $f'(x)$

$f'(x)$ è una nuova funzione con dominio $\subset$ dominio di A

$\mathrm{Dom}(f') = \{$punti in cui A è derivabile$\}$

$\mathrm{Dom}(f') = \mathrm{Dom}(f)$ e f' continua allora $f \in C^1$

$\mathrm{Dom}(f'') = \mathrm{Dom}(f)$ e f'' continua allora $f \in C^2$

... $\exists$ funzioni C^∞ Esempio $f(x) = e^x$

$f(x) = \mathrm{sen}(x)$ $\cos(x)$

Calcolo delle derivate Con le ovvie ipotesi di derivabilità

- $a, b \in \mathbb{R}$ $(af+bg)' = af' + bg'$ (Esercizio)
- $(fg)' = f'g + fg'$ Prodotto

Dim $\dfrac{fg(x+h) - fg(x)}{h} = \dfrac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} =$

$= \left[f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x) \right] \dfrac{1}{h}$

$= g(x+h) \left[\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} \right] + f(x) \left[\dfrac{g(x+h) - g(x)}{h} \right]$

$\xrightarrow[h \to 0]{} g(x) f'(x) + f(x) g'(x)$

$\downarrow$

perché g continua

- $\left(\frac{1}{g}\right)'$ Supponendo $g(x_0) \neq 0$ $x_0 \in \mathrm{Dom}\left(\frac{1}{g}\right)$

$$\left(\frac{1}{g}\right)' = -\, g'/g^2$$

Dim $\left(\frac{1}{g(x+h)} - \frac{1}{g(x)}\right)\frac{1}{h} = \frac{g(x) - g(x+h)}{g(x)\,g(x+h)} \cdot \frac{1}{h} \xrightarrow[h \to 0]{} -\frac{g'(x)}{g^2(x)}$

- Prodotto + Quoziente $\left(f/g\right)' = f' \cdot \frac{1}{g} + f\left(-\, g'/g^2\right)$

$$= \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

• Composizione $(f \circ g)'$ in x_0

Ipotesi g der in x_0 e f derivabile in $g(x_0)$

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0) \qquad (f \circ g)' = f'(g) \cdot g'$$

Dim $\frac{(f \circ g)(x+h) - (f \circ g)(x)}{h} = \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h} =$

$$= \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{g(x+h) - g(x)} \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \underset{\substack{h \to 0 \\ h_1 \to 1}}{\longrightarrow} f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Ipotesi $g(x_0+h) \neq g(x_0)$ in un intorno di x_0

$g(x+h) - g(x) = h_1 \qquad \frac{f(g(x)+h_1) - f(g(x))}{h_1} \longrightarrow f'(g(x))$

$h \to 0 \implies h_1 \to 0$ perché g continua

Oss Se g costante in un intorno di x_0

$(f \circ g)(x) = f(g(x))$ è costante in un intorno di x_0

$$\Rightarrow (f \circ g)'(x_0) = 0 = f'(g(x_0)) \cdot \underbrace{g'(x_0)}_{=0}$$

Esempio $F(x) = \ln\left(\dfrac{x+1}{x-2}\right) = (f \circ g)(x)$

$g(x) = \dfrac{x+1}{x-2}$

$f(x) = \ln(x)$

$F'(x) = f'(g(x))\, g'(x)$

$$= \frac{1}{\frac{x+1}{x-2}} \cdot \frac{(x-2)-(x+1)}{(x-2)^2} = \frac{-3}{(x+1)(x-2)}$$

- Inversa Supp $f'(x_0) \neq 0$ e f invertibile

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$ nel punto $y_0 = f(x_0)$

$$f^{-1}(y_0) = x_0$$

Dim Osserviamo che f' ben definita $\Rightarrow$ f continua

Posso considerare f su un intorno di x_0

f cont e inv in un intervallo $\Longrightarrow$ f^{-1} continua

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \qquad \lim_{y \to y_0} f^{-1}(y) = f^{-1}(y_0)$$

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} \xrightarrow[\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}]{} \frac{1}{f'(x_0)}$$

Esempi • $f(x) = e^x \qquad f^{-1}(y) = \ln(y)$

$$\frac{1}{\underset{\sim}{f'(x)}} = (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

$f'(x) = e^x$

$f'(f^{-1}(y))$

$= e^{\ln(y)} = y$

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{y} = (\ln(y))'$$

$\cos(y) \geq 0$

• $f(x) = \text{sen}(x) \qquad f^{-1}(y) = \text{arcsen}(y) \qquad \underbrace{[-\pi/2, \pi/2]}_{} \longrightarrow [-1, 1]$

Posso calcolarla solo in $f'(x) \neq 0 \qquad f'(x) = \cos(x)$

$x \neq \pi/2 + k\pi \qquad k \in \mathbb{Z}$

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{\cos(\text{arcsen}(y))} =$$

prendo la radice positiva

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - \text{sen}^2(\text{arcsen}(y))}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

