

Teo di esistenza degli zeri $\Rightarrow$ Teo dei valori intermedi

$f: I \rightarrow \mathbb{R}$ I intervallo f continua

allora $\text{Im}(f) \supset (\inf(f), \sup(f))$

$\inf(f) = \min(f)$ allora $\text{Im}(f) \supset [\min(f), \sup(f))$

$\sup(f) = \max(f)$ allora $\text{Im}(f) \supset (\inf(f), \max(f)]$

$\text{Im}(f) \subseteq [\inf(f), \sup(f)]$ sempre

Se $\inf(f), \sup(f) \in \text{Im}(f)$

$\text{Im}(f) = [\min(f), \max(f)]$ •

In generale $f(I)$ è un intervallo

Def Un sottoinsieme C di $\mathbb{R}$ si dice compatto (o compatto per successioni) se ogni successione a valori in C ammette almeno una sottosuccessione convergente ad un elemento di C .

• **Esempio** $[0, 1)$ limitato
 $\{a_n\} \subseteq [0, 1)$ è una succ limitata
 $\Rightarrow \exists$ sottosucc convergente

Ma $a_n = 1 - \frac{1}{n}$ $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 1 \notin [0, 1)$

• La def non è verificata perché $[0, 1)$ è aperto e dx

• **Esempio** C compatto deve essere limitato

Se fosse illimitato sup: $\forall n \exists a_n \in C \quad a_n > n$
 $\Rightarrow$ La successione $\{a_n\}$ diverge a $+\infty$

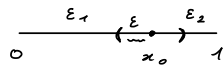
Compatto $\Leftrightarrow$ chiuso e limitato

Def • Un sottoinsieme C di $\mathbb{R}$ si dice chiuso se $\mathbb{R} - C$ è aperto

- Un sottoinsieme A di $\mathbb{R}$ si dice aperto se contiene un intorno di ogni suo punto (cioè $x_0 \in A \Rightarrow \exists \varepsilon > 0$ l.c. $B(x_0, \varepsilon) \subseteq A$)

Esempi Intervalli $(0, 1)$ (a, b)
Sia $x_0 \in (0, 1)$ $|x_0 - 0| = \varepsilon_1 > 0$ $|x_0 - 1| = \varepsilon_2 > 0$

Prendiamo $\varepsilon = \min \{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ $B(x_0, \varepsilon) \subset (0, 1)$



Quindi $(0, 1)$ aperto
 (a, b) aperto $\forall a, b \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow (-\infty, a] \cup [b, +\infty)$ chiuso

Esempio $(-\infty, \alpha]$ chiuso perché $\mathbb{R} - (-\infty, \alpha] = (\alpha, +\infty)$
aperto

Unione (anche infinita) di aperti è aperta. (ovvio dalla def)

$\Downarrow$ Dato che "complementare U " = " $\cap$ complementari"

Intersezione (anche infinita) di chiusi è chiusa

Esempio $I_n = [0, 1 - \frac{1}{n}]$ $n > 0$ intervalli chiusi

$\bigcup_{n>0} [0, 1 - \frac{1}{n}] = [0, 1)$ non è chiuso

Perché $\mathbb{R} - [0, 1) = (-\infty, 0) \cup [1, +\infty)$
non è aperto perché non contiene intorno di 1.

$\Rightarrow \exists$ insiemi né aperti né chiusi.

* Compatto $\Leftrightarrow$ chiuso e limitato

Oss Se C è chiuso ogni successione di elementi in C è convergente
ha limite in C

Dim Supp $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a \quad a_n \in C \quad \forall n \quad \text{e} \quad a \notin C$

Ma $a \notin C \Rightarrow a \in \mathbb{R} - C = A$ aperto

$\Rightarrow \exists \varepsilon > 0$ t.c. $B(a, \varepsilon) \subset A$
cioè $B(a, \varepsilon) \cap C = \emptyset$

$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \neq a$: contraddizione.

* • $\Leftarrow$ C chiuso e limitato : prendiamo succ $\{a_n\} \in C$ limitato
 $\Rightarrow$ (B-W) $\exists$ sottosucc convergente $\{a_{n_k}\} \quad a_{n_k} \rightarrow a$
 C chiuso $\Rightarrow a \in C$
Quindi C compatto (suff. ; già visto con esempi necessari)

Teo (Weierstrass) Sia $f: C \rightarrow \mathbb{R}$ continua con C compatto

Allora $f(C)$ è compatto.

