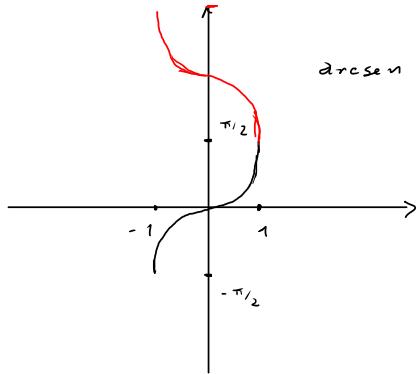
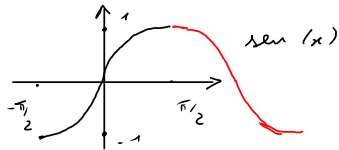


Grafici delle funzioni inverse delle funzioni trigonometriche

$\text{sen} : [-\pi/2, \pi/2] \rightarrow [-1, 1]$ invertibile

$(\arcsen [-1, 1] \xrightarrow{3/2\pi} [-\pi/2, \pi/2])$



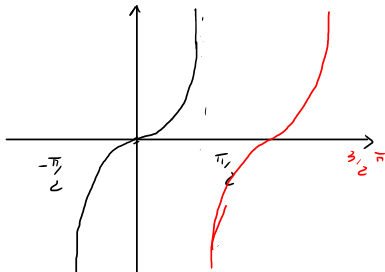
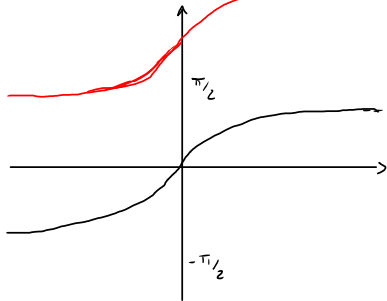
$\text{sen} : [\pi/2, 3/2\pi] \rightarrow [-1, 1]$
invertibile

$\arcsen : [-1, 1] \rightarrow [\pi/2, 3\pi/2]$

Fare un paio di "rami"
per l'arccos

$$\tan : \left(-\pi/2, \pi/2 \right) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\left(\arctan : \mathbb{R} \xrightarrow{-\frac{3}{2}\pi} \left(-\pi/2, \pi/2 \right) \right)$$



$$\tan : \left(\pi/2, 3/2 \pi \right) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\arctan : \mathbb{R} \rightarrow \left(\pi/2, 3/2 \pi \right)$$

Esercizio

$$f, g : A \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f+g : A \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$-f : A \longrightarrow \mathbb{R}$$

- $\inf(f) + \inf(g) \leq \inf(f+g)$
- $\sup(f) + \sup(g) \geq \sup(f+g)$

Dim Per def di $\inf$ $\forall \varepsilon > 0$ $\inf(f+g) + \varepsilon$
non è minorante di $\inf(f+g)$
cioè $\exists x_0 \in A$ t.c. $(f+g)(x_0) \leq \inf(f+g) + \varepsilon$

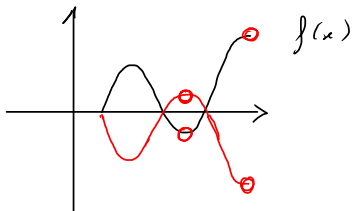
$$(f+g)(x_0) = f(x_0) + g(x_0) \geq \inf(f) + \inf(g)$$

$$\inf(f+g) + \varepsilon > (f+g)(x_0) \geq \inf(f) + \inf(g) \quad // \quad \text{vale } \forall \varepsilon > 0$$

È possibile che $\inf(f+g) < \inf(f) + \inf(g)$? $\uparrow$ NO
 $\Rightarrow \inf(f+g) \geq \inf(f) + \inf(g)$

Sup : esercizio

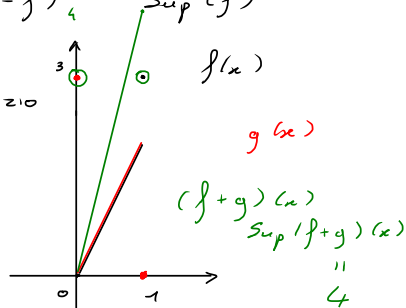
- $\text{Sup}(-f) = -\text{Inf}(f)$



Dim

$$\text{Inf}(-f) = -\text{Sup}(f)$$

Esercizio



Esempio

$$f, g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = \begin{cases} 2x & x \in [0, 1) \\ 3 & x = 1 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 3 & x = 0 \\ 2x & x \in (0, 1) \\ 0 & x = 1 \end{cases}$$

$$\text{Sup}(f) = 3 = \max(f) = f(1)$$

$$\text{Sup}(g) = 3 = \max(g) = g(0)$$

$$(f+g)(x) = \begin{cases} 3 & x = 0 \\ 4x & x \in (0, 1) \\ 3 & x = 1 \end{cases}$$

