Spazi vettoriali applicazioni lineari e matrici: definizioni e qualche proprietà

Mario Poletti

Elettronica e Telecomunicazioni

Pisa, 2009/10

Copisteria Speedy

Indice

1 Anelli e Campi **1**

1.1 Anelli . . . 1
1.2 Anelli con identità . . . 3
1.3 Anelli commutativi . . . 4
1.4 Divisori di zero . . . 5
1.5 Unità . . . 5
1.6 Campi . . . 7
1.7 Il campo complesso $\mathbb{C}$ . . . 8
1.8 Coniugio in $\mathbb{C}$ . . . 10
1.9 Gli anelli $\mathbb{Z}_n$ e i campi $\mathbb{F}_p$ . . . 11

2 Spazi vettoriali **17**

2.1 Spazi vettoriali . . . 17
2.2 Gli spazi vettoriali V_L . . . 20
2.3 Spazi vettoriali di matrici . . . 25
2.4 Sistemi di equazioni lineari: il Metodo di Gauss . . . 30
2.5 Spazi vettoriali di funzioni a valori in un campo . . . 38
2.6 Famiglie finite linearmente indipendenti . . . 40
2.7 Spazi vettoriali di tipo finito e non finito . . . 49
2.8 Basi . . . 51
2.9 Spazi vettoriali di tipo finito: esistenza basi . . . 54
2.10 Spazi vettoriali di tipo finito: dimensione . . . 57
2.11 Spazi vettoriali di tipo finito: coordinate . . . 61
2.12 Sottospazi . . . 65
2.13 Intersezione e somma di sottospazi . . . 68
2.14 Somma diretta . . . 71

3 Applicazioni lineari e matrici **81**

3.1 Applicazioni lineari . . . 81
3.2 Applicazioni lineari definite su spazi di tipo finito . . . 85
3.3 La categoria degli spazi vettoriali . . . 89
3.4 Applicazione lineare canonica associata ad una matrice . . . 95
3.5 Prodotto tra matrici . . . 98

Copisteria Speedy

3.6 Prodotto tra matrici: proprietà 104
3.7 Trasposizione: gli operatori T e $*$ 108
3.8 Matrici reali simmetriche e complesse hermitiane 110
3.9 L'anello $K^{n\times n}$ delle matrici quadrate 116
3.10 Matrici associate ad applicazioni lineari 119

4 Determinante 123
4.1 Permutazioni e segno 123
4.2 Determinante 127
4.3 Il Metodo di Gauss 131
4.4 Il Teorema di Laplace 136
4.5 Basi di K^n, unità di $K^{n\times n}$ 140
4.6 Famiglie indipendenti in K^n 142
4.7 Rango 146
4.8 Sistemi di equazioni lineari: il Teorema di Cramer 149
4.9 Sistemi di equazioni lineari: il metodo del rango 150
4.10 Elementi di $\mathrm{Hom}(K^n, K^m)$: dal comportamento su una base alla rappresentazione $\mathscr{L}_A$ 157

5 Autospazi 159
5.1 Autovalori, autovettori e autospazi 159
5.2 Autovalori, autovettori e autospazi di matrici 163
5.3 Matrici diagonalizzabili e diagonalizzazione 166
5.4 Endomorfismi di spazi di tipo finito: calcolo autovalori, autovettori, autospazi 169

6 Spazi con prodotto scalare e hermitiano 171
6.1 Spazi reali con prodotto scalare 171
6.2 Spazi complessi con prodotto hermitiano 175
6.3 Spazi di tipo finito con ps e ph: esistenza basi ortogonali . . . 179
6.4 Spazi di tipo finito con ps e ph: il Teorema di Sylvester . . . 185

7 Spazi con prodotto scalare e hermitiano definito positivo 189
7.1 Spazi con prodotto scalare ed hermitiano definito positivo: norma e metrica 189
7.2 Prodotto scalare canonico in V_L 192
7.3 Prodotto scalare canonico in $\mathbb{R}^n$ 195
7.4 Prodotto hermitiano canonico in $\mathbb{C}^n$ 198
7.5 Spazi con prodotto scalare ed hermitiano definito positivo: proprietà della norma e della metrica 201
7.6 Spazi con prodotto scalare ed hermitiano definito positivo: proiezione su sottospazi 208
7.7 Diagonalizzazione di matrici complesse hermitiane 214
7.8 Diagonalizzazione di matrici reali simmetriche 220

Capitolo 1

Anelli e Campi

1.1 Anelli

Un *anello* è un insieme A tale che:

▼ $A \neq \emptyset$

♦ per $\forall$ coppia $(a, b) \in A \times A$ è definito un elemento di A

$$\begin{cases} \text{chiamato } \textit{somma} \text{ di } a \text{ e di } b \\ \text{indicato con } a + b \end{cases}$$

e un elemento di A

$$\begin{cases} \text{chiamato } \textit{prodotto} \text{ di } a \text{ e di } b \\ \text{indicato con } ab \end{cases}$$

♦ l'operazione di addizione è *associativa* e *commutativa*, ammette *elemento neutro*, rispetto ad essa ogni elemento ha *opposto*, ossia:

- per $\forall a, b, c \in A$ si ha

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

(*Nota:* il risultato delle due operazioni si può quindi indicare con

$$a + b + c$$

omettendo le parentesi);

- per $\forall a, b \in A$ si ha

$$a + b = b + a$$

(*Nota:* si provi che per $\forall a, b, c \in A$ sussitono quindi le uguaglianze seguenti

$$\begin{aligned} a + b + c = a + c + b = \\ b + a + c = b + c + a = \\ c + a + b = c + b + a \quad); \end{aligned}$$

- $\exists \omega \in A$ tale che per $\forall a \in A$ si ha

$$a + \omega = \omega + a = a$$

(*Nota:* se $\eta \in A$ è un secondo tale elemento, si ha

$$\eta = \eta + \omega = \omega;$$

quindi ω è l'unico elemento con tale proprietà; ω si dice l'*elemento neutro* rispetto all'addizione, o lo *zero* di A, e si denota con 0_A o più semplicemente con 0);

- per $\forall a \in A$, $\exists a' \in A$ tale che

$$a + a' = a' + a = 0$$

(*Nota:* se $a'' \in A$ è un secondo tale elemento, si ha

$$\begin{aligned} a' = a' + 0 = a' + (a + a'') = \\ (a' + a) + a'' = 0 + a'' = a'' \quad ; \end{aligned}$$

quindi a' è l'unico elemento con tale proprietà; a' si dice l'*opposto* di a, e si denota con il simbolo $-a$);
(*Nota:* si provi che:

$$\begin{aligned} &-(-a) = a \\ &-(a + b) = (-a) + (-b) \quad ; \end{aligned}$$

i simboli $\begin{cases} a - b \\ -a + b \\ -a - b \end{cases}$ sono abbreviazioni di $\begin{cases} a + (-b) \\ (-a) + b \\ (-a) + (-b) \end{cases}$);

▲ l'operazione di moltiplicazione è *associativa*, e *distributiva a sinistra e a destra* rispetto all'addizione, ossia:

- per $\forall a, b, c \in A$ si ha

$$a(bc) = (ab)c$$

- per $\forall a, b, c \in A$ si ha

$$\begin{aligned} (a + b)c = ac + bc \\ c(a + b) = ca + cb \end{aligned}$$

Nota: per $\forall a, b \in A$ si ha quindi:

- $0a = 0$
  Infatti: $0a = (0 + 0)a = 0a + 0a$, quindi

$$\begin{aligned} 0 = (0a) - (0a) = (0a + 0a) - (0a) = \\ 0a + (0a - (0a)) = 0a + 0 = 0a \end{aligned}$$

- $a0 = 0$ (stessa dimostrazione)
- $(-a)b = -(ab)$
  Infatti: $0 = 0b = (a + (-a))b = (ab) + (-a)b$
- $a(-b) = -(ab)$ (stessa dimostrazione)

Nota: il simbolo $-ab$ denota $(-a)b = a(-b) = -(ab)$.