Dim. Prendo succ in $f(C)$ diciamo $\{y_n\} \subseteq f(C)$

Per def $\exists x_n \in C$ t.c. $f(x_n) = y_n$

Quindi $\{x_n\}$ succ in C che è compatto $\Rightarrow \exists$ sottosuccessione

$\{x_{n_k}\} \subseteq C$ t.c. $\lim_{n_k \rightarrow +\infty} x_{n_k} = x \in C$

Teo (ponte) + f continua $\Rightarrow \lim_{n_k \rightarrow +\infty} f(x_{n_k}) = f(x) \in f(C)$

Quindi $\{y_{n_k}\}$ sottosucc di $\{y_n\}$ che conv y_{n_k}
ad un elemento di $f(C)$.

Corollario / Conseguenza

$f: C \rightarrow \mathbb{R}$ continua C compatto
 $\Rightarrow f$ ammette max e min
cioè $\inf(f), \sup(f) \in \text{Im}(f)$

In particolare se $C = [a, b]$ allora
 $f(C) = [\min(f), \max(f)]$

Dim Sia $M = \sup(f)$

Per ogni $n \in \mathbb{N}$ $\sup(f) - \frac{1}{n}$ non è

un maggiorante di $f(C) \Rightarrow \exists y_n \in f(C)$

i.e. $\sup(f) - \frac{1}{n} < y_n \leq \sup(f)$

$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = \sup(f)$ per il Tco del
confronto.

Strategia Costruisco
una succ che converge
a $\sup(f)$

$y_n \rightarrow \sup(f)$

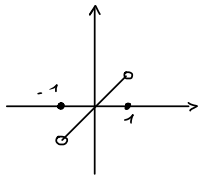
$\{y_n\} \subset \text{Im}(f) \subset f(C)$
compatto

$\Rightarrow \exists$ sottosucc y_{n_k}
convergente a un el
di $f(C) \Rightarrow$ dato che
 $y_{n_k} \rightarrow \sup(f), \sup(f) \in f(C)$

Esempi / Controesempi

1. $f: (0, 1] \longrightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = \frac{1}{x}$ $(0, 1]$ limitato ma non chiuso
 f continua
Non $\text{Im}(f) = [1, +\infty)$ non ha max
2. $f: (0, 1] \longrightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = x$ $(0, 1]$ limitato ma non chiuso
 f continua
 $\text{Im}(f) = (0, 1] \Rightarrow \text{N.E. min}(f)$
3. $f: [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ $[0, +\infty)$ chiuso ma non limitato
 $f(x) = x$ non ha Max
 $f(x) = \arctan(x)$ non ha max (pur essendo limitata)

4. Togliendo la continuità



$$f(x) = \begin{cases} 0 & x = -1 \\ x & x \in (-1, 1) \\ 0 & x = 1 \end{cases}$$

$\text{Im}(f) = (-1, 1)$ non ha max né min

Esercizi: Costruzione di funzioni con vincoli

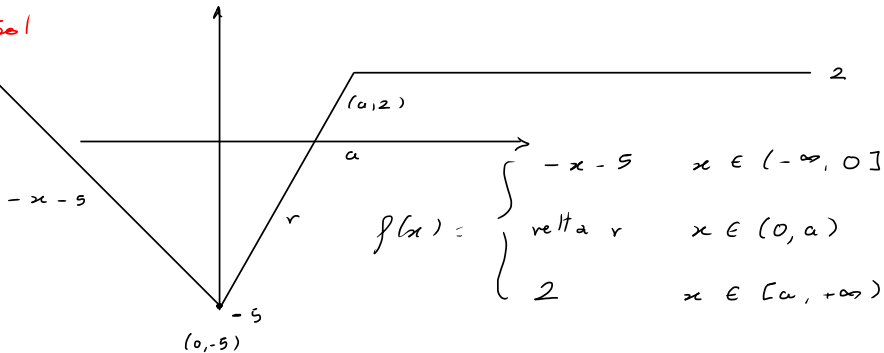
1. Definire $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua t.c.

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$

2. $f(0) = -5$

3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

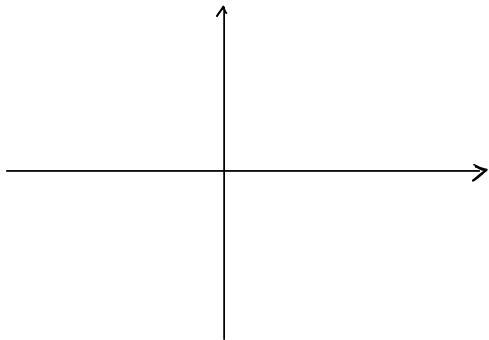
Prima Sol



$$1. \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$$

$$2. f(0) = -5$$

$$3. \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$



Cond 2. e 3.