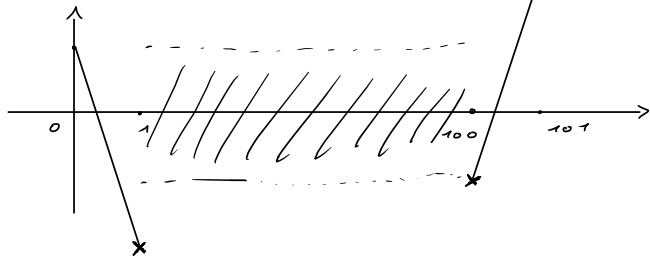
$\max(f+g)$
N.E.

Esempio

$$f: [0, 101] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = \begin{cases} 1 - 3x & x \in [0, 1) \\ \sin(e^{200x} + x^{200} - 200x^2 + \cos^2(e^{2x})) & x \in [1, 100] \\ 3(x - 100) - 1 & x \in (100, 101] \end{cases}$$

$\text{Sup}(f)$, $\text{Inf}(f)$, $\max(f)$ e $\min(f)$?



$$\begin{aligned} \text{Sup}(f) &= f(101) = 2 \\ &\quad \text{"} \\ &\quad \max(f) \end{aligned}$$

$$\text{Inf}(f) = -2$$

$$\min(f) \quad \text{N.E.}$$

Limiti (Funzioni / successioni)

Per ogni $x \in \mathbb{R}$ e $\varepsilon, \delta > 0$ definisco un intorno di x come l'intervallo $(x - \varepsilon, x + \delta)$

Intorno di x è un intervallo che contiene x al suo interno (intorno $\Rightarrow$ non sul bordo)

Esempio: $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{3})$ intorno di 0

$(-\frac{1}{2}, 0)$

intorno di 0

$(-\frac{1}{2}, 0]$

$[0, \frac{1}{3})$

NON è intorno di 0

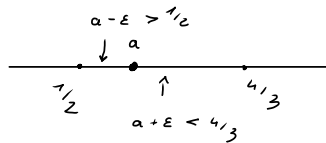
Questo si dice intorno sx di 0

intorno dx di 0

$(\frac{1}{2}, \frac{4}{3})$ intorno di 1

$[-1, \frac{4}{3})$

$(\frac{1}{2}, \frac{4}{3})$ intorno di $\frac{2}{3}$? sì



Def $x \in \mathbb{R}$ $\varepsilon > 0$ L'intorno circolare / sferico / palla

di centro x e raggio ε è l'intervallo $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) =$

$$= B(x, \varepsilon) = \{y \in \mathbb{R} : |x - y| < \varepsilon\}$$

Un intorno dx di x è del tipo $[x, x + \varepsilon)$

Un intorno sx di x è del tipo $(x - \varepsilon, x]$

Un intorno di $+\infty$ (intorno sx) è del tipo $(M, +\infty)$
 $M \in \mathbb{R}$

Un intorno di $-\infty$ (intorno dx) è del tipo $(-\infty, N)$
 $N \in \mathbb{R}$

NON VOGLIO SENTIR PARLARE DI INTORNI DI ∞ .

Proprietà 1. $x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ appartiene ad ogni suo intorno

2. U, V intorni di $x \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} \Rightarrow U \cap V$ è intorno di x

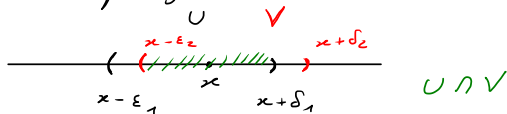
3. U intorno di x e $y \in U$ allora
 $\exists V$ intorno di y contenuto in U

4. (separazione) Se $x \neq y$ $x, y \in \mathbb{R}$ allora $\exists U$ intorno di x
e V intorno di y t.c. $U \cap V = \emptyset$

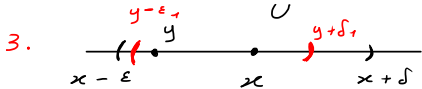
5. unione (anche infinita) di intorni di x è un intorno di x

(Proprietà definiscono una topologia su $\mathbb{R}$) -

Dim (graficamente) 2.