Esempio: Si consideri l'insieme A_1 avente per elementi le *matrici* del tipo

$$a = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

con $a_{11}, a_{21}, a_{12}, a_{22}$ interi *pari.*

Per ogni

$$a = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \in A_1$$

si ponga

$$a + b = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix}$$

$$ab = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

- Si verifichi che A_1 è un anello.
- Chi è 0 ?
- Sia $a \in A_1$; chi è $-a$?

1.2 Anelli con identità

Sia A un anello:

- se $\exists u \in A$ tale che per $\forall a \in A$ si abbia

  $$ua = au = a \quad ,$$

  allora:

  - se $v \in A$ è un secondo tale elemento, si ha

    $$v = vu = u \quad ;$$

    pertanto u è l'unico tale elemento;
  - u si dice l'elemento neutro rispetto alla moltiplicazione, o l'*identità* di A, e si denota con 1 o con 1_A ;

- in tal caso, A si dice un *anello con identità*.

Esempi: Si provi che l'anello A_1 descritto nella Sezione 1.1 è un anello senza identità.

Si consideri l'insieme A_2 avente per elementi le *matrici* del tipo

$$a = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

con $a_{11}, a_{21}, a_{12}, a_{22}$ interi.

Per ogni

$$a = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \in A_2$$

si ponga

$$a + b = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix}$$

$$ab = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

- Si verifichi che A_2 è un anello con identità.
- Si verichi che

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad 1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad .$$

- Sia

$$i = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in A_2 \quad ;$$

  siverichi che

$$i^2 = -1 \ .$$

1.3 Anelli commutativi

Sia A un anello:

- se per $\forall (a, b) \in A \times A$ si ha

$$ab = ba \ ,$$

  allora A si dice un *anello commutativo*.

Esempi: Si provi che gli anelli A_1, A_2 descitti nelle Sezioni 1.1, 1.2 sono anelli non commutativi (A_1 senza identità, A_2 con identità).

Si osservi che $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ sono anelli commutativi con identità.

1.4 Divisori di zero

Sia A un anello, e sia $a \in A$:

- se
$$\begin{cases} a \neq 0 \\ \exists b \in A \text{ tale che } b \neq 0, ab = 0 \end{cases},$$
allora
$$a \text{ si dice un } \textit{divisore sinistro di zero}$$

- se
$$\begin{cases} a \neq 0 \\ \exists c \in A \text{ tale che } c \neq 0, ca = 0 \end{cases},$$
allora
$$a \text{ si dice un } \textit{divisore destro di zero}$$

Esempi: Sia A_2 l'anello descritto nella Sezione 1.2; si provi che

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \in A_2$$

è un divisore di zero sia destro che sinistro.

Sia A un anello con identità, e sia $a \in A$; si provino gli asserti:

- a divisore sinistro di zero $\Rightarrow \nexists c \in A$ tale che $ca = 1$;
- a divisore destro di zero $\Rightarrow \nexists c \in A$ tale che $ac = 1$

Se A è un anello commutativo, ogni divisore destro di zero è anche un divisore sinistro e viceversa.

1.5 Unità

Sia A un anello con identità, e sia $1 \neq 0$. [1] Si consideri un elemento $a \in A$:

- se $a = 0$, per $\forall b \in A$ si ha
$$ab = ba = 0 \ ,$$
e quindi $\nexists b \in A$ tale che
$$ab = 1 \ ,$$
e $\nexists b \in A$ tale che
$$ba = 1 \ ;$$
ossia $a = 0$ non ammette inversi né destri né sinistri;

[1] Sia A un anello con identità, tale che $1 = 0$; allora A possiede un solo elemento, e precisamente 0.
Infatti: sia $a \in A$; si ha: $a = a1 = a0 = 0$.
In tal caso, A si dice l'anello banale.

- se $a \neq 0$, ed esistono un inverso destro e un inverso sinistro di a, ossia $\exists b', b'' \in A$ tali che
$$ab' = b''a = 1 \ ,$$
allora
  - $b' = b''$, infatti si ha
$$b' = b'1 = b'(ab'') = (b'a)b'' = 1b'' = b'' \ ;$$
  - ne segue che a ammette un unico inverso destro, un unico inverso sinistro, e tali elementi sono uguali;

  in tal caso
  - a si dice un *elemento invertibile* di A, o una *unità* di A ,
  - l'unico inverso destro di a, che coincide con l'unico inverso sinistro di a, si dice *l'inverso* di a , e si denota con a^{-1} .

Esempi: Si consideri l'anello (non commutativo) con identità A_2 descritto nella Sezione 1.2; si provi che
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \in A_2$$
é invertibile, e si determini
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \ ;$$
si provi che
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$
è un divisore destro e sinistro di zero, e se ne deduca che tale elemento non è invertibile;
si provi che
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$
non è né un divisore destro né un divisore sinistro di zero, si provi che tale elemento non è invertibile.
Si determinino le unità di $\mathbb{Z}$.
Si determinino le unità di $\mathbb{Q}$.
Nota: Sia A un anello non banale con identità, e siano a, b unità di A; si provi che:

- a^{-1} è unità di A, e $(a^{-1})^{-1} = a$;

- ab è unità di A, e $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$ (l'inversione dell'ordine non è accidentale; vedi l'esempio che segue).

Esempio: Si consideri ancora l'anello A_2, e siano:

$$a = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \;;$$

si provi che a, b sono invertibili, e si calcolino a^{-1}, b^{-1};
si calcolino $(ab)^{-1}, a^{-1}b^{-1}, b^{-1}a^{-1}$, e si verifichi che:

$$(ab)^{-1} \begin{cases} = b^{-1}a^{-1} \\ \neq a^{-1}b^{-1} \end{cases}$$

1.6 Campi

Sia K un anello; se:

- K è un anello commutativo con identità,
- $1 \neq 0$,
- $\forall a \in K$, con $a \neq 0$, è invertibile,

allora K si dice un *campo*.

Esempi: $\mathbb{Z}$ è un anello commutativo con identità, non banale, ma non è un campo.

$\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ sono campi.

Si consideri l'insieme $D = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, con le operazioni:

$$\begin{array}{lcl} (a,b) + (r,s) & = & (a+r, b+s) \\ (a,b)(r,s) & = & (ar, bs) \end{array} \;;$$

- si provi che D è un anello commutativo con identità, non banale, ma non è un campo;
- chi è 0? chie è 1?
- quali sono i divisori di zero di D?
- quali sono le unità di D?

Nota: Sia K un campo. Dati elementi $a, b \in K$, con $b \neq 0$, la sigla

$$\frac{a}{b}$$

denota l'elemento

$$ab^{-1} = b^{-1}a$$

(si ricordi che K è commutativo);

si dimostri che:

- per $\forall a, b, h \in K$, con $b \neq 0, h \neq 0$, si ha:

$$\frac{a}{b} = \frac{ah}{bh} \ ;$$

- per $\forall a, b, c, d \in K$, con $b \neq 0, d \neq 0$, si ha:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}, \quad \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + cb}{bd} \quad .$$

1.7 Il campo complesso $\mathbb{C}$

Sia A un anello con identità, vericante le proprietà seguenti:

- $\mathbb{R} \subset A$,
- per $\forall a, b \in \mathbb{R}$, la somma di a, b in $\mathbb{R}$ e la somma di a, b in A forniscono lo stesso risultato,
- per $\forall a, b \in \mathbb{R}$, il prodotto di a, b in $\mathbb{R}$ e il prodotto di a, b in A forniscono lo stesso risultato,
- lo 0 di $\mathbb{R}$ è l'elemento neutro per la somma in A,
- l' 1 di $\mathbb{R}$ è l'elemento neutro per il prodotto in A,
- per $\forall a \in \mathbb{R}$ e $\forall \theta \in A$ si ha che a e θ commutano, ossia si ha

$$a\theta = \theta a$$

- esiste un elemento

$$i \in A$$

  tale che

$$i^2 = -1$$

  (*Nota:* come visto nella Sezione 1.2 esistono anelli con elementi verificanti tale inconsueta relazione)