- e^{-x} in $\mathbb{O}$ vale 1
- $e^{-x} - 6$ in $\mathbb{O}$ vale -5
- x^{2n} o $-x^{2n+1}$ in $\mathbb{O}$ valgono 0
- $x^{2n} - 5$ o $-x^{2n+1} - 5$
- $\ln(|x| + 1)$ in $\mathbb{O}$ vale 0
- $\ln(|x| + 1) - 5$

Cond. 1 e 2

$$\arctg(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \pi/2$$

$$\frac{4}{\pi} \arctg(x) - 5$$

$$2. \frac{2}{\pi} \arctg(x) \rightarrow 2 \text{ se } x \rightarrow +\infty$$

$$\text{a } \arctg(x) \rightarrow 2 \text{ per } x \rightarrow +\infty$$

$$\text{in } \mathbb{O} \text{ vale } 0$$

$$\arctan(x)$$

$$\left. \begin{aligned} a + b \arctan(x) &\xrightarrow{x \rightarrow +\infty} a + b \frac{\pi}{2} = 2 \\ a + b \arctan(x) &\text{ in } x=0 \quad \text{vale} \quad a = -5 \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow a = -5$$

$$b = \frac{14}{\pi}$$

$$\frac{14}{\pi} \arctan(x) - 5$$

$$\bullet e^{-x}$$

$$\begin{aligned} a + b e^{-x} &\xrightarrow{\text{per } x \rightarrow +\infty} a \\ a + b e^{-x} &= a + b \quad \text{per } x = 0 \end{aligned}$$

$$a = 2$$

$$a + b = -5$$

$$-7e^{-x} + 2$$

$$\bullet e^{-x+a}$$

$$+ b \xrightarrow{\text{per } x \rightarrow +\infty} b$$

$$b = 2$$

$$\text{vale } e^a + b \text{ in } x = 0$$

$$e^a + b = -5$$

Cambio segno

$$- e^{-x+a} + b$$

$$\xrightarrow{\text{per } x \rightarrow +\infty} b$$

$$\text{vale } -e^a + b \text{ in } x = 0$$

$$b = 2$$

$$e^a = -7 \quad \text{NO SOL}$$

$$b = 2$$

$$-e^a + 2 = -5 \quad e^a = 7 \quad a = \ln(7)$$

• $\frac{ax^{2n} + b}{x^{2n} + 1} \rightarrow a$ per $x \rightarrow +\infty$
 vale b in 0

$$a = 2$$

$$b = -5$$

Sol

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} - 6 & (-\infty, 0] \\ -7e^{-x} + 2 & (0, +\infty) \end{cases}$$

qualsiasi verificati 2 e 3

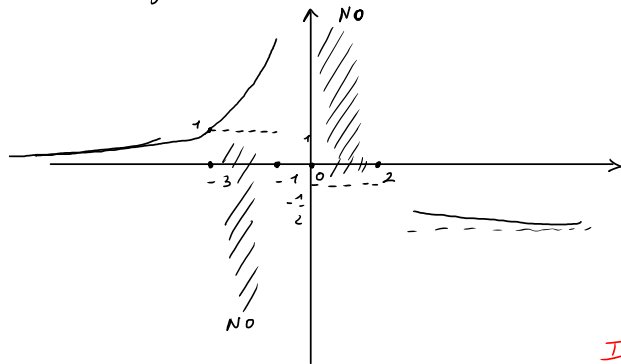
qualsiasi verificati 1 e 2

Esercizio $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua t.c.

1. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ 2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -2$

3. $\max \{ f(x) \mid x \in [0, 2] \} = -\frac{1}{2}$

4. $\min \{ f(x) \mid x \in [-3, -1] \} = 1$.



Esercizio Farlo con le
rette

}
Farlo con il minimo
numero possibile di
rette.

In $(-\infty, -1]$ dobbiamo
verificare 1 e 4

In $[0, +\infty)$ verifico 2 e 3

Cerco f crescente in $(-\infty, -1)$ t.e. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$

e $f(-3) = 1$

- $\frac{1}{x} \rightarrow 0$ per $x \rightarrow -\infty$ (decescente)

vale $-\frac{1}{3}$ in $x = -3 \Rightarrow$ Prendo $-\frac{3}{x}$ $f(-1) = 3$

- e^x crescente $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$

a e^x $a e^{-3} = 1$ $a = \frac{1}{e^3}$

$e^3 \cdot e^x = e^{x+3}$ $f(-1) = e^2$

$1 + \frac{2}{\pi} \arctan(x+3)$

- $\arctan(x)$ crescente $\arctan(-3)$
Prendo $\arctan(x+3)$ vale 0 in -3

$a + b \arctan(x+3)$
in -3 vale $a = 1$
 $b \frac{\pi}{2} = 1$ $b = \frac{2}{\pi}$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} a + b \arctan(x+3) = a - \frac{b\pi}{2} = 0$