- $(\arccos)'(y) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}}$

Esercizio

- $(\operatorname{arctg})'(y)$

$$\operatorname{tg}'(x) = \left(\frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}\right)' = \frac{\cos(x)\cdot\cos(x) - \operatorname{sen}(x)(-\operatorname{sen}(x))}{\cos^2(x)} = \begin{cases} \dfrac{1}{\cos^2(x)} \\ 1 + \operatorname{tg}^2(x) \end{cases} \quad f' \ //$$

$$(\operatorname{arctg})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg}(y))} = \frac{1}{1+y^2}$$

Esempi • Sia $\alpha \in \mathbb{R} - \{0\}$ $\quad f(x) = x^{\alpha}$ $\quad x \geq 0$

Già visto $(x^n)' = n\, x^{n-1}$ $\quad n \in \mathbb{N}$

Sia $n \in \mathbb{Z}$ $\quad n < 0$ $\quad (x^n)' = \left(\frac{1}{x^{-n}}\right)' =$

$$- \frac{(-n\, x^{-n-1})}{x^{-2n}} = n\, x^{n-1}$$ Formula valida $\forall n \in \mathbb{Z} - \{0\}$

$(x^{1/n})'$ come funzione inversa di $x^n \longrightarrow \sqrt[n]{x}$

$$(x^{1/n})' = \frac{1}{(\text{Der di } x^n \text{ calcolata } \sqrt[n]{x})} = \frac{1}{n(\sqrt[n]{x})^{n-1}} =$$

$$= \frac{1}{n} \cdot x^{\frac{1-n}{n}} = \frac{1}{n}\, x^{1/n - 1}$$

$$\left(x^{\frac{m}{n}}\right)' \qquad g(x) = x^m \qquad f(x) = \sqrt[n]{x} \qquad f'(x) = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}$$

$$(f \circ g)(x) = f(x^m) = x^{m/n}$$

$$(f \circ g)' = f'(g(x)) \cdot g'(x) = \frac{1}{n}(x^m)^{\frac{1}{n}-1} \cdot (m x^{m-1}) =$$

$$= \frac{m}{n} x^{\frac{m}{n} - \cancel{m} + \cancel{m} - 1} = \frac{m}{n} x^{\frac{m}{n}-1} \qquad (x^a)' = a x^{a-1}$$

$$\forall a \in \mathbb{Q} - \{0\}$$

Quindi per densità $\forall \alpha \in \mathbb{R} - \{0\}$ $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha - 1}$

- $a > 0$ $a \neq 1$ $(a^x)' = a^x \ln(a)$

Esercizi

- $a > 0$ $a \neq 1$ $(\log_a x)' = \frac{1}{x} \log_a e$

Esempio $\quad \operatorname{sen}(x)^{\cos(x)} =$

$$= e^{\ln\left(\operatorname{sen}(x)^{\cos(x)}\right)} = e^{\cos(x)\ln(\operatorname{sen}(x))}$$

Derivata $\quad \dfrac{d}{dx}\left(\operatorname{sen}(x)^{\cos x}\right) = e^{\cos(x)\ln(\operatorname{sen}(x))} \cdot$

$$\cdot \left[-\operatorname{sen}(x)\ln(\operatorname{sen}(x)) + \cos(x) \cdot \frac{1}{\operatorname{sen}(x)} \cdot \cos(x) \right]$$

$$= \operatorname{sen}(x)^{\cos(x)} \cdot \left[\frac{\cos^2(x)}{\operatorname{sen}(x)} - \operatorname{sen}(x)\ln(\operatorname{sen}(x)) \right]$$

Esempio $\quad f(x) = |x| \qquad f'(x) = \operatorname{sgn}(x)$

$$|g(x)|' = g'(x) \cdot \operatorname{sgn}(g(x))$$

Esercizio $f(x) = \operatorname{sen}\left(\dfrac{x}{|x|+1}\right) + 2x$

Calcolare (se esiste) $(f^{-1})'(y)$ in $y_0 = 1 + \operatorname{sen}\left(\frac{1}{3}\right)$

- **Invertibilità** $2x$ monotona crescente (strettamente)

Consideriamo $\dfrac{x}{|x|+1}$: oss che é dispari

$$\frac{-x}{|-x|+1} = -\frac{x}{|x|+1}$$

Valutiamo solo per $x \geq 0$

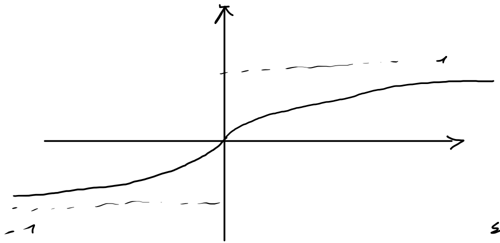
$x_1 > x_2$ $\qquad \dfrac{x_1}{|x_1|+1} - \dfrac{x_2}{|x_2|+1} = \dfrac{\cancel{x_1 x_2} + x_1 - \cancel{x_1 x_2} - x_2}{(x_2+1)(x_1+1)}$

$$= \frac{x_1 - x_2}{(x_1+1)(x_2+1)} > 0$$

funz crescente per $x \geq 0$

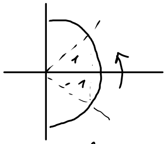
in 0 vale 0

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{|x|+1} = 1$$



$\dfrac{x}{|x|+1}$ $\qquad \mathbb{R} \to (-1, 1)$

$\operatorname{sen}\left(\dfrac{x}{|x|+1}\right)$



sen monotono crescente

$f(x) = \underbrace{\operatorname{sen}\left(\dfrac{x}{|x|+1}\right)} + \underbrace{2x}$ monotona crescente $\Rightarrow$ invertibile