Siano $a, b, r, s \in \mathbb{R}$; si ponga

$$c = a + bi \in A, \quad d = r + si \in A \ ;$$

- si provi che

$$i \notin \mathbb{R}$$

- si provi che

$$c = d \Longleftrightarrow a = r, b = s$$

- si provi che

$$\begin{cases} c+d &= (a+bi)+(r+si) &= (a+r)+(b+s)i \\ cd &= (a+bi)+(r+si) &= (ar-bs)+(as+br)i \end{cases}$$

Si ponga

$$\mathbb{C} = \Big\{c \in A : \exists a, b \in \mathbb{R} \textit{ tali che } c = a+bi\Big\}$$

si verifichi che:

- $\mathbb{C}$ con le operazioni di somma e prodotto indotte da A è un anello non banale commutativo con identità,
- per $\forall c = a+bi \in \mathbb{C}$ $(a, b \in \mathbb{R})$, tale che $c \neq 0$, si ha:
  - $a^2+b^2 \neq 0$
  - $\dfrac{a}{a^2+b^2} - \dfrac{b}{a^2+b^2} i \in \mathbb{C}$
  - $(a+bi)\left(\dfrac{a}{a^2+b^2} - \dfrac{b}{a^2+b^2} i\right) = 1$

se ne deduca che:

- $\mathbb{C}$ è un campo
- per $\forall c = a+bi \in \mathbb{C}$ $(a, b \in \mathbb{R})$, tale che $c \neq 0$, si ha:

$$c^{-1} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2} i$$

Il campo $\mathbb{C}$ si dice il *campo complesso*; gli elementi di $\mathbb{C}$ si dicono i *numeri complessi.*

Dato

$$c \in \mathbb{C}$$

- la rappresentazione di c nella forma

$$c = a+bi \qquad a, b \in \mathbb{R}$$

  si dice *la rappresentazione algebrica* di c
- a si dice *la parte reale* di c, e si denota con "Re c"
- b si dice *la parte immaginaria* di c, e si denota con "Im c"

Esempi:

▼ Calcolare $(2+3i)+(7-5i), \quad -(\sqrt{2}-7i)$

◆ Calcolare $(4-2i)(-5+(3/8)i), \quad (\sqrt{2}+7i)^{-1}$

◆ Calcolare $(4+(3/8)i)+(4+(3/8)i)+(4+(3/8)i), \quad (\sqrt{2}+2i)^3$

◆ Calcolare $\underbrace{(4+(3/8)i)+\cdots+(4+(3/8)i)}_{8 \text{ volte}}, \quad (\sqrt{2}+2i)^8, \quad (\sqrt{2}+2i)^{-8}$

◆ Calcolare

$$\frac{(2+5i)+(3-(5/7)i)}{((2/3)+i)+(4-(1/5)i)} - \left(\frac{((1/2)-(1/3)i)+(8-3i)}{(5+(8/3)i)+(-(5/3)-(5/2)i)}\right)^{-2}$$

▲ Determinare i $c \in \mathbb{C}$ tali che $(7-3i)c = 2+4i$

1.8 Coniugio in $\mathbb{C}$

Sia $c = a+bi \in \mathbb{C}$ $(a, b \in \mathbb{R})$; si pone $\overline{c} = a-bi$; $\overline{c}$ si dice il *coniugato* di c. L'operazione di coniugio in $\mathbb{C}$ verifica le seguenti proprietà:

▼ $\dfrac{c+\overline{c}}{2} = \mathrm{Re}\ c\ , \ \dfrac{c-\overline{c}}{2i} = \mathrm{Im}\ c$

◆ $c+\overline{c} = 2a \in \mathbb{R}$

◆ $c \cdot \overline{c} = a^2+b^2 \in \mathbb{R}$

◆ $c \cdot \overline{c} \geqslant 0$

▲ $c \cdot \overline{c} = 0 \Longleftrightarrow c = 0$

▼ $(c+d)^{-} = \overline{c}+\overline{d}$

◆ $(c \cdot d)^{-} = \overline{c} \cdot \overline{d}$

◆ $(-c)^{-} = -(\overline{c})$

▲ $\left(c^{-1}\right)^{-} = (\overline{c})^{-1}$ (quando $c \neq 0$)

▼ $(\overline{c})^{-} = c$

◆ $\overline{c} = c \Longleftrightarrow c \in \mathbb{R}$

▲ $c^{-1} = \dfrac{\overline{c}}{c \cdot \overline{c}}$ (quando $c \neq 0$)

Si pone

$$|c| = \sqrt{c\overline{c}} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$|c|$ si dice *il modulo* di c.

Se $c \in \mathbb{R}$, ilsimbolo $|c|$ sembra ambiguo: può indicare

$$\begin{cases} \text{sia il modulo di } c \\ \text{sia il valore assoluto di } c \end{cases}$$

verificare che si ha

$$\text{modulo di } c = \text{valore assoluto di } c$$

Esercizi:

▼ Calcolare

$$\begin{array}{ll} (2-3i)^{-} & \\ \overline{(2-3i)i} & \overline{(2-3i)} \cdot \overline{i} \\ \overline{(2+3i)(7-4i)} & \overline{(2+3i)} \cdot \overline{(7-4i)} \end{array}$$

⧫ Provare che $\left(c^7\right)^{-} = (\overline{c})^7$

⧫ Provare che

$$(2+3i)^{95}(2-3i)^{95} \in \mathbb{R}$$
$$(9-18i)^{195}(7+i\sqrt{13})^{217} + (9+18i)^{195}(7-i\sqrt{13})^{217} \in \mathbb{R}$$

⧫ Calcolare $|3-4i|$, $\left|\sqrt{2} + i\sqrt{7}\right|$

▲ Determinare i $c \in \mathbb{C}$ tali che $c^{-1} = \overline{c}$.

1.9 Gli anelli $\mathbb{Z}_n$ e i campi $\mathbb{F}_p$

Si consideri l'intero positivo 6, e sia

$$\mathbb{Z}_6 = \left\{z_0, z_1, z_2, z_3, z_4, z_5\right\}$$

un insieme con 6 elementi. In $\mathbb{Z}_6$ si considerino le operazioni "$+$", "$\cdot$" definite da

$$z_h + z_k = z_r$$

ove r è il resto della divisione di $h + k$ per 6

$$z_h z_k = z_s$$

ove s è il resto della divisione di hk per 6

Ad esempio si verifichi che

- $z_5 + z_3 = z_2, \quad z_5 z_3 = z_3$

Si provi che

▼ $\mathbb{Z}_6$ è un anello commutativo con identità

⧫ l'elemeto neutro rispetto all'addizione è

$$z_0$$

tale elemento verrà quindi indicato con 0

⧫ $-z_0 = z_0, \ -z_1 = z_5, \ -z_2 = z_4, \ -z_3 = z_3, \ -z_4 = z_2, \ -z_5 = z_1$

⧫ l'elemeto neutro rispetto alla moltiplicazione è

$$z_1$$

tale elemento verrà quindi indicato con 1

⧫
$$\begin{aligned}
1 &= z_1 \\
1+1 &= z_2 \\
1+1+1 &= z_3 \\
\underbrace{1+\cdots+1}_{4} &= z_4 \\
\underbrace{1+\cdots+1}_{5} &= z_5 \\
\underbrace{1+\cdots+1}_{6} &= z_0
\end{aligned}$$

⧫ posto

$$94_6 = \underbrace{1+\cdots+1}_{94} \in \mathbb{Z}_6$$

tenuto conto che

$$94 = 6 \cdot 15 + 4$$

si ha

$$94_6 = \underbrace{\underbrace{(1+\cdots+1)}_{6} + \cdots + \underbrace{(1+\cdots+1)}_{6}}_{15} + \underbrace{(1+\cdots+1)}_{4} = z_4$$

▲ posto

$$(-94)_6 = \underbrace{-1-\cdots-1}_{94} \in \mathbb{Z}_6$$

tenuto conto che

$$(-94)_6 = -\left(94_6\right)$$

si ha

$$(-94)_6 = -z_4 = z_2$$

Sia $n \in \mathbb{N}$ tale che $2 \leqslant n$; le considerazioni fatte su 6 possono essere ripetute per n, ottenendo un anello $\mathbb{Z}_n$ con n elementi.