Cerco f decrescente in $[0, +\infty)$ t.e. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -2$

e $f(0) = -1/2$ //

• $\frac{3}{2}e^{-x} - 2 \rightsquigarrow f(0) = -1/2$

• $-1/2 - \frac{3}{\pi} \arctan(x)$

• $\frac{-2x - 1}{x + 2}$

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Funz che verifica 1 e 4 in } [-\infty, -1] \\ \quad (-1, 3) \text{ o } (-1, e^2) \text{ o } \dots \\ \text{Retta tra } (-1, f(-1)) \text{ e } (0, f(0)) = (0, -1/2) \\ \text{Funz che verifica 2 e 3 in } [0, +\infty) \end{array} \right.$$

Esercizio L'equazione $x^8 + x^6 + x^5 - 4x^4 + x = \sqrt{2}$

ha soluzione in $\mathbb{R}$?

Cerco zeri della funzione $f(x) = x^8 + x^6 + x^5 - 4x^4 + x - \sqrt{2}$

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = +\infty \quad f(0) = -\sqrt{2}$$

$\Downarrow$

$\exists N$ t.c. $\forall x > N \quad f(x) > 0 \Rightarrow$ uno zero in $[0, N+1]$

$\exists M$ t.c. $\forall x < -M \quad f(x) > 0 \Rightarrow$ uno zero in $[-M-1, 0]$

Per cercare la radice per esempio: $f(1) = -\sqrt{2}$

$$f(2) = 256 + 128 + 32 - 64 + 2 - \sqrt{2} > 0$$

Zero in $[1, 2]$

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \dots$$

Esercizio Radici in $\mathbb{R}$ di $x^8 + x^6 + x^5 - 4x^4 + x = -\sqrt{2}$

~~$f(x)$~~ = $x^8 + x^6 + x^5 - 4x^4 + x + \sqrt{2} = 0$

$x^8 + x^6 - 4x^4 = -x^5 - x - \sqrt{2}$
 $f \qquad \qquad \qquad g$

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty \qquad f(0) = \sqrt{2} > 0$

Definiamo $f(x) = x^8 + x^6 - 4x^4$

$g(x) = -x^5 - x - \sqrt{2}$

Cerco valori in cui $f(x) = g(x)$

$f(0) = 0 > g(0) = -\sqrt{2} \quad \bullet$

$f(1) = -2 > g(1) = -2 - \sqrt{2}$

Una radice in $[-1, 0]$

$f(-1) = -2 < g(-1) = 2 - \sqrt{2} \quad \bullet$

Una radice in $[-2, -1]$

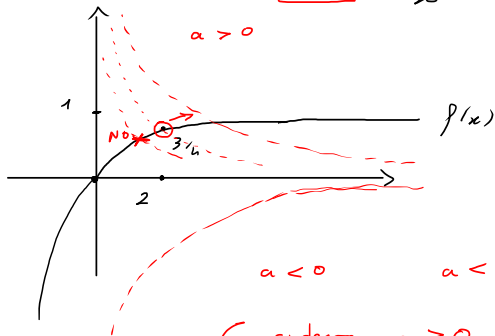
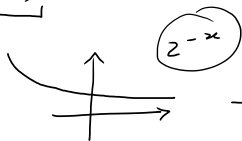
$f(-2) = 256 + 64 - 64 = 256 > g(-2) = 32 + 2 - \sqrt{2} \quad \bullet$

Esercizio Per quali $a \in \mathbb{R}$ $1 - 2^{-x} = \frac{a}{x}$

ha almeno una soluzione in $(2, +\infty)$

$$f(x) = 1 - 2^{-x}$$

$$g_a(x) = \frac{a}{x}$$



$$f(2) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$$

$a < 0 \Rightarrow$ Nessuna soluzione

Considero $a > 0$ $\rightarrow$ f crescente
 $\rightarrow$ g_a decrescente $\} \Rightarrow$ max 1 sol

Condizione $\bar{e}$ $g_a(2) > 3/4 = f(2)$

Se netto $= g_a(2) = f(2)$

$$g_a(2) = \frac{a}{2} > \frac{3}{4} \Rightarrow a > \frac{3}{2}$$

~~la~~ sol $\bar{e}$ 2
ma $2 \notin (2, +\infty)$
quindi serve $>$