Corso di Algebra Ingegneria Gestionale - anno accademico 2004/2005

ESERCITAZIONE 3.4

• Sia A una matrice quadrata, $n \times n$, scritta come $A = \Big(v_1, v_2, v_3, ..., v_n\Big)$, $\quad con \quad v_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix}$. Allora

Proposizione	Vera	Falsa
$\det(A) = \det\Big(v_1, v_2, v_3, ..., [v_n + 3v_1]\Big)$	•	☐
$\det(A) = \det\Big(v_1, v_2, v_3, ..., [v_n - 3v_2]\Big)$	•	☐
$\det(A) = \det\Big(v_2, v_1, v_3, ..., v_n\Big)$	☐	•
$\det(A) = -\det\Big(v_2, v_1, v_3, ..., v_n\Big)$	•	☐
$\det(A) = \det\Big(v_2, v_3, v_1, ..., v_n\Big)$	•	☐
$v_3 = 2v_1 + 5v_2 \Rightarrow \det\Big(v_1, v_3, v_1, ..., v_n\Big) = 0$	•	☐

• Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineare e sia A la matrice associata ad f rispetto alla base canonica. Allora :

Proposizione	Vera	Falsa
$rk(f) = 3 \Rightarrow \quad \det(A) \neq 0$	•	☐
$\det(A) \neq 0 \Rightarrow \quad rk(f) = 3$	•	☐
$rk(f) < 3 \Leftrightarrow \quad \det(A) = 0$	•	☐
$\det(A) \neq 0 \Rightarrow \quad Ker(f) = \{0_V\}$	•	☐
$\det(A) = 0 \Rightarrow \quad Ker(f) \neq \{0_V\}$	•	☐
$\det(A) = 0 \Rightarrow \quad \exists \ v \in \mathbb{R}^3, v \neq 0_V$ t.c. $f(v) = 0_V$	•	☐

• Si consideri il seguente *sistema lineare di n equazioni in n incognite*

$$A \cdot X = b$$

dove A *è una matrice quadrata* $n \times n$, X *il vettore delle ingognite,* b *il vettore termine noto* . Allora :

Proposizione	Vera	Falsa
Esiste sempre almeno una soluzione	☐	•
Non esiste mai soluzione del sistema	☐	•
Esiste un'unica soluzione $\Rightarrow \quad \det(A) \neq 0$	•	☐
$\det(A) \neq 0 \Rightarrow$ Esiste un'unica soluzione	•	☐
$rk(A) < n \Rightarrow$ non esiste nessuna soluzione del sistema	☐	•
$\det(A) = 0 \Rightarrow$ esistono infinite soluzioni	☐	•
$rk(A) = rk(A\|b) < n \Rightarrow$ esistono infinite soluzioni del sistema	•	☐

SECONDA PARTE

Esercizio 1. Calcolare il determinante e il rango delle seguenti matrici

$\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\det(A) = -1$	$\mathrm{r}k(A) = 2$
$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$	$\det(A) = -19$	$\mathrm{r}k(A) = 2$
$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$	$\det(A) = 0$	$\mathrm{r}k(A) = 1$
$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$	$\det(A) = 0$	$\mathrm{r}k(A) = 1$
$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$	$\det(A) = 0$	$\mathrm{r}k(A) = 2$
$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$	$\det(A) = 0$	$\mathrm{r}k(A) = 2$
$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 1 & 2 & 4 \\ -1 & -2 & -4 \end{pmatrix}$	$\det(A) = 0$	$\mathrm{r}k(A) = 1$
$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$	$\det(A) = 24$	$\mathrm{r}k(A) = 3$
$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$	$\det(A) = 24$	$\mathrm{r}k(A) = 3$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 5 & 5 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\det(A) = 0$	$\mathrm{r}k(A) = 3$
$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\det(A) = -2$	$\mathrm{r}k(A) = 4$
$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 6 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$	$\det(A) = 0$	$\mathrm{r}k(A) = 2$
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$	$\det(A) = 40$	$\mathrm{r}k(A) = 4$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$	$\det(A) = 40$	$\mathrm{r}k(A) = 4$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 99 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 100 \end{pmatrix}$	$\det(A) = 100!$	$\mathrm{r}k(A) = 100$
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & 100 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots & 99 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & \cdots & 98 \\ 0 & 0 & \cdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\det(A) = 1$	$\mathrm{r}k(A) = 100$

Esercizio 2. Sia $f_t : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare espressa rispetto alle basi canoniche dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & -t & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ t & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(i) Determinare, al variare di $t \in \mathbb{R}$, $\dim(Ker(f_t))$ e $\dim(Im(f_t))$.

Soluzione . Sia A_t la matrice associata, $A_t = \begin{pmatrix} 1 & -t & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ t & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

A_t è una matrice 4×3, pertanto $\mathrm{r}k(A_t) \leq 3$. Se troviamo un minore 3×3 con determinante $\neq 0$ allora il rango sarà 3.

A tale scopo consideriamo il minore M_t ottenuto eliminando la prima riga:

$$M_t = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ t & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Abbiamo $\det(M_t) = -2 - 2t$. Pertanto se $t \neq -1$ abbiamo $\det(M_t \neq 0$ e quindi $\mathrm{r}k(A_t) = 3$.

Analizziamo adesso il caso particolare $t = -1$. La matrice $A_{(-1)}$ diventa

$$A_{(-1)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Osservando le colonne della matrice si ha: II colonna = I colonna + III colonna.
OPPURE:
Osservando le righe della matrice si ha: III riga = I riga; IV riga = -I riga.
Inoltre le prime due colonne (oppure le prime due righe) sono linearmente indipendenti.
Pertanto possiamo concludere che per $t = -1$ il rango della matrice è =2.
In conclusione:

$$t \neq -1 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \dim(Im(f_t)) = \mathrm{r}k(A_t) = 3 \\ \dim(Ker(f_t)) = 3 - \mathrm{r}k(A_t) = 0 \end{cases}$$

$$t = -1 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \dim(Im(f_t)) = \mathrm{r}k(A_t) = 2 \\ \dim(Ker(f_t)) = 3 - \mathrm{r}k(A_t) = 1 \end{cases}$$