ESERCIZI

Si consideri $\mathbb{Z}_{14}$

▼ si calcolino

$$2134_{14},\ (-2134)_{14},\ -(2134_{14})$$

♦ si provi che per $\forall n, m \in \mathbb{Z}$ si ha

$$\begin{aligned} n_{14} = m_{14} \quad &\Longleftrightarrow \quad n - m \text{ è un multiplo di } 14 \\ n_{14} = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad n \text{ è un multiplo di } 14 \end{aligned}$$

♦ si provi che per $\forall n, m \in \mathbb{Z}$ si ha

$$\begin{aligned} (n+m)_{14} &= n_{14} + m_{14} \\ (nm)_{14} &= n_{14} m_{14} \end{aligned}$$

se ne deduca che per $\forall n \in \mathbb{Z}$ si ha

$$(-n)_{14} = -(n_{14})$$

tale elemento si denota (senza pericolo di ambiguità) con

$$-n_{14}$$

♦ si provi che

$$\mathbb{Z}_{14} = \left\{0_{14},\ 1_{14},\ 2_{14},\ \ldots,\ 12_{14},\ 13_{14}\right\}$$

♦ si risolvano le equazioni

$$\begin{aligned} 8_{14}x &= 0 \qquad && x \in \mathbb{Z}_{14} \\ 8_{14}x &= 2_{14} && x \in \mathbb{Z}_{14} \\ 8_{14}x &= 7_{14} && x \in \mathbb{Z}_{14} \\ 8_{14}x &= 1 && x \in \mathbb{Z}_{14} \\ 8_{14}x &= 9_{14} && x \in \mathbb{Z}_{14} \end{aligned}$$

Cenno. Si calcolino

$$8_{14}0_{14},\ 8_{14}1_{14},\ 8_{14}2_{14},\ \ldots,\ 8_{14}12_{14},\ 8_{14}13_{14}$$

■

▲ si provi che $\exists_1 c \in \mathbb{Z}_{14}$ tale che

$$c5_{14} = 1$$

se ne deduca che per $\forall d \in \mathbb{Z}_{14}$ l'equazione

$$5_{14}x = d \quad x \in \mathbb{Z}_{14}$$

ha una ed una sola soluzione, e che tale soluzione è

$$cd$$

1.9.1 Lemma. Sia B un anello commutativo con identità

$$\begin{cases} \text{tale che } 1 \neq 0 \\ \text{privo di divisori di zero (vedi Sezione 1.3)} \\ \text{costitutito da un numero finito } n \text{ di elementi: } b_1, \ldots, b_n \end{cases}$$

e sia $c \in B$ tale che $c \neq 0$; si provino gli asserti

▼ per $\forall h, k \in B$ si ha $ch = ck \iff h = k$

♦ l'insieme $\{cb_1, \ldots, cb_n\}$ ha n elementi

♦ si ha $\{cb_1, \ldots, cb_n\} = B$

▲ $\exists c' \in B$ tale che $cc' = 1$

se ne deduca che

- B è un campo

Si provi che

▼ i divisori di zero in $\mathbb{Z}_{12}$ sono

$$2_{12},\ 3_{12},\ 4_{12},\ 6_{12},\ 8_{12},\ 9_{12},\ 10_{12}$$

♦ n non primo $\Longrightarrow \mathbb{Z}_n$ ha divisori di zero

♦ n primo $\Longrightarrow \mathbb{Z}_n$ non ha divisori di zero

▲ $\mathbb{Z}_n$ è un campo $\iff n$ è primo

tenuto conto che $\mathbb{Z}_7$ è un campo

- si calcolino $z_1^{-1},\ z_2^{-1},\ z_3^{-1},\ z_4^{-1},\ z_5^{-1},\ z_6^{-1}$

1.9.2 Sia p un primo

▼ **Definizione.** l'anello Z_p è un campo; tale campo

▽ si denota con $\mathbb{F}_p$

△ si dice il *campo fondamentale con* p *elementi*

◆ siano $a \in \mathbb{F}_p$ e $n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 1$

▽ si ponga

$$na = \underbrace{a + \cdots + a}_{n}$$

△ si provi che

$$n \text{ multiplo di } p \implies na = 0$$

◆ si provi che i coefficienti binomiali

$$\binom{p}{0} = 1, \ \binom{p}{1} = \frac{p}{1!} = p, \ \binom{p}{2} = \frac{p(p-1)}{2!},$$

$$\ldots, \ \binom{p}{h} = \frac{p(p-1)\cdots(p-(h-1))}{h!}, \ \ldots,$$

$$\binom{p}{p-1} = \frac{p(p-1)\cdots 2}{(p-1)!} = p, \ \binom{p}{p} = \frac{p(p-1)\cdots 2\cdot 1}{p!} = 1$$

eccettuati il primo e l'ultimo, sono tutti multipli di p

◆ si provi che per $\forall a, b \in \mathbb{F}_p$ si ha

$$(a+b)^p = a^p + b^p$$

Cenno. Si ha

$$(a+b)^p = \sum_{h=0}^{p} \binom{p}{h} a^{p-h} b^h$$

■

◆ si provi che per $\forall a \in \mathbb{F}_p$ si ha

$$a^p = a$$

Cenno. Si ha

$$0^p = 0$$

$$1^p = 1$$

$$(2_p)^p = (1+1)^p = 1^p + 1^p = 1 + 1 = 2_p$$

$$(3_p)^p = (2_p+1)^p = (2_p)^p + 1^p = 2_p + 1 = 3_p$$

$$\vdots$$

■

▲ si provi che per $\forall a \in \mathbb{F}_p$ tale che $a \neq 0$ si ha

$$a^{p-1} = 1$$

Cenno. Si ha $a^p = a \Longrightarrow a^p a^{-1} = a a^{-1} \Longrightarrow a^{p-1} = 1$.

ESERCIZI

Sia $p \in \mathbb{N}$ un primo; si provino i seguenti due Teoremi di Fermat:

▼ per $\forall n \in \mathbb{Z}$ si ha che

$$n^p - n$$

è un multiplo di p

Cenno. Nel campo $\mathbb{F}_p$ si ha

$$\left(n^p - n\right)_p = (n_p)^p - n_p = 0$$

L'asserto segue quindi da 1.9.2 ■

▲ per $\forall n \in \mathbb{Z}$ che non sia multiplo di p si ha che

$$n^{p-1} - 1$$

è un multiplo di p

Capitolo 2

Spazi vettoriali

2.1 Spazi vettoriali

Sia K un campo (ad esempio $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{F}_p$). Uno *spazio vettoriale sul campo* K è un insieme V tale che:

- ▼ $V \neq \emptyset$
- ⧫ per $\forall (v, w) \in V \times V$ è definito un elemento di V

$$\begin{cases} \text{chiamato } \textit{somma} \text{ di } v \text{ e di } w \\ \text{indicato con } v + w \end{cases},$$

  e per $\forall (\lambda, w) \in K \times V$ è definito un elemento di V

$$\begin{cases} \text{chiamato } \textit{multiplo} \text{ di } v \text{ secondo } \lambda \\ \text{indicato con } \lambda v \end{cases}$$

- ⧫ l'operazione di addizione è *associativa* e *commutativa*, ammette *elemento neutro*, rispetto ad essa ogni elemento ha *opposto*, ossia:
  - ◦ per $\forall v, w, z \in V$ si ha

$$(v + w) + z = v + (w + z)$$

    (*Nota:* il risultato delle due operazioni si può quindi indicare con

$$v + w + z$$

    omettendo le parentesi);
  - ◦ per $\forall v, w \in V$ si ha

$$v + w = w + v$$

(*Nota:* si provi che per $\forall v, w, z \in V$ sussitono quindi le uguaglianze seguenti

$$\begin{aligned} v+w+z = v+z+w = \\ w+v+z = w+z+v = \\ z+v+w = z+w+v \quad); \end{aligned}$$