Esempio $I_n = \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ I_n intorno di 0 $\forall n$
 $\bigcap_{n \in \mathbb{N} - \{0\}} I_n = \{0\} = [0, 0]$



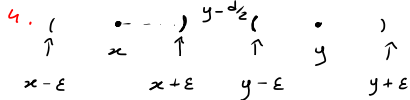
$$U = (x - \varepsilon, x + \delta)$$

$$V = (y - \varepsilon_1, y + \delta_1) \subset U$$

Conti

$$y > x - \varepsilon$$

$$x + d/2$$



$$d = y - x + \varepsilon$$

$$\varepsilon_1 = d/2$$

$$x, y \in \mathbb{R}$$

$$x \neq y \quad \text{supp} \quad x < y$$

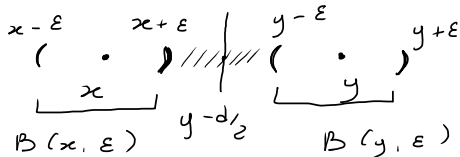
$$d = y - x$$

$$d = |y - x|$$

$$\varepsilon < d/2$$

$$B(x, \varepsilon) \cap B(y, \varepsilon) = \emptyset$$

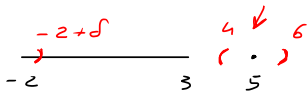
$$d = |y - x|$$



$$\varepsilon < d/2$$

Def Sia $A \subset \mathbb{R}$, un punto $x \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ si dice punto di accumulazione per A se $\forall$ intorno U di x si ha $(U - \{x\}) \cap A \neq \emptyset$

Esempio $A = (-2, 3) \cup \{5\}$ intorno di 5



Punti di accumulazione per A ?

Punti interni $\Rightarrow$ automaticamente di accumulazione (vd 3)

-2 accumulazione? Intervallo di -2 è del tipo $(-2-\varepsilon, -2+\delta)$

$$(-2-\varepsilon, -2+\delta) \cap A \neq \emptyset$$

$\neq \{-2\} \rightarrow$ perché $-2 \notin A$

-2 e 3 punti di accumulazione

5 NO

Def Un punto $x \in A$ si dice isolato se non è di accumulazione.

Esempio $A = (a, b)$ Punti di accumulazione $[a, b]$

$\mathbb{N}$ punti di accumulazione di $\mathbb{N}$?

$\circ \quad \circ \quad \circ \quad \dots$

$(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \cap \mathbb{N} = \{0\} \Rightarrow 0$ punto isolato

Ogni $n \in \mathbb{N}$ è isolato

$+\infty$ intorno di $+\infty$

$(M, +\infty)$ $M \in \mathbb{R}$

$(M, +\infty) \cap \mathbb{N} \neq \emptyset$

è punto di accumulazione di $\mathbb{N}$

- $\mathbb{N}$ punti di acc $\{+\infty\}$
- $\mathbb{Z}$ punti di acc $\{+\infty, -\infty\}$
- $\mathbb{Q}$ punti di acc $= \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ per densità

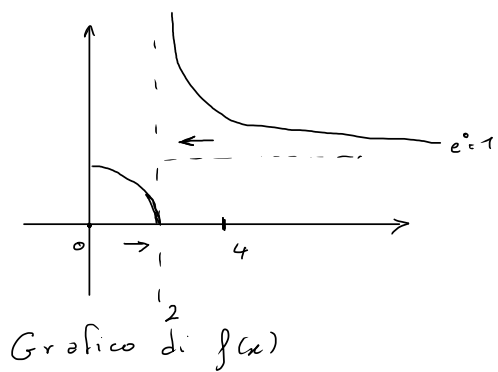
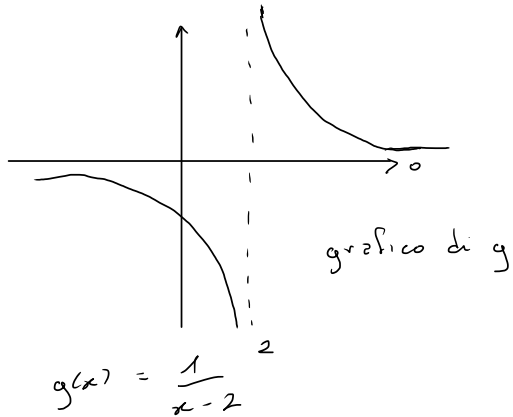
Motivazione $f(x) = e^{\frac{1}{x}-2}$ Dominio $A = \mathbb{R} - \{2\}$

$2 \notin A$ ma $\bar{2}$ è un punto di acc del dominio

$f(x)$ = energia sprigionata dalla quantità di materiale x

Parto da $x=0$ e aggiungo Esp 1

Parto da $x=4$ e tolgo Esp 2.