$(f^{-1})'(y_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$ dove x_0 è t.c. $f(x_0) = y_0 = 1 + \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{3}\right)$

Proviamo $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \operatorname{sen}\left(\dfrac{1/2}{1/2 + 1}\right) + 2 \cdot \dfrac{1}{2} = \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{3}\right) + 1 \qquad x_0 = \dfrac{1}{2}$

$$(f^{-1})'\left(1+\operatorname{sen}\left(\frac{1}{3}\right)\right)=\frac{1}{f'\left(\frac{1}{2}\right)}=\frac{1}{\cos\left(\frac{x}{|x|+1}\right)\cdot\frac{(|x|+1)-x\,\operatorname{sgn}(x)}{(|x|+1)^2}+2}$$

$\downarrow$ da valutare in $\frac{1}{2}$

$$=\left.\frac{1}{\cos\left(\frac{x}{|x|+1}\right)\cdot\frac{1}{(|x|+1)^2}+2}\right|_{x_0=\frac{1}{2}}$$

$x\,\operatorname{sgn}(x)=|x|$

$|x|+1-|x|=1$

$$=\frac{1}{\cos\left(\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{4}{9}+2}.$$

Coeff ang della tg al grafico di f^{-1} nel punto $y_0=1+\operatorname{sen}\left(\frac{1}{3}\right)$

Esercizio $\quad f(x) = x^\alpha \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \qquad \alpha > 0$

$\mathrm{Dom} = \mathbb{R} - \{0\}$

$\lim_{x \to 0} x^\alpha \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ Prolungabile per continuità in $x = 0$ definendo $f(0) = 0$

Dominio $\mathbb{R}$

$$f'(x) = \alpha x^{\alpha-1} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) + x^\alpha \cos\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$= \alpha x^{\alpha-1} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) - x^{\alpha-2} \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

Ben definito (prolungabile in 0) per $\underline{\alpha > 2} \Rightarrow \underline{f \in C^1}$

Vediamo il rapporto incrementale in $x_0 = 0$

$$\lim_{h \to 0} \Big[\underbrace{h^\alpha \operatorname{sen}\left(\frac{1}{h}\right)}_{f(h)} - \underbrace{0}_{f(0)}\Big] \cdot \frac{1}{h} = \lim_{h \to 0} h^{\alpha-1} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{h}\right) = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha > 1 \\ \text{N.E} & \text{se } 0 < \alpha \le 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow f'(0) = 0 \quad \forall \alpha > 1$

$1 < \alpha \le 2$ Der ovunque ma $f \notin C^1$

Derivate e monotonia

f crescente in un intorno di x_0

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$ Che segno ha?

Se $h>0$ $\quad \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} > 0$

$x_0+h > x_0$

$\Downarrow$

$f(x_0+h) > f(x_0)$

Se $h<0$ $\quad \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} > 0$

$x_0+h < x_0$

$\Downarrow$

$f(x_0+h) < f(x_0)$

$\Rightarrow$ Se f derivabile in x_0

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \geq 0$$

Teo permanenza del segno

Esempio $f(x) = x^3$ monotona crescente

$f'(x) = 3x^2 \qquad f'(0) = 0$

- **Analogamente** f decrescente in un intorno di x_0 e f derivabile in $x_0 \implies f'(x_0) \leq 0$

Viceversa f derivabile in x_0 e $f'(x_0) > 0$

$$f(x) = f(x_0) + \underbrace{f'(x_0)}(x - x_0) + \underbrace{\omega(x)}_{\in\, o(x - x_0)}$$

$x - x_0 > 0$

$\implies f(x) > f(x_0)$

$x - x_0 < 0 \implies f(x) < f(x_0)$ $\implies$ f crescente in un intorno di x_0

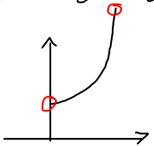
Def Un punto x_0 si dice stazionario per f se f derivabile in x_0 e $f'(x_0) = 0$

Def Un punto x_0 si dice estremo locale per f se $\exists$ intorno di x_0 (diciamo U_{x_0}) t.c. $f(x) \leq f(x_0)$ $\forall x \in U_{x_0}$

oppure $f(x) \geq f(x_0)$ $\forall x \in U_{x_0}$

Teorema (Fermat) Se f derivabile in x_0 estremo locale interno al dominio allora $f'(x_0) = 0$.

Esempio $f(x) = e^x$ $[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$



max in $x = 1$

min in $x = 0$

$f'(x) \neq 0$ ovunque