Corso di Algebra - Ingegneria Gestionale

anno accademico 2004/2005

risposte ESERCITAZIONE 3.2

Proposizione	Vera	Falsa
Esiste un'applicazione lineare da $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^3$ iniettiva	•	☐
Esiste un'applicazione lineare da $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^4$ iniettiva	•	☐
Esiste un'applicazione lineare da $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^2$ iniettiva	☐	•
Esiste un'applicazione lineare da $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^4$ surgettiva	☐	•
Esiste un'applicazione lineare da $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^3$ surgettiva	•	
Esiste un'applicazione lineare da $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^2$ surgettiva	•	☐
f iniettiva $\Rightarrow Ker(f) = \{0_V\}$	•	☐
$Ker(f) = \{0_V\} \Rightarrow f$ iniettiva	•	☐
$Ker(f) = \{0_V\} \Rightarrow f$ surgettiva	☐	•
Esiste $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tale che $\dim Ker(f) = \dim Im(f)$	•	☐
Esiste $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $\dim Ker(f) = \dim Im(f)$	☐	•

• Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineare .

Sapendo che $f\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$, e che $f\begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$, $\quad f\begin{pmatrix}3\\0\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\2\\5\end{pmatrix}$

perchè f è lineare e si ha $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\0\\3\end{pmatrix}$ da cui si deduce che $f\begin{pmatrix}3\\0\\3\end{pmatrix} = f\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + f\begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix}$.

• Data $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$f\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2x_1 + x_2\\-x_2\\x_1\end{pmatrix}$$

i) Matrice associata ad f rispetto alle basi canoniche: $\begin{pmatrix}2 & 1\\0 & -1\\1 & 0\end{pmatrix}$

Osservare che $\mathrm{r}k(A) = 2$.

ii) Determinare una base di $Im(f)$ ed uno spazio $W \subset \mathbb{R}^3$ tale $\mathbb{R}^3 = W \bigoplus Im(f)$:

In questo caso $Im(f) = \langle \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} \rangle$. Poich''e i due vettori sono linearmente indipendenti allora una base di $Im(f)$ è data proprio da $\{ \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} \}$.

Per determinare uno spazio $W \subset \mathbb{R}^3$ tale $\mathbb{R}^3 = W \bigoplus Im(f)$ è sufficiente trovare un terzo vettore indipendente da questi due . Per esempio , prendendo il primo vettore della base canonica abbiamo $W = \langle \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \rangle$

• Data $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

i) Matrice associata ad f rispetto alle basi canoniche: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Osservare che r$k(A) = 2$.

ii) Determinare una base di $Im(f)$ ed uno spazio $W \subset \mathbb{R}^3$ tale $\mathbb{R}^3 = W \bigoplus Im(f)$:

In questo caso $Im(f) = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$. Poich'‘e i due vettori sono linearmente indipendenti allora una base di $Im(f)$ è data proprio da $\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \}$.

Per determinare uno spazio $W \subset \mathbb{R}^3$ tale $\mathbb{R}^3 = W \bigoplus Im(f)$ è sufficiente trovare un terzo vettore indipendente da questi due . Per esempio , prendendo il terzo vettore della base canonica abbiamo $W = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$

• Data $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definita da

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 + 2x_2 + x_3 \\ x_1 - x_2 + x_3 \end{pmatrix}$$

i) Matrice associata ad f rispetto alle basi canoniche: $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Osservare che r$k(A) = 2$ poichè A è matrice 2×3 ed i primi due vettori colonna sono linearmente indipendenti.

ii) Base di $Ker(f)$:

Poichè r$k(A) = 2$ per il teorema della dimensione si ha $\dim(Ker(f)) = 3 - 2 = 1$.

Pertanto sappiamo che dobbiamo trovare uno spazio di dimensione 1.

Per determinare una base del ker dobbiamo risolvere il sistema

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \end{cases}$$

($II \leftrightarrow \ II - \frac{1}{2} \cdot I$; Il sistema è equivalente al sistema

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0 \\ \quad -2x_2 - \frac{1}{2}x_3 &= 0 \end{cases}$$

Posto $x_3 = t$ parametro, otteniamo $x_2 = \frac{1}{4}t$ e quinsi $x_1 = -\frac{3}{4}t$. Ponendo $t = 4$ una base del $Ker)f)$ è data da $\left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$.

Per determinare uno spazio $W \subset \mathbb{R}^3$ tale $\mathbb{R}^3 = W \bigoplus Ker(f)$ è sufficiente trovare due vettori v_1, v_2 in modo tale che $v_1, v_2, \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ risulti essere una base di $\mathbb{R}^3$. Ad esempio possiamo cioè considerare $W = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$.