Esempi $A = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} - \{0\} \right\} \subset \mathbb{R}$ $B = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{Z} - \{0\} \right\}$

Punti di accumulazione?

Tutti i punti di A e B sono punti isolati

0 è punto di accumulazione per A e B

Perché preso $\varepsilon > 0$ $B(0, \varepsilon)$

$$\begin{array}{c} \xleftarrow{\varepsilon} \quad 0 \quad \xrightarrow{\varepsilon} \\ -\varepsilon \quad \varepsilon \end{array}$$

$$\exists n \in \mathbb{N} \quad n > \frac{1}{\varepsilon} \quad \frac{1}{n} < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{n} \in A \cap B(0, \varepsilon)$$

$\Rightarrow 0$ acc per A (e per B)

Esempio $A = \left\{ \frac{2n+2}{3n-1} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$ Tutti punti isolati

$$a_n = \frac{2n+2}{3n-1} \quad a_{n+1} - a_n \quad \text{Calcoli} \quad < 0 \quad \text{se } n \geq 1$$

Insieme t.c. $a_0 < a_1 > a_2 > a_3 > \dots$

$$a_0 = -2 \quad a_1 = 2 \quad a_2 = \frac{6}{5} \quad \dots$$

Punto di accumulazione $x = \frac{2}{3} \notin A$ $\frac{2n+2}{3n-1} = \frac{2}{3}$

$\forall \varepsilon > 0$ voglio che esista $a_n \in A$ t.c. NON HA SOL

$$a_n \in B\left(\frac{2}{3}, \varepsilon\right) \Leftrightarrow \left| a_n - \frac{2}{3} \right| < \varepsilon$$

Cerco n t.c.
 $n \geq 1$

$$\left| \frac{2n+2}{3n-1} - \frac{2}{3} \right| < \varepsilon \quad \left| \frac{8}{3(3n-1)} \right| < \varepsilon$$

$\Rightarrow$ Posso togliere il val assoluto $\frac{8}{3(3n-1)} < \varepsilon$

$$\frac{\delta}{3(3n-1)} < \varepsilon$$

$$\delta < \varepsilon \cdot 3(3n-1)$$

$$3n-1 > \frac{\delta}{3\varepsilon} \quad n > \frac{1}{3} + \frac{\delta}{9\varepsilon}$$

$$\forall n > \frac{1}{3} + \frac{\delta}{9\varepsilon}$$

$$a_n \in B(2/3, \varepsilon) \cap A$$

Equivalentemente

$$f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f(n) = \frac{2n+2}{3n-1} = a_n$$

Ho dim che $\forall \varepsilon > 0$

$$\exists N = \frac{1}{3} + \frac{\delta}{9\varepsilon}$$

(dipende da ε)

$$t.c. \quad \forall n > N \quad f(n) \in B(2/3, \varepsilon)$$

$$(N, +\infty) \cap \mathbb{N}$$

$$\forall n \in (N, +\infty) \cap \mathbb{N}$$

$$f(n) \in B(2/3, \varepsilon)$$

$$\downarrow f \\ B(2/3, \varepsilon)$$

Esercizio Sia A senza punti isolati

Allora $\text{Sup}(A)$ e $\text{Inf}(A)$ sono punti di ecc per A

Esercizio x punto di accumulazione per A

Allora ogni intorno di x contiene infiniti punti di A

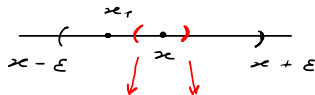
Dim $B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ e intersezione $\neq \{x\}$

$$\exists x_1 \neq x \quad x_1 \in B(x, \varepsilon) \cap A$$

$$\varepsilon_1 = \frac{|x - x_1|}{2} \quad B(x, \varepsilon_1)$$

intorno di x

$$\exists x_2 \neq x \quad x_2 \in B(x, \varepsilon_1) \cap A$$



$x - \varepsilon_1 \quad x + \varepsilon_1$
 $\Rightarrow$ per costruzione $x_2 \neq x_1$

Iterare il procedimento per $x_3, x_4, \dots$