- $\exists \omega \in V$ tale che per $\forall v \in V$ si ha

$$v + \omega = \omega + v = v$$

(*Nota:* se $\eta \in V$ è un secondo tale elemento, si ha

$$\eta = \eta + \omega = \omega;$$

quindi ω è l'unico elemento con tale proprietà; ω si dice l'*elemento neutro* rispetto all'addizione, o lo *zero* di V, e si denota con 0_V o più semplicemente con 0);

- per $\forall v \in V$, $\exists v' \in V$ tale che

$$v + v' = v' + v = 0$$

(*Nota:* se $v'' \in V$ è un secondo tale elemento, si ha

$$\begin{aligned} v' = v' + 0 = v' + (v + v'') = \\ (v' + v) + v'' = 0 + v'' = v'' \quad ; \end{aligned}$$

quindi v' è l'unico elemento con tale proprietà; v' si dice l'*opposto* di v, e si denota con il simbolo $-v$);
(*Nota:* si provi che:

$$\begin{aligned} &-(-v) = v \\ &-(v+w) = (-v) + (-w) \quad ; \end{aligned}$$

i simboli $\begin{cases} v - w \\ -v + w \\ -v - w \end{cases}$ sono abbreviazioni di $\begin{cases} v + (-w) \\ (-v) + w \\ (-v) + (-w) \end{cases}$);

♦ l'operazione di multiplo è *distributiva a sinistra e a destra* rispetto all'addizione, è *associativa*, ammette $1 = 1_K$ come *elemento neutro*, ossia:

- per $\forall \lambda, \mu \in K$ e per $\forall v, w \in V$ si ha

$$\begin{aligned} (\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v \\ \lambda(v + w) = \lambda v + \lambda w \end{aligned}$$

Nota: per $\forall \lambda \in K$ e$\forall v \in V$ si ha quindi:

- $0_K v = 0_V$
  Infatti: $0_K v = (0_K + 0_K)v = 0_K v + 0_K v$, quindi

$$0_V = (0_K v) - (0_K v) = (0_K v + 0_K v) - (0_K v) = \\ 0_K v + (0_K v - (0_K v)) = 0_K v + 0_K = 0_K v$$

- $\lambda 0_V = 0_V$ (dimostrazione analoga)
- $(-\lambda)v = -(\lambda v)$
  Infatti: $0_V = 0_K v = (\lambda + (-\lambda))v = (\lambda v) + (-\lambda)v$
- $\lambda(-v) = -(\lambda v)$ (dimostrazione analoga)

Nota: il simbolo $-\lambda v$ denota $(-\lambda)v = \lambda(-v) = -(\lambda v)$.

♦ per $\forall \lambda, \mu \in K$ e per $\forall v \in V$ si ha

$$\lambda(\mu v) = (\lambda\mu)v$$

▲ per $\forall v \in V$ si ha

$$1_K v = v$$

Esempi: Sia consideri il campo reale $\mathbb{R}$, e sia V_1 l'insieme $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ con le operazioni di addizione e multiplo definite da:

- per $\forall (a, b), (r, s) \in V_1$ si pone

$$(a, b) + (r, s) = (a + r, b + s)$$

- per $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ e per $\forall (a, b) \in V_1$ si pone

$$\lambda(a, b) = (\lambda a, 0)$$

si provi che tali operazioni verificano tutte le proprietà di uno spazio vettoriale, eccettuato la proprietà

"per $\forall (a, b) \in V_1$ si ha $1(a, b) = (a, b)$" ;

si verifichi infatti che si ha

$$1(3, 7) = (3, 0) \quad ;$$

ne segue che V_1 non è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$.

Sia consideri il campo reale $\mathbb{R}$, e sia V_2 l'insieme $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ con le operazioni di addizione e multiplo definite da:

- per $\forall (a, b), (r, s) \in V_2$ si pone

$$(a, b) + (r, s) = (a + r, b + s)$$

- per $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ e per $\forall (a,b) \in V_2$ si pone

$$\lambda(a,b) = (\lambda a, \lambda b)$$

si provi che V_2 è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$.

Conto tipico in uno spazio vettoriale: Sia K un campo e V uno spazio vettoriale su K. Dati elementi

$$\begin{cases} v_1, v_2, \ldots, v_h \in V \\ \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_h \in K \end{cases},$$

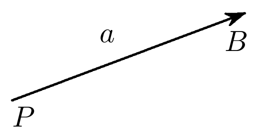
l'elemento

$$w = \sum_{j=1}^{h} \lambda_j v_j = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_h v_h \in V$$

si dice la *combinazione lineare di $v_1, v_2, \ldots, v_h$ con i coefficienti* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_h$.

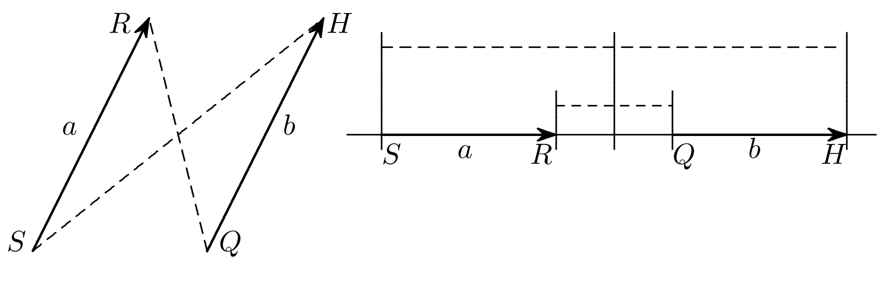
2.2 Gli spazi vettoriali V_L

Sia $\mathscr{S}$ l'insieme dei punti dello spazio. Siano P, B punti dello spazio; la freccia a avente *penna* in P e *punta* in B,



si denota con $\overrightarrow{PB}$ e si dice il *vettore* di penna P e punta B.

Due vettori $a = \overrightarrow{SR}$, $b = \overrightarrow{QH}$ si dicono *equivalenti*, e si scrive $a \sim b$, se



i segmenti SH e RQ hanno lo stesso punto medio. Si osservi che

$$\overrightarrow{SR} \sim \overrightarrow{QH} \Longrightarrow \overrightarrow{SQ} \sim \overrightarrow{RH}$$

Siano a, b, c tre vettori; si ha

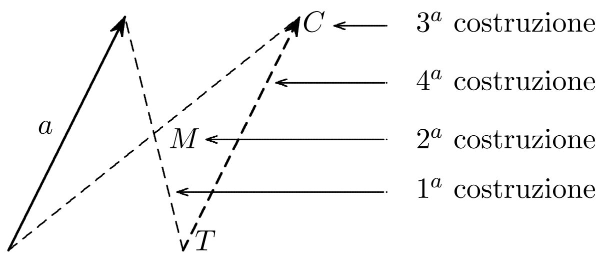
▼ $a \sim a$ (ossia $\sim$ è *riflessiva*)

♦ $a \sim b \Longrightarrow b \sim a$ (ossia $\sim$ è *simmetrica*)

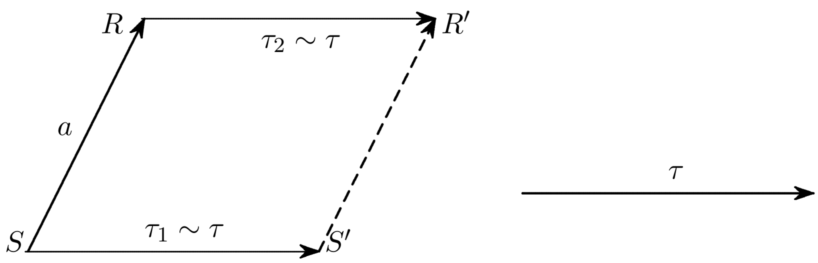
▲ $a \sim b, b \sim c \Longrightarrow a \sim c$ (ossia $\sim$ è *transitiva*)
(la dimostrazione della transitività è laboriosa: omessa)

