

Continuità $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ continua in $x_0 \in A$

se $\forall \varepsilon > 0 \quad \underline{\exists \delta > 0}$ t.c. $|x_0 - y| < \delta \Rightarrow |f(x_0) - f(y)| < \varepsilon$

Esempio $f(x) = e^x \quad x_0 = 0$

$$|e^{x_0 + \delta} - e^{x_0}| < \varepsilon \quad |e^\delta - 1| < \varepsilon$$

$$e^\delta - 1 < \varepsilon$$

$$e^\delta < \varepsilon + 1$$

$$\delta_0 < \ln(1 + \varepsilon)$$

$$x_0 = 10 \quad |e^{10 + \delta} - e^{10}| < \varepsilon$$

$$e^{10} (e^\delta - 1) < \varepsilon$$

$$e^\delta < \frac{\varepsilon}{e^{10}} + 1$$

$$\delta_{10} < \delta_0$$

$$\delta_{10} < \ln\left(1 + \frac{\varepsilon}{e^{10}}\right)$$

Quindi δ dipende da ε e da x_0

Def Una funzione $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ si dice uniformemente continua se $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ t.c. $|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

oss $f(x) = e^x$ non è unif cont in $[0, +\infty)$

Fissiamo $\varepsilon > 0$ se esistesse $\delta > 0$ che verifica la definizione

allora $\underbrace{\forall x \in [0, +\infty)}_{y = x + \delta/2} |e^{x + \delta/2} - e^x| < \varepsilon$

cioè $\delta/2 < \ln\left(1 + \frac{\varepsilon}{e^x}\right) \quad x \rightarrow +\infty \quad \ln\left(1 + \frac{\varepsilon}{e^x}\right) \rightarrow 0$

oss $f(x) = ax + b \quad a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow f$ è unif cont

su tutto $\mathbb{R} \quad |f(x) - f(y)| = |a| \underbrace{|x - y|}_{< \delta} < |a| \cdot \frac{\varepsilon}{|a|} = \varepsilon$
Prendo $\delta = \frac{\varepsilon}{|a|}$

Oss $f(x) = \sin(e^x)$ Funzione limitata ma
non è unif cont su $[0, +\infty)$

Fissato ε qualsiasi δ scegliate $\exists x_0 \in [0, +\infty)$ t.c.

$$e^{x_0+\delta} - e^{x_0} > 2\pi \quad \text{infatti prendo } e^{x_0} > \frac{2\pi}{e^\delta - 1}$$

$$\text{suft prendere } x_0 > \ln\left(\frac{2\pi}{e^\delta - 1}\right)$$

$\Rightarrow$ la funzione $f(x)$ nell'intervallo $[x_0, x_0 + \delta]$

assume tutti i valori tra -1 e 1 perché

$$[x_0, x_0 + \delta] \xrightarrow{e^x} \mathbb{I} \ni [a, a + 2\pi] \xrightarrow{\sin(x)} [-1, 1]$$

Quello che è rilevante per l'uniforme continuità è non solo la crescita della funzione ma il tasso di crescita

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y}$$

crescita dell'immagine
variazione dell'argomento

Rapporto incrementale
di f in $[x, y]$.

Oss $f(x) = e^x \quad \underbrace{[-M, M]} \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{è unif cont}$

Fissiamo $\varepsilon > 0$ e prendiamo $\delta = \ln\left(1 + \frac{\varepsilon}{e^M}\right)$ ///

$$\underset{x > y}{|e^x - e^y|} = e^y (e^{x-y} - 1) \underset{|x-y| < \delta} < e^M \left(e^{\ln(1 + \varepsilon/e^M)} - 1 \right)$$

$$= e^M \left(1 + \frac{\varepsilon}{e^M} - 1 \right) = \varepsilon$$

Esercizio $f(x) = x^2 : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ NON È UNIF CONT

$f(x) = x^2 : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ È unif cont

Facts: 1. Unif cont $\Rightarrow$ continua ovunque

2. Def $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ si dice Lipschitziana se $\exists L > 0$

t.c. $\forall x, y \in A \quad |f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$

Lip $\Rightarrow$ unif cont

3. (Heine - Cantor) f continua su un compatto $\Rightarrow$ unif cont

4. Teo (crescita limitata) $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ I intervallo qualsiasi
unif cont allora $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ t.c. $|f(x)| \leq \alpha|x| + \beta$
 $\forall x \in I$.

