

Logica elementare

Implicazione

$$P_1 \Rightarrow P_2$$

Tabella di verità

P_1	P_2	$P_1 \Rightarrow P_2$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

$P_1 \Rightarrow P_2$ falsa se e solo se P_1 Vera
e P_2 falsa
 $P_1 \wedge \neg P_2$ è falso



$$\neg (P_1 \wedge \neg P_2) \text{ è vero}$$

Due affermazioni si dicono equivalenti se hanno la stessa tabella di verità

P_1	P_2	$P_1 \wedge \neg P_2$	$\neg (P_1 \wedge \neg P_2)$
V	V	F	V
V	F	V	F
F	V	F	V
F	F	F	V



Oss Almeno una tra
 P_1 e $\neg P_2$ è falsa
Almeno una tra
 $\neg P_1$ e P_2 è vera

$$\neg P_1 \vee P_2$$

Esercizio

Tabella di verità per
 $(P_1 \Rightarrow P_2) \Rightarrow (\neg P_1 \vee P_2)$

P_1	P_2	$P_1 \Rightarrow P_2$	$\neg P_1 \vee P_2$	$(P_1 \Rightarrow P_2) \Rightarrow (\neg P_1 \vee P_2)$
V	V			?
V	F			?
F	V			?
F	F			?

Def Una tautologia è una proposizione sempre vera

(Esempio $P \vee \neg P$)

Doppia implicazione $P_1 \Leftrightarrow P_2$ (equivalente a
 $(P_1 \Rightarrow P_2) \wedge (P_2 \Rightarrow P_1)$)

Tabella di verità

$P_1 \Leftrightarrow P_2$
V
F
F
V

Esempio Tautologia (Modus Ponens)

$$(P_1 \wedge (P_1 \Rightarrow P_2)) \Rightarrow P_2$$

Scrivere tabella di verità.

↓

} deduzione

ipotesi

Esempio P_1 $n \in \mathbb{N}$ allora n pari oppure $n+1$ pari
 P_2 $n \in \mathbb{N}$ allora $n(n+1)$ pari

$$\underbrace{(P_1 \wedge (P_1 \Rightarrow P_2))}_{V} \Rightarrow \underbrace{P_2}_V \quad \text{ok}$$

Esempio P_1 $x \in A$ insieme numerico allora $x - 1 \in A$
 P_2 A non ha minimo

Per $A = \mathbb{N}$

$P_1 \Rightarrow P_2$ ✓
 P_1 F

$$\underbrace{(P_1 \wedge (P_1 \Rightarrow P_2))}_{? V} \Rightarrow P_2$$

Se $y \in A$ è il minimo P_1 mi dice che $y - 1 \in A$ quindi y non è min A

Esercizio P_1 Studiare almeno 2¹⁰ ore
 P_2 Passare l'esame

- $P_1 \Rightarrow P_2$ Chi studia almeno 2¹⁰ ore passa l'esame (Suff)
- $P_2 \Rightarrow P_1$ Per passare l'esame si deve studiare almeno 2¹⁰ ore (Nec)
- $P_2 \Leftrightarrow P_1$ -----

Deduzioni

$$P_1 \Rightarrow P_2 \not\Rightarrow \neg P_1 \Rightarrow \neg P_2$$

Francesco studia 2⁹ ore e passa l'esame
 $\neg P_1 \wedge P_2$

Ipotesi: $P_1 \Rightarrow P_2$ **Tesi:** $\neg P_1 \wedge P_2$
 $(P_1 \Rightarrow P_2) \Rightarrow (\neg P_1 \wedge P_2) \quad ?$

Deduzione cervello?

Ipotesi: $P_2 \Rightarrow P_1$ **Tesi:** $\neg P_1 \wedge P_2$
 $(P_2 \Rightarrow P_1) \Rightarrow (\neg P_1 \wedge P_2)$

P_1	P_2	$P_1 \Rightarrow P_2$	$\neg P_1 \wedge P_2$	$(P_1 \Rightarrow P_2) \Rightarrow (\neg P_1 \wedge P_2)$	$P_2 \Rightarrow P_1$
V	V	V	(F)	F	(V)
V	F	F	F	$(P_2 \Rightarrow P_1) \Rightarrow (\neg P_1 \wedge P_2)$	V
F	V	V	V	F	F
F	F	V	F		V

Tesi Francesco studia 2^a ore quindi passa l'esame

$$\neg P_1 \Rightarrow P_2$$

$$(P_1 \Rightarrow P_2) \Rightarrow (\neg P_1 \Rightarrow P_2) \quad ?$$

$$(P_2 \Rightarrow P_1) \Rightarrow (\neg P_1 \Rightarrow P_2) \quad ?$$

Ipotesi

Tabella di Q_2
e di $\neg(\neg Q_2)$

Tesi Francesco studia 2^a ore quindi non passa l'esame

$$\neg P_1 \Rightarrow \neg P_2$$

$$(P_1 \Rightarrow P_2) \Rightarrow (\neg P_1 \Rightarrow \neg P_2) \quad ?$$

$$(P_2 \Rightarrow P_1) \Rightarrow (\neg P_1 \Rightarrow \neg P_2) \quad ? \quad \checkmark$$

↓
Dimostrazione per assurdo

Q_1 ipotesi
↓
✓

Q_2 tesi

Dim

$$Q_1 \Rightarrow Q_2$$

Per assurdo Supponiamo $\neg Q_2$ dimostro $\neg Q_2 \Rightarrow \neg Q_1$

Siccome $\neg Q_1$ NON PUÒ essere vera allora non può essere vera nemmeno $\neg Q_2$ quindi è vero Q_2