Sussistono gli asserti

▼ siano a un vettore e T un punto; allora $\exists_1 \overrightarrow{TC} \sim a$



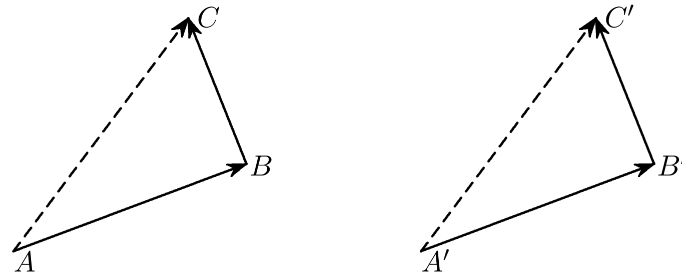
♦ siano $a = \overrightarrow{SR}$, τ due vettori; costruiti $\tau_1 = \overrightarrow{SS'} \sim \tau, \tau_2 = \overrightarrow{RR'} \sim \tau$



si ha $\overrightarrow{S'R'} \sim \overrightarrow{SR}$
(*Cenno:* $\tau_1 \sim \tau, \tau \sim \tau_2 \Longrightarrow \tau_1 \sim \tau_2 \Longrightarrow \overrightarrow{SR} \sim \overrightarrow{S'R'}$)

▲ siano $A, B, C,\ A', B', C'$ punti; si ha

$$\overrightarrow{A'B'} \sim \overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{B'C'} \sim \overrightarrow{BC} \Longrightarrow \overrightarrow{A'C'} \sim \overrightarrow{AC}$$



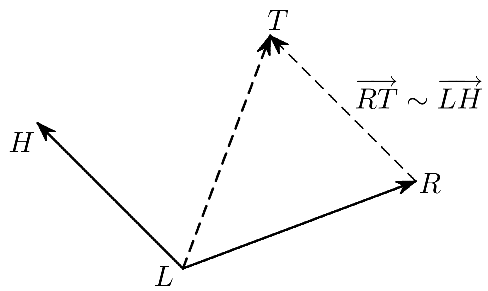
($Cenno$: $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{A'B'}$, $\overrightarrow{BC} \sim \overrightarrow{B'C'} \Longrightarrow \overrightarrow{AA'} \sim \overrightarrow{BB'}$, $\overrightarrow{BB'} \sim \overrightarrow{CC'} \Longrightarrow \overrightarrow{AA'} \sim \overrightarrow{CC'} \Longrightarrow \overrightarrow{AC} \sim \overrightarrow{A'C'}$)

Sia L un punto dello spazio. Si pone

$$V_L = \{\overrightarrow{LA} : A \text{ punto dell spazio}\} = \{a : a \text{ vettore di penna } L\}$$

In V_L si considerino le operazioni di *addizione* "$+$" e di *formazione di multiplo* "$\lambda\cdot$" definite da:

(*somma di due vettori*) siano $\overrightarrow{LR}, \overrightarrow{LH} \in V_L$; costruito $\overrightarrow{RT} \sim \overrightarrow{LH}$, si pone



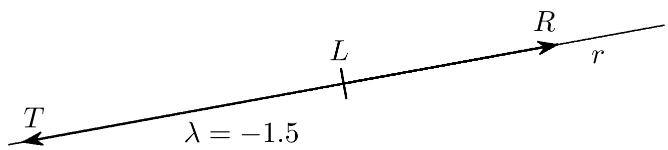
$$\overrightarrow{LR} + \overrightarrow{LH} = \overrightarrow{LT}$$

(*multiplo di un vettore*) siano $\overrightarrow{LR} \in V_L, \lambda \in \mathbb{R}$;

- se $R \neq L$, si considera la retta $r \ni L, R$ ed il punto T definito da

$$\begin{cases} T \in \text{semiretta di } r \text{ di origine } L \text{ e} \ni R, \text{ se } \lambda \geqslant 0 \\ T \in \text{semiretta di } r \text{ di origine } L \text{ e} \not\ni R, \text{ se } \lambda \leqslant 0 \\ LT/LR = |\lambda| \end{cases}$$

e si pone



$$\lambda\overrightarrow{LR} = \overrightarrow{LT}$$

▲ se $R = L$, si pone $\lambda\overrightarrow{LR} = \lambda\overrightarrow{LL} = \overrightarrow{LL}$

Si provi che V_L è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$.

Conto tipico in V_L: dati

$$\begin{cases} v_1, \dots, v_h \in V_L \\ \lambda_1, \dots, \lambda_h \in \mathbb{R} \end{cases}$$

calcolare

$$w = \lambda_1 v_1 + \cdots \lambda_h v_h = \sum_{j=1}^{h} \lambda_j v_j$$

ossia la combinazione lineare di $v_1, \dots, v_h$ con i coefficienti $\lambda_1, \dots, \lambda_h$.

Siano α, r un piano e una retta passanti per L. Si pone

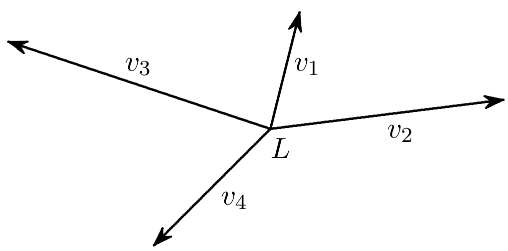
$$\alpha_L = \{\overrightarrow{LA} : A \in \alpha\} = \{a : a \text{ vettore di } \alpha \text{ di penna } L\}$$

$$r_L = \{\overrightarrow{LA} : A \in r\} = \{a : a \text{ vettore di } r \text{ di penna } L\}$$

Le definizioni e le considerazioni fatte per V_L possono essere ripetute per α_L e per r_L. Ne segue che α_L e r_L sono spazi vettoriali su $\mathbb{R}$.

Esercizi:

▼ Considerare i vettori $v_1, v_2, v_3, v_4 \in V_L$ in figura



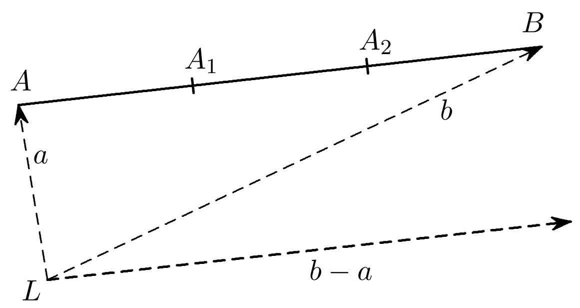
disegnare le seguenti combinazioni lineari di v_1, v_2, v_3, v_4

$$\begin{array}{lll} v_1 + v_2 & v_1 + v_3 & v_4 + v_3 \\ \frac{-3}{2} v_1 & \frac{4}{3} v_3 & -\sqrt{2} v_4 \\ \frac{2}{3} v_1 - \frac{1}{2} v_2 + \frac{3}{2} v_4 & & \end{array}$$

♦ Siano A, B punti dello spazio; si considerino i vettori

$$a = \overrightarrow{LA},\ \ b = \overrightarrow{LB} \in V_L$$

Siano A_1, A_2 i punti che dividono il segmento AB in tre parti uguali.
Provare che



$$\overrightarrow{AB} \sim b - a$$

$$\overrightarrow{AA_1} \sim \frac{1}{3}(b-a)$$

$$\overrightarrow{AA_2} \sim \frac{2}{3}(b-a)$$

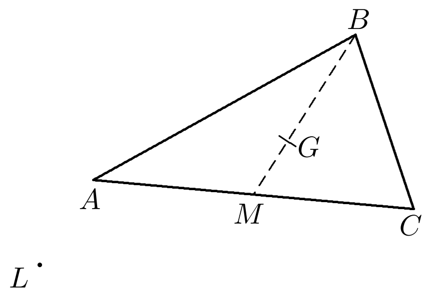
Ha senso scrivere $\overrightarrow{AB} = b - a$? (*Attenzione:* $b - a \in V_L$, mentre $\overrightarrow{AB} \notin V_L$)

Scrivere $\overrightarrow{LA_1}, \overrightarrow{LA_1}$ come combinazione lineare di a, b.

