Corso di Algebra
Ingegneria Gestionale
anno accademico 2004/2005

Soluzioni ESERCITAZIONE 3.5

- Dire se le seguenti proposizioni sono vere o false:

Proposizione	Vera	Falsa
$f : \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^3$ tale che $rk(f) = 3 \Rightarrow f$ iniettiva.	□	•
$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^6$ tale che $rk(f) = 3 \Rightarrow f$ iniettiva.	•	□
$f : \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^3$ tale che $rk(f) = 3 \Rightarrow f$ surgettiva.	•	□
$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^6$ tale che $rk(f) = 3 \Rightarrow f$ surgettiva.	□	•
A matrice 3×3, $\Rightarrow \det(3A) = 3 \cdot \det(A)$	□	•
A matrice 3×3, $\Rightarrow \det(2A) = 8 \cdot \det(A)$	•	□
A matrice 3×3, $\Rightarrow \det(-A) = -\det(A)$	•	□
A matrice 2×2, $\Rightarrow \det(-A) = -\det(A)$	□	•
A, B matrici 3×3, $\Rightarrow \det(A + B) = \det(A) + \det(B)$	□	•
A, B matrici 3×3, $\Rightarrow \det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$	•	□
A, B matrici 3×3, $\Rightarrow rk(A + B) = rk(A) + rk(B)$	□	•
A matrice 31×31, $\Rightarrow rk(A^n) = n \cdot rk(A)$	□	•
A matrice 3×3, B matrice 3×3 $\Rightarrow A \cdot B = B \cdot A$	□	•
A matrice 5×3, B matrice 3×4 $\Rightarrow A \cdot B$ è una matrice 5×4	•	□
A matrice 3×2, B matrice 2×3 $\Rightarrow A \cdot B$ è una matrice 3×3	•	□
A matrice 3×2, B matrice 2×3 $\Rightarrow A \cdot B$ è una matrice 2×2	□	•
A matrice 3×2, B matrice 2×3 $\Rightarrow B \cdot A$ è una matrice 2×2	•	□
Esiste una matrice 2×2 A non nulla tale che $A^2 = 0$	•	□
v autovettore per $f \Rightarrow 2v$ è autovettore per f	•	□

- Data $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, il vettore $\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ è autovettore relativo all'autovalore 4 se : $f(\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}) = (\begin{pmatrix} -8 \\ -4 \\ 12 \end{pmatrix}) =$

il vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ è autovettore relativo all'autovalore 5 se $f(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 10 \end{pmatrix}$

- Nelle seguenti matrici l'autovalore 3 compare sempre con molteplicità algebrica 4. Determinare la molteplicità geometrica dell'autovalore 3 in ciascuno dei 4 esempi :

$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$	$A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$	$A_3 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$	$A_4 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$
m.g(3) = 3	m.g(3) = 1	m.g(3) = 4	m.g(3) = 2

Esercizio 1. Siano A la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ e B la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

Risposte. $A \cdot B = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$

Esercizio 2. Siano A la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e B la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$

Risposte. $A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\qquad B \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ $\qquad A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Esercizio 3. Siano A la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e B la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Risposte. $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\qquad B \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

Esercizio 4. Siano A la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ e B la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

Risposte. $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 10 \end{pmatrix}$ $\qquad B \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 4 \\ -1 & 6 & 5 \end{pmatrix}$

Esercizio 5. Sia A la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$

(i) Determinare , se esiste, un vettore $X \in \mathbb{R}^2$ tale che $A \cdot X$ è il vettore nullo.

Risposta. Si tratta di determinare un vettore del Ker di f. Poichè il determinante della matrice è nullo (ed infatti si ha II riga =-2 I riga) tale vettore esiste . Per trovarlo è sufficiente risolvere

$$2 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 = 0$$

Ovvero basta prendere ad esempio $X = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

(ii) Determinare , se esiste, una matrice B non nulla tale che $A \cdot B$ è la matrice nulla .

Risposta. In questo caso basta prendere una matrice costtuita da due vettori colonna appartenenti al Ker. Ad esempio $B = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$