

Def (Limite) $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ e sia x_0 punto di accumulazione di A
 Sia $l \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ si dice che

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ se $\forall$ intorno V di l $\exists$ un intorno U di x_0

t.c. $f((U - \{x_0\}) \cap A) \subset V$
 scriviamo sempre
 $f(U) \subset V$

Oss imp U dipende da
 $V \rightarrow \delta$ può dipendere
 da ε

///

$\varepsilon, \delta, \eta$

Esempio di traduzione
Def

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$

$x_0, l \in \mathbb{R}$
 $\forall V$ di l
 $\exists U$ di x_0

t.c. $f(U) \subset V$

$\rightarrow B(l, \varepsilon)$

$\rightarrow B(x_0, \delta)$

$\forall \varepsilon > 0$ $f(y) \in B(l, \varepsilon)$
 $\exists \delta > 0$

t.c. $|y - x_0| < \delta \Rightarrow |f(y) - l| < \varepsilon$
 $y \in U \subset B(x_0, \delta)$

$x_0 = -\infty \quad l \in \mathbb{R}$
 $\forall V$ intorno di l
 $\exists U$ intorno di $-\infty$
 t.c. $f(U) \subset V$

$\forall \varepsilon > 0 \quad (V = B(l, \varepsilon))$
 $\exists M > 0 \quad (U = (-\infty, -M))$
 t.c. $y \in U$ cioè
 $y < -M$
 $\Rightarrow f(y) \in V$ cioè $|f(y) - l| < \varepsilon$

Esempio $A = \left\{ \frac{2n+2}{3n-1} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$

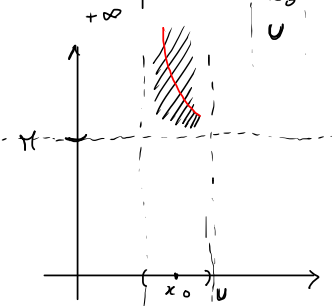
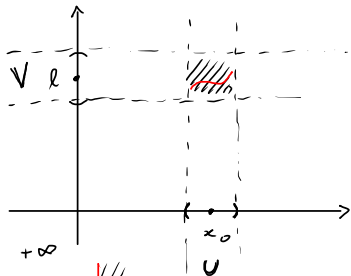
$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$
 $f(n) = \frac{2n+2}{3n-1}$ dimostrato

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n+2}{3n-1} = \frac{2}{3}$$

$\frac{2}{3}$ punto di accumulazione.

$f\left(\left(\frac{1}{3} + \frac{\delta}{\delta_\varepsilon}, +\infty\right) \cap \mathbb{N}\right) \subset B\left(\frac{2}{3}, \varepsilon\right)$
 M che dipende da ε

Interpretazione grafica



$$l = +\infty$$
$$x_0 \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$$

$$x_0, l \in \mathbb{R} \quad \forall V \text{ di } l$$
$$\exists U \text{ di } x_0$$

t.c. $f(U) \subset V$
cioè se $x \in U$
il grafico della funzione
... meglio il punto $(x, f(x))$

appartiene $\underbrace{U \times V}$

$$\forall V \text{ di } l$$
$$\exists U \text{ di } x_0$$

t.c. grafico $\subset U \times V$
(se $x \in U$)

Esempio Sia $n \in \mathbb{N}$ $f(x) = x^n \quad \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 2^n$ vogliamo dim questa formula

Fissato $\varepsilon > 0$ ($V = B(2^n, \varepsilon)$) cerco $\delta > 0$ ($U = B(2, \delta)$)

t.c. $f(U) \subset V$ cioè t.c. $|y - 2| < \delta \Rightarrow |y^n - 2^n| < \varepsilon$
 x_0 $f(y)$ l

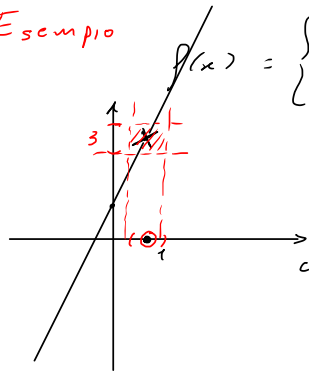
$$|y^n - 2^n| = |y - 2| |y^{n-1} + 2y^{n-2} + 2^2 y^{n-3} + \dots + 2^{n-1}|$$

$$(y - 2) (y^{n-1} + 2y^{n-2} + 4y^{n-3} + \dots + 2^{n-1}) < \underbrace{n 3^{n-1} |y - 2|}_{\star} < \varepsilon$$

y "vicino" a 2 $\Rightarrow$ posso supporre $y < 3$
 $\Rightarrow y^{n-1} < 3^{n-1}$
 $2y^{n-2} < 2 \cdot 3^{n-2} < 3^{n-1}$
 $2^2 y^{n-3} < 2^2 3^{n-3} < 3^{n-1}$ $\star$
 $\delta = |y - 2| < \frac{\varepsilon}{n 3^{n-1}}$

• $\lim_{x \rightarrow x_0} x^n = x_0^n$

Esempio



$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & x \neq 1 \\ 0 & x = 1 \end{cases}$$

$$f(1) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3 \quad \text{Verifichiamo}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad (B(3, \varepsilon))$$

$$\text{cerco } \exists \delta > 0 \quad (B(1, \delta))$$

$$\text{t.c. } |y - 1| < \delta \Rightarrow |f(y) - 3| < \varepsilon$$

$$\begin{aligned} & y \in B(1, \delta) \quad f(y) \in B(3, \varepsilon) \\ & \hookrightarrow y \in (B(1, \delta) - \{1\}) \cap \text{Dominio di } f \end{aligned}$$

$$|f(y) - 3| = |2y + 1 - 3| = |2y - 2| = 2|y - 1| \quad \text{voglio che sia} < \varepsilon$$

$$\star$$
$$y \neq 1$$

$$\text{Basta prendere } \delta = |y - 1| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Def (limite dx e sx) $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ x_0 acc di A $l \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = l \quad \text{se}$$