▼ Siano A, B, C punti dello spazio; si considerino i vettori

$$a = \overrightarrow{LA},\ \ b = \overrightarrow{LB},\ \ c = \overrightarrow{LC} \in V_L$$

Sia G il baricentro del triangolo ABC.
Si consideri il punto medio M del lato AC, e si ricordi che



$$BG/GM = 2$$

Si scriva $\overrightarrow{LM}$ come combinazione lineare di a, c.
Si scriva $\overrightarrow{LG}$ come combinazione lineare di $\overrightarrow{LM}, b$.
Si scriva $\overrightarrow{LG}$ come combinazione lineare di a, b, c.

2.3 Spazi vettoriali di matrici

Sia K un campo (ad esempio $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{F}_p$). Una tabella A del tipo

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} & a_{17} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} & a_{27} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} & a_{37} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} & a_{47} \end{pmatrix}$$

con $\forall a_{rs} \in K$, si dice una *matrice* 4×7, o una matrice a 4 *righe* e 7 *colonne*, ad elementi in K.

L'insieme delle matrici 4×7 ad elementi in K si denota con $K^{4\times 7}$.

Somma di due matrici di $K^{4\times 7}$*:* siano

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{17} \\ a_{21} & \cdots & a_{27} \\ a_{31} & \cdots & a_{37} \\ a_{41} & \cdots & a_{47} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{17} \\ b_{21} & \cdots & b_{27} \\ b_{31} & \cdots & b_{37} \\ b_{41} & \cdots & b_{47} \end{pmatrix} \qquad \in K^{4\times 7}$$

si pone

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \cdots & a_{17} + b_{17} \\ a_{21} + b_{21} & \cdots & a_{27} + b_{27} \\ a_{31} + b_{31} & \cdots & a_{37} + b_{37} \\ a_{41} + b_{41} & \cdots & a_{47} + b_{47} \end{pmatrix} \in K^{4\times 7}$$

Multiplo di una matrice di $K^{4\times 7}$*:* siano

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{17} \\ a_{21} & \cdots & a_{27} \\ a_{31} & \cdots & a_{37} \\ a_{41} & \cdots & a_{47} \end{pmatrix} \in K^{4\times 7} \qquad \lambda \in K$$

si pone

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \cdots & \lambda a_{17} \\ \lambda a_{21} & \cdots & \lambda a_{27} \\ \lambda a_{31} & \cdots & \lambda a_{37} \\ \lambda a_{41} & \cdots & \lambda a_{47} \end{pmatrix} \in K^{4\times 7}$$

Si verifichi che

- ▼ $K^{4\times 7}$, rispetto alle operazioni "$+$" e "$\lambda\cdot$" con $\lambda \in K$, è uno spazio vettoriale su K
- ♦ l'elemento neutro di "$+$" è $0 = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in K^{4\times 7}$

▲ l'opposto di $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{17} \\ a_{21} & \cdots & a_{27} \\ a_{31} & \cdots & a_{37} \\ a_{41} & \cdots & a_{47} \end{pmatrix} \in K^{4\times 7}$ è

$$-A = \begin{pmatrix} -a_{11} & \cdots & -a_{17} \\ -a_{21} & \cdots & -a_{27} \\ -a_{31} & \cdots & -a_{37} \\ -a_{41} & \cdots & -a_{47} \end{pmatrix} \in K^{4\times 7}$$

Sia $n \geqslant 1$ un intero

▼ $K^{1\times n}$ è lo spazio vettoriale su K delle *righe* costituite da n elementi di K

▲ si pone

$$K^n = K^{n\times 1} = \text{spazio vettoriale su } K$$
$$\text{delle } \textit{colonne} \text{ costituite da } n \text{ elementi di } K$$

Sia $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{17} \\ a_{21} & \cdots & a_{27} \\ a_{31} & \cdots & a_{37} \\ a_{41} & \cdots & a_{47} \end{pmatrix} \in K^{4\times 7}$

▼ posto

$$a_s = \begin{pmatrix} a_{1s} \\ a_{2s} \\ a_{3s} \\ a_{4s} \end{pmatrix} \in K^4 \qquad s = 1, 2, \ldots, 7$$

▽ A si scrive nella forma

$$A = (a_1, a_2, \ldots, a_7)$$

△ ossia A si scrive come *famiglia* di 7 colonne $\in K^4$, scritte una di seguito all'altra

▲ posto

$$a'_r = (a_{r1}, a_{r2}, \ldots, a_{r7}) \in K^{1\times 7} \qquad r = 1, 2, 3, 4$$

▽ A si scrive nella forma

$$A = \begin{pmatrix} a'_1 \\ a'_2 \\ a'_3 \\ a'_4 \end{pmatrix}$$

△ ossia A si scrive come *famiglia* di 4 righe $\in K^{1\times 4}$, scritte una sotto l'altra

Con tali convenzioni

▼ se $A = (a_1, a_2, \ldots, a_7), B = (b_1, b_2, \ldots, b_7) \in K^{4\times 7}$ e $\lambda \in K$, si ha

$$\begin{aligned} A + B &= (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_7 + b_7) \\ \lambda A &= (\lambda a_1, \lambda a_2, \ldots, \lambda a_7) \end{aligned}$$

▲ se $A = \begin{pmatrix} a'_1 \\ a'_2 \\ a'_3 \\ a'_4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b'_1 \\ b'_2 \\ b'_3 \\ b'_4 \end{pmatrix} \in K^{4\times 7}$ e $\lambda \in K$, si ha

$$\begin{aligned} A + B &= \begin{pmatrix} a'_1 + b'_1 \\ a'_2 + b'_2 \\ a'_3 + b'_3 \\ a'_4 + b'_4 \end{pmatrix} \\ \lambda A &= \begin{pmatrix} \lambda a'_1 \\ \lambda a'_2 \\ \lambda a'_3 \\ \lambda a'_4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Siano $n, m \geqslant 1$ interi

▼ $\mathbb{R}^{n\times m}$ è lo spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ delle matrici $n \times m$ ad elementi in $\mathbb{R}$

⧫ $\mathbb{C}^{n\times m}$ è lo spazio vettoriale su $\mathbb{C}$ delle matrici $n \times m$ ad elementi in $\mathbb{C}$

⧫ $\mathbb{R}^{n}$ è lo spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ delle colonne costituite da n elementi di $\mathbb{R}$

⧫ $\mathbb{C}^{n}$ è lo spazio vettoriale su $\mathbb{C}$ delle colonne costituite da n elementi di $\mathbb{C}$

⧫ $\mathbb{R}^{1\times n}$ è lo spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ delle righe costituite da n elementi di $\mathbb{R}$

▲ $\mathbb{C}^{1\times n}$ è lo spazio vettoriale su $\mathbb{C}$ delle righe costituite da n elementi di $\mathbb{C}$

Sia V uno spazio vettoriale sul campo K

▼ *problema tipico:*

▽ dati $\lambda \in K,\ v \in V$

△ trovare le $x \in V$ tali che $\lambda x = v$

▲ *risposta:*

▽ se $\lambda = 0$ e $v \neq 0$, allora non esistono soluzioni

◊ se $\lambda = 0$ e $v = 0$, allora $\forall x \in V$ è soluzione

△ se $\lambda \neq 0$, allora

$$x = \lambda^{-1} v \qquad (\exists \lambda^{-1} \text{ perché } K \text{ è un campo})$$

è l'unica soluzione

Cenno. Sia $x \in V$ tale che $\lambda x = v$ (*attenzione:* non è detto che esista una tale x), allora si ha

$$\begin{aligned} &\lambda^{-1}(\lambda x) = \lambda^{-1} v,\ \left(\lambda \lambda^{-1}\right) x = \lambda^{-1} v, \\ &1x = \lambda^{-1} v,\ x = \lambda^{-1} v \end{aligned}$$

ne segue che

$$\begin{cases} \text{o non esistono soluzioni} \\ \text{o} \ \ x = \lambda^{-1} v \ \text{ è l'unica soluzione} \end{cases}$$

Siccome

$$\lambda\left(\lambda^{-1} v\right) = \left(\lambda^{-1} \lambda\right) v = 1v = v$$

si conclude che esistono soluzioni, e che l'unica soluzione è $x = \lambda^{-1} v$. ■

