Corso di Algebra

Ingegneria Gestionale - anno accademico 2004/2005

soluzioni Esercitazione 3.3

- Dire se le seguenti proposizioni sono vere o false:

Proposizione	Vera	Falsa
Ogni applicazione lineare da $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^3$ è iniettiva	□	•
$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4 \Rightarrow rk(f) \leq 3$	•	
$f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3 \Rightarrow rk(f) \leq 3$	•	□
$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $Ker(f) = \{0_V\} \Rightarrow\ rk(f) = 3$	•	□
$f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ tale che $rk(f) = 3 \Rightarrow f$ surgettiva.	•	□
$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^5$ tale che $rk(f) = 3 \Rightarrow f$ iniettiva.	•	
$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^5$ tale che $rk(f) = 3 \Rightarrow f$ surgettiva .		•
$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $rk(f) = 2 \Rightarrow f$ iniettiva.	□	•
$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $rk(f) = 2 \Rightarrow f$ surgettiva.	□	•
$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $rk(f) = 2 \Rightarrow\ dim(Ker(f)) = 2$	□	•
$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $rk(f) = 2 \Rightarrow\ dim(Ker(f)) = 1$	•	□
$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tale che $rk(f) = 2 \Rightarrow\ dim(Ker(f)) = 1$	•	□
$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ tale che $rk(f) = 2 \Rightarrow\ dim(Ker(f)) = 1$	•	□
$f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che $rk(f) = 2 \Rightarrow\ dim(Ker(f)) = 2$	•	□
$f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che $rk(f) = 3 \Rightarrow\ dim(Ker(f)) = 1$	•	□

- Determinare $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lineare tale che
$f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}.$

Soluzione.

Si tratta di determinare la matrice associata all'applicazione f rispetto alla base canonica. Abbiamo cioè

$$f(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

con i coefficienti a_{ij} da determinare sfruttando le condizione dell'esercizio.

Allora si ha $f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Per determinare la seconda colonna sfruttiamo la seconda condizione. Ovvero
$f\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & a_{12} \\ 1 & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Svolgendo il calcolo otteniamo

$$\begin{pmatrix} 6 + 3a_{12} \\ 3 + 3a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \text{quindi} \quad \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{ovvero} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

• Determinare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineare tale che

$$f\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix},\quad f\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\3\\6\end{pmatrix},\quad \text{e}\quad f\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\5\\16\end{pmatrix}$$

Soluzione.

Si tratta di determinare, come nell'esercizio precedente, la matrice associata all'applicazione f rispetto alla base canonica. Abbiamo cioè

$$f(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix})=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

con i coefficienti a_{ij} da determinare sfruttando le condizione dell'esercizio.

Allora si ha $f\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\a_{31}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$.

Inoltre $f\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\3\\6\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}a_{13}\\a_{23}\\a_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\3\\6\end{pmatrix}$.

Per determinare la seconda colonna sfruttiamo la terza condizione. Ovvero

$$f\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\3\\6\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}2&a_{12}&6\\1&a_{22}&3\\3&a_{32}&6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\5\\16\end{pmatrix}.$$

Svolgendo il calcolo otteniamo

$$\begin{pmatrix}4+a_{12}+18\\2+a_{22}+9\\6+a_{32}+18\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\5\\16\end{pmatrix},\quad\text{quindi}\quad\begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\\a_{32}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-14\\-6\\-8\end{pmatrix}\quad\text{ovvero}\quad A=\begin{pmatrix}2&-14&6\\1&-6&3\\3&-8&6\end{pmatrix}.$$

• Determinare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineare tale che

$$f\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix},\quad f\begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\3\\6\end{pmatrix},\quad \text{e}\quad f\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\5\\16\end{pmatrix}$$

Soluzione.

Di nuovo i tratta di determinare la matrice associata all'applicazione f rispetto alla base canonica. Abbiamo cioè

$$f(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix})=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

con i coefficienti a_{ij} da determinare sfruttando le condizione dell'esercizio.

Allora si ha $f\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\a_{31}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$.

Inoltre $f\begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\3\\6\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}3a_{13}\\3a_{23}\\3a_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\3\\6\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}a_{13}\\a_{23}\\a_{33}\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}6\\3\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$.

Per determinare la seconda colonna sfruttiamo la terza condizione. Ovvero

$$f\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\3\\6\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}2&a_{12}&2\\1&a_{22}&1\\3&a_{32}&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\5\\16\end{pmatrix}.$$

Svolgendo il calcolo otteniamo

$$\begin{pmatrix}4+a_{12}+6\\2+a_{22}+3\\6+a_{32}+6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\5\\16\end{pmatrix},\quad\text{quindi}\quad\begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\\a_{32}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\0\\4\end{pmatrix}\quad\text{ovvero}\quad A=\begin{pmatrix}2&-2&2\\1&0&1\\3&4&2\end{pmatrix}.$$

Esercizio . Date le seguenti matrici, determinarne il rango e la dimensione di $Ker(l_A)$, dove l_A è l'applicazione lineare $\quad X \mapsto A \cdot X$

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	r$k = 2$;	$\dim(Ker(l_A)) = 0$
$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$	r$k = 1$;	$\dim(Ker(l_A)) = 1$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$	r$k = 2$;	$\dim(Ker(l_A)) = 1$
$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$	r$k = 1$;	$\dim(Ker(l_A)) = 2$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$	r$k = 2$;	$\dim(Ker(l_A)) = 1$
$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	r$k = 3$;	$\dim(Ker(l_A)) = 0$
$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	r$k = 3$;	$\dim(Ker(l_A)) = 1$
$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 7 & 8 & 9 & 6 & 6 & 9 \\ 0 & 2 & 0 & 12 & 23 & 5 & 7 & 6 & 8 \\ -1 & 0 & 0 & 10 & 43 & 5 & 8 & 16 & 28 \end{pmatrix}$	r$k = 3$;	$\dim(Ker(l_A)) = 9 - 3 = 6$
$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	r$k = 3$;	$\dim(Ker(l_A)) = 0$
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & 100 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots & 99 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & \cdots & 98 \\ 0 & 0 & \cdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$	r$k = 100$;	$\dim(Ker(l_A)) = 0$