$\forall$ intorno V di l

$\exists$ intorno destro U^+ di x_0

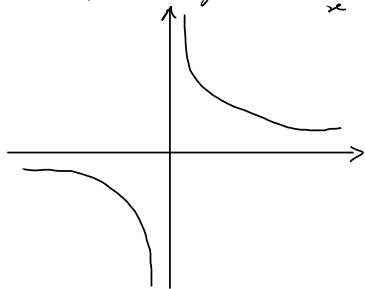
t.c. $f(U^+) \subset V$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = l \quad \dots$$

Analogo per limite sx

Esempio

$$f(x) = \frac{1}{x}$$



$$\mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$$

Calcolo del $\text{Sup}(f)$ per $x \in (0, +\infty)$
 $\sim$ sostanzialmente equivale a dim
che $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$

$\forall M > 0$ $((M, +\infty)) \xrightarrow{\text{cerco}} \exists \delta > 0$ $([0, \delta))$
t.c. $f([0, \delta)) \subset (M, +\infty)$
cioè $|x| < \delta \Rightarrow |1/x| > M$
 $x < \frac{1}{M} = \delta$

Analogamente $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$

Quindi $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$ NON ESISTE $///$

Proposizione $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \iff \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = l$

Esempio $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{|x|} = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ $\lim_{x \rightarrow 0} e^x = 1$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x+2}{2x^2} = 0$ Verifichiamo $\forall \varepsilon > 0$ cerco $M > 0$
t.c. $y < -M \Rightarrow |f(y) - 0| < \varepsilon$

$\left| \frac{3y+2}{2y^2} \right| < \varepsilon$ cioè $-\frac{3y+2}{2y^2} < \varepsilon$ $\frac{2\varepsilon y^2 + 3y + 2}{2y^2} > 0$

$y_{1/2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 16\varepsilon}}{4\varepsilon}$ Disug vero per $y < \frac{-3 - \sqrt{9 - 16\varepsilon}}{4\varepsilon} = -M$

Esercizi / Esempi

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 + 2}{3x^2 - 1} = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x + 2}{2x^2} = +\infty$$

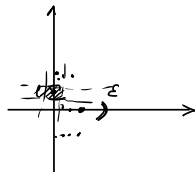
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^n} = ? \quad n \in \mathbb{N} - \{0\}$$

Esempio

$$f(x) = \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

$$\mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$$



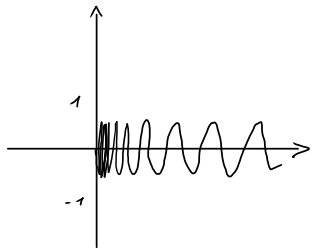
Se esistesse $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) = l \Rightarrow$ sarebbe uguale al $\lim_{x \rightarrow 0^-}$
sarebbe uguale al $\lim_{x \rightarrow 0}$
 $l \in [-1, 1]$

Sia $\varepsilon > 0$ e $\forall \delta > 0$

In verde: correzione (più precisa) di quanto scritto durante la lezione.

$$\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} \text{ t.c. } \frac{1}{\left(\sqrt{n\pi/2}\right)} < \delta \quad \sqrt{n\pi/2} > \frac{1}{\delta} \Rightarrow$$

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{n\pi/2}}\right) = \sin\left(\frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{n\pi/2}}\right)^2}\right) = \sin(n\pi/2) = \begin{cases} n \text{ pari} & 0 \\ n = 1 + 4m & 1 \\ n = 3 + 4m & -1 \end{cases}$$



Dunque $\nexists \lim dx, sx$, tantomeno $\lim$
per $x \rightarrow 0$ di $\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$

Esercizio Verificare che $\nexists \lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)$
 $n \in \mathbb{N} \quad f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$

Esercizio $\lim_{n \rightarrow +\infty} a^n = \begin{cases} 0 & 0 \leq a < 1 \\ 1 & a = 1 \\ +\infty & a > 1 \end{cases}$

Verifico equivalente (per $a > 1$) e dim che $\sup(a^n) = +\infty$
 $a^n = (1+b)^n \geq 1 + nb \dots$

Teo (proprietà dei limiti)

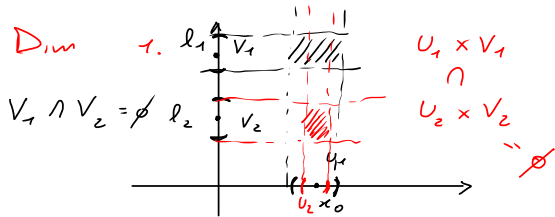
1. Unicità Se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ esiste allora è unico

2. Permanenza del segno Se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \geq 0$

allora $\exists$ un intorno U di x_0 t.c. $f(y) \geq 0 \quad \forall y \in U - \{x_0\}$

3. (Variante) Se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \neq \pm \infty$ allora $f(x)$ è

limitato in un intorno di x_0



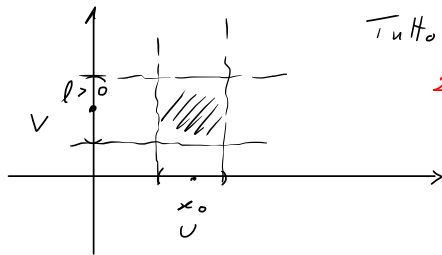
Supp $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_1$

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_2$

$l_1 \neq l_2$

Separo l_1 e l_2

Dim analoghe per 2 e 3



$$T_u H_0 \quad V > 0$$

2