Non vale il viceversa (sen (e^x))

Esercizio • $f(x) = \frac{1}{x} \quad (0, a] \rightarrow \mathbb{R} \quad a \in \mathbb{R}$

NON è unif cont

• $f(x) = \sqrt{x} \quad [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ è unif cont

(Hint: dim che $|f(x) - f(y)| \leq \sqrt{|x-y|}$)

Rapporto incrementale

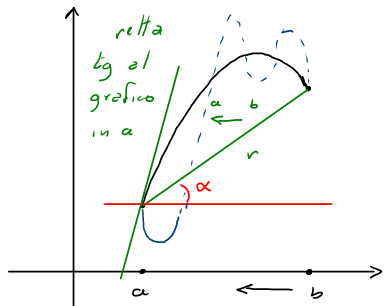


grafico di $f(x)$ $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

r segmento di retta tra

$(a, f(a))$ e $(b, f(b))$

retta secante al grafico in a e b

$$y = (x - a) \underbrace{\frac{f(b) - f(a)}{b - a}} + f(a)$$

$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ è il coeff angolare della secante cioè $\text{tg}(\alpha)$

La crescita "locale" della funzione f sarà rappresentata

dal $\lim_{b \rightarrow a} \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ in a

Geometricamente: quando $b \rightarrow a$ la retta secante tra a e b tende alla retta tangente in a .

⊙ Retta tg al grafico in a è la migliore app. lineare della funzione in a .

Def $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ si dice derivabile in $x_0 \in A$ se e solo se

$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \mathbb{R}$. In tal caso tale limite

si indica con $f'(x_0)$ $\left(\frac{d}{dx} f \right) (x_0)$

Geom $f'(x_0)$ coeff ang della tg al grafico in x_0

Oss f derivabile in x_0

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)}_{\substack{\text{retta} \\ \text{tg al grafico in } x_0}} + \underbrace{\left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0) \right)(x-x_0)}_{\text{funzione } w(x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} w(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0) \right) (x-x_0) = 0$$

$\searrow 0 \qquad \qquad \qquad \searrow 0$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{w(x)}{(x-x_0)} = 0$$

$w(x)$ è infinitesimo in x_0 di ordine superiore a $(x-x_0)$

$$\underbrace{w(x) \in o(x-x_0)}$$

La differenza tra grafico e retta tg è infinitesima (in x_0) di ordine > 1

Notazione $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$

cambio variabile $x \rightarrow x_0 + h$

Esempi • $f(x) = a \quad a \in \mathbb{R} \quad \text{costante}$

$\Rightarrow$ derivabile e $f'(x) = 0 \quad \forall x$

• $f(x) = x^n \quad n > 0$

$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \left(\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x_0^{n-i} h^i - \overset{(x_0+h)^n}{x_0^n} \right) \cdot \frac{1}{h}$

• $i=0 \rightarrow \binom{n}{0} x_0^n h^0 = x_0^n$

$= \left(\sum_{i=1}^n \binom{n}{i} x_0^{n-i} h^i \right) \cdot \frac{1}{h} = \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} x_0^{n-i} \underbrace{h^{i-1}}_{\substack{i=1 \\ \binom{n}{1} x_0^{n-1} \cdot h^0}} \xrightarrow{h \rightarrow 0} n x_0^{n-1}$

Vale $\forall x_0 \in \mathbb{R}$

- $f(x) = e^x$

$$\frac{e^{x_0+h} - e^{x_0}}{h} = e^{x_0} \underbrace{\left(\frac{e^h - 1}{h} \right)}_{\xrightarrow{h \rightarrow 0} 1} \xrightarrow{h \rightarrow 0} e^{x_0}$$

$\forall x_0 \in \mathbb{R}$

- $f(x) = \sin(x)$

$$\frac{\sin(x_0+h) - \sin(x_0)}{h} = \frac{\sin(x_0)\cos(h) + \cos(x_0)\sin(h) - \sin(x_0)}{h}$$

prostaferesi

$$= \sin(x_0) \left(\frac{\cos(h) - 1}{h} \right) + \frac{\cos(x_0)\sin(h)}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} \cos(x_0)$$

$$\xrightarrow{h \rightarrow 0} \frac{\cos^2(h) - 1}{h(\cos(h) + 1)} = - \frac{\sin^2(h)}{h \cos(h+1)} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

- $f(x) = \ln(x)$

$$\frac{\ln(x_0+h) - \ln(x_0)}{h} = \frac{\ln\left(\frac{x_0+h}{x_0}\right)}{h} = \frac{\ln\left(1 + \frac{h}{x_0}\right)}{\frac{h}{x_0}} \cdot \frac{1}{x_0}$$

$$\xrightarrow{h \rightarrow 0} \frac{1}{x_0}$$

Esempio $f(x) = |x|$ $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

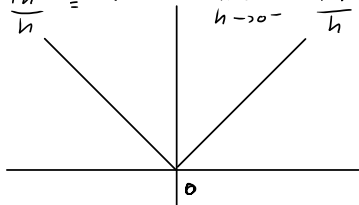
È derivabile in 0?

$$x_0 = 0 \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h| - |0|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h|}{h} \quad \text{N.E.}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|h|}{h} = 1$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{|h|}{h} = -1$$

$$\text{N.E.} \quad \lim_{h \rightarrow 0}$$



Punti angolosi cioè punti
in cui $\exists$ lim sx
 $\exists$ lim dx ma sono diversi

Punti di non derivabilità

Angolosi N.E. lim

Cuspidi $\rightarrow \lim \infty$ oppure

Flessi



N.E. lim

e $\lim dx$ e $sx \infty$