Esercizio: Verificare che le seguenti affermazioni sono tautologie

1. (Terzo escluso) $P \vee (\neg P)$

2. (Silllogismo) $((P_1 \Rightarrow P_2) \wedge (P_2 \Rightarrow P_3)) \Rightarrow (P_1 \Rightarrow P_3)$

3. (Non contraddizione) $\neg (P \wedge (\neg P))$

4. (Legge di De Morgan) $\neg (P \vee Q) \Leftrightarrow (\neg P) \wedge (\neg Q)$
 $\neg (P \wedge Q) \Leftrightarrow (\neg P) \vee (\neg Q)$

Oss "Negazione" vs "Contrario"

$$\neg (\forall x \in \mathbb{N} \quad x \text{ è pari}) \quad \text{Vera}$$



$$\exists x \in \mathbb{N} \quad x \text{ dispari}$$

$$\neg (\exists x \quad P(x)) \Leftrightarrow \forall x \quad \neg P(x)$$

$$\neg (\forall x \quad P(x)) \Leftrightarrow \exists x \quad \neg P(x) \quad (\text{controesempio})$$

Teoria degli insiemi

Insieme = "Collezione di oggetti"

Descrizione :

1. per elencazione $A = \{1, 5, 7, 12, 28\}$
2. per iterazione $A = \{0, 1, 2, 3, \dots\} = \mathbb{N}$
 $= \{0, 0+1, 0+1+1, \dots\} \subset \mathbb{N}$
3. per proprietà $A = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ pari}\}$

$P(x)$ affermazione $x \text{ è pari}$

$$A = \{x \in \mathbb{N} : P(x)\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{N} : \begin{matrix} P(x) \\ x \text{ è pari} \end{matrix} ; \begin{matrix} Q(x) \\ 3 \text{ non divide } x \end{matrix}\} = \{2, 4, 8, 10, 14, \dots\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{N} : P(x) \wedge Q(x)\}$$

$P(0)$ vera

$Q(0)$ falsa

$$\Rightarrow 0 \notin B$$

$0 \in B$? no
non appartiene

Definizioni / Notazioni $A, B, C \dots$ insiemi

$x \in A$ x elemento di A

$B \subseteq A$ contenuto o uguale $\forall x \in B$ si ha $x \in A$ ^{cioè} $x \in B \Rightarrow x \in A$

• $B \subset A$ contenuto o uguale

$B \subsetneq A$ contenuto e diverso da A cioè $x \in B \Rightarrow x \in A$

$\exists y \in A$ t.c. $y \notin B$
 tale che ///

B si dice sottoinsieme di A ($B \subsetneq A$ sottoinsieme proprio)

$A = B \iff (A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)$

Oss Sottoinsiemi "impropri" A è sempre sottoinsieme di A
 $\emptyset$ insieme vuoto cioè che non contiene nessun elemento
 $\forall x \quad x \notin \emptyset$
 $\emptyset \subset A$ per ogni insieme A

Oss Differenza tra elementi e sottoinsiemi

$$A = \{2, 3, 5\} \quad 2 \in A \quad \{2\} \subsetneq A$$

$$B = \{ \{2, 3\}, \{2, 5\}, \{2\} \} \quad 2 \in B \quad \text{NO}$$

$$\{2\} \in B$$

$$\{ \{2, 3\}, \{2\} \} \subsetneq B$$

A cardinalità di A
 $|A|$

$$\# A = 3$$

$$\# B = 3$$

$$A = \{ \{\emptyset\} \} \quad \# A = 1 \quad \# \emptyset = 0$$

Esercizio A un insieme di n elementi $n \in \mathbb{N}$ finito

Def $\mathcal{P}(A)$ l'insieme delle parti di A

l'insieme di tutti i sottoinsiemi di A

$$\# \mathcal{P}(A) ?$$

$$A = \{ \underset{a_1}{2}, \underset{a_2}{3}, \underset{a_3}{5} \}$$

$$\mathcal{P}(A) = \{ \emptyset, A, \{2\}, \{3\}, \{5\}, \{2, 3\}, \{2, 5\}, \{3, 5\} \}$$

$$\# \mathcal{P}(A) = 8 = 2^3$$

$$\begin{aligned} & \emptyset (0, 0, 0) \\ & \rightarrow A (1, 1, 1) \\ & \{2\} (1, 0, 0) \\ & \{3\} (0, 1, 0) \\ & \vdots \end{aligned}$$

$$\text{Teo } \# A = n \text{ finita} \Rightarrow \# \mathcal{P}(A) = 2^n$$

$$\text{Dim. } A = \{ a_1, \dots, a_n \}$$

$$B \subseteq A \quad B \longrightarrow \begin{matrix} 0 & \text{se } a_1 \notin B & 0 & \text{se } a_2 \notin B & & 0 & \text{se } a_n \notin B \\ (1 & \text{se } a_1 \in B, & 1 & \text{se } a_2 \in B, & \dots, & 1 & \text{se } a_n \in B) \end{matrix}$$

Stringa di n elementi tutti 0 o 1

$$\emptyset \longrightarrow (0, 0, 0, \dots, 0)$$

$$A \longrightarrow (1, 1, 1, \dots, 1)$$

$$(0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots) \longrightarrow \{ a_2, a_n, a_6, \dots \}$$

$$\# \mathcal{P}(A) = \# \text{ stringhe} \quad \begin{matrix} 2 & 2 & \dots & 2 \\ \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ 1^\circ \text{ pos} & 2^\circ \text{ pos} & & n^\circ \text{ pos} \end{matrix} = 2^n$$