Si consideri l'insieme $\mathbb{Z}^{4\times 7}$ delle matrici 4×7 ad elementi in $\mathbb{Z}$, con le operazioni

$$\text{“}+\text{”} \qquad \text{“}\lambda\cdot\text{” con } \lambda \in \mathbb{Z}$$

definite in modo ovvio; si osservi che

▼ in $\mathbb{Z}^{4\times 7}$ l'addizione “$+$” e la formazione di multiplo “$\lambda\cdot$”, con $\lambda \in \mathbb{Z}$, verificano le proprietà tipiche di uno spazio vettoriale

♦ siccome $\mathbb{Z}$ non è un campo, $\mathbb{Z}^{4\times 7}$ non può essere chiamato “uno spazio vettoriale su $\mathbb{Z}$”

♦ in $\mathbb{Z}^{4\times 7}$, il problema tipico degli spazi vettoriali è usualmente privo di soluzioni

Cenno. Ad esempio, non esiste una $X \in \mathbb{Z}^{4\times 7}$ tale che

$$2X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

■

▲ per dire che

▽ $\mathbb{Z}$ è un anello con identità

◊ l'addizione e l'operazione di multiplo verificano tutte le proprietà tipiche di uno spazio vettoriale

si dice che

△ $\mathbb{Z}^{4\times 7}$ è un *modulo unitario su* $\mathbb{Z}$

Esercizi:

▼ In $\mathbb{C}^{4\times 3}$ calcolare

$$\begin{pmatrix} 1+i & 1 & 0 \\ 3-2i & i & 1-i \\ 2+i & 0 & 2 \\ i & 3+2i & 3i \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} -1+3i & 2+i & 3 \\ 2+i & 0 & 3+i \\ 1-i & 1+i & i \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(2-3i)\begin{pmatrix} 1 & 2-3i & 1+i \\ i & 2 & 0 \\ 1-i & 3-2i & 0 \\ 1+i & i & 3-2i \end{pmatrix}$$

♦ In $\mathbb{C}^{4\times 3}$ sia

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{2}+i & 2 & 1-i \\ 3+i\sqrt{2} & 3-i & 1-i\sqrt{3} \\ -i & 2+2i & 2+i \\ -i\sqrt{3} & i & 3-2i \end{pmatrix}$$

▽ scrivere le colonne $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{C}^4$, di A

△ scrivere le righe $a'_1, a'_2, a'_3, a'_4 \in \mathbb{C}^{1\times 3}$, di A

♦ In $\mathbb{C}^{3\times 3}$, si determinino le A tali che

$$(7-i3)A = \begin{pmatrix} i & 1 & i+1 \\ i & 1 & i+1 \\ i & 1 & i+1 \end{pmatrix}$$

▲ Si consideri $\mathbb{R}^3$ con l'usuale addizione " $+$ ",e la formazione di multiplo " $\lambda *$ ", con $\lambda \in \mathbb{R}$, definita da

$$\lambda * \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

∘ si provi che, in $\mathbb{R}^3$, le operazioni " $+$ " e " $\lambda *$ ", con $\lambda \in \mathbb{R}$, verificano tutte le proprietà tipiche di uno spazio vettoriale, ma non verificano la proprietà

"per $\forall a \in \mathbb{R}^3$ si ha $1 * a = a$"

▽ si calcolino

$$\sqrt{3} * \begin{pmatrix} 5 \\ \sqrt{3} \\ 7 \end{pmatrix} \qquad 1 * \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ \sqrt{5} \end{pmatrix}$$

♢ si determinino le $x \in \mathbb{R}^3$ tali che

$$\sqrt{2} * x = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

♢ si determinino le $x \in \mathbb{R}^3$ tali che

$$\frac{7}{3} * x = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

△ $\mathbb{R}^3$, con le operazioni " $+$ " e " $\lambda *$ ", è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$?

2.4 Sistemi di equazioni lineari: il Metodo di Gauss

La frase convenzionale

▼ risolvere l'*equazione lineare* a *coefficienti* in $\mathbb{C}$

$$(2-i)x_2 + (-1+3i)x_3 = i$$

nella *incognita* $x \in \mathbb{C}^4$ (o nelle *incognite* $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{C}$)

significa

▲ determinare le $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^4$ tali che

$$(2-i)x_2 + (-1+3i)x_3 = i$$

▽ si osservi che per $\forall x \in \mathbb{C}^4$ il conto

$$(2-i)x_2 + (-1+3i)x_3$$

da fare su x è una *combinazione lineare* di x_1, x_2, x_3, x_4 a *coefficienti* in $\mathbb{C}$, e che il risultato voluto "i" è un *coefficiente* in $\mathbb{C}$

△ ogni $x \in \mathbb{C}^4$ tale che

$$(2-i)x_2 + (-1+3i)x_3 = i$$

si dice una *soluzione* dell'equazione

Per determinare l'insieme delle soluzioni, si osservi che

▼ l'incognita x_3 ha coefficiente $\neq 0$

♦ x_3 si dice una *incognita di Gauss*; le incognite rimanente

$$x_1,\ x_2\ x_4$$

si dicono *incognite non di Gauss*

♦ per $\forall s, t, \lambda \in \mathbb{C}$, posto

$$x_1 = s,\ x_2 = t,\ x_4 = \lambda$$

$\exists_1 x_3 \in \mathbb{C}$ tale che $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ sia soluzione, e che tale x_3 è dato da

$$x_3 = \frac{1}{-1+3i}(i-(2-i)t) = (0.3-0.1i) + (0.5+0.5i)t$$

si conclude che

▲ $$x = \begin{pmatrix} s \\ t \\ (0.3-0.1i)+(0.5+0.5i)t \\ \lambda \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.3-0.1i \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0.5+0.5i \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

con $s, t, \lambda \in \mathbb{C}$

è un *rappresentazione parametrica* dell'insieme delle soluzioni, ossia che

- le x ottenute da tale relazione, al variare dei *parametri*

$$s, t, \lambda \in \mathbb{C}$$

sono *tutte e sole* le soluzioni dell'equazione

Si osservi che

▼ l'insieme delle soluzioni dell'equazione

$$0x_1 + 0x_4 = 2+i, \quad \text{nell'incognita } x \in \mathbb{C}^4$$

è $\emptyset$; rappresentazioni parametriche di tale insieme si riducono a puri trucchi formali: inutili, omesse

▲ l'insieme delle soluzioni dell'equazione

$$0x_1 + 0x_4 = 0, \quad \text{nell'incognita } x \in \mathbb{C}^4$$

è $\mathbb{C}^4$; una rappresentazione parametrica di tale insieme è

$$x = s\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

con $s, t, \lambda, \mu \in \mathbb{C}$

Si consideri il sistema

$$\left\{ \begin{array}{cccccccc} 3x_1 & +2x_2 & -3x_3 & +x_4 & -5x_5 & +x_6 & = & 3 \\ 2x_1 & \boxed{} & 4x_3 & -x_4 & & +2x_6 & = & -2 \\ x_1 & & 3x_3 & \boxed{} & & & = & 1 \end{array} \right.$$

di 3 equazioni lineari a coefficienti in $\mathbb{R}$, nell'incognita $x \in \mathbb{R}^7$.

Si osservi che

▼ nella 1^a equazione l'incognita x_2 ha coefficiente $\neq 0$, mentre nelle equazioni successive ha coefficiente $= 0$

◆ nella 2^a equazione l'incognita x_4 ha coefficiente $\neq 0$, mentre nelle equazioni successive ha coefficiente $= 0$

▲ nella 3^a equazione l'incognita x_1 ha coefficiente $\neq 0$, e non ci sono equazioni successive

allora

▼ il sistema si dice *in forma di Gauss*

◆ $x_2,\ x_4,\ x_1$ si dicono *incognite di Gauss*; le incognite rimanenti

$$x_3,\ x_5,\ x_6,\ x_7$$

si dicono *incognite non di Gauss*

◆ per $\forall s, t, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, posto

$$x_3 = s,\ x_5 = t,\ x_6 = \lambda,\ x_7 = \mu$$

$\exists_1\ x_2,\ x_4,\ x_1 \in \mathbb{R}$ tali che

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_7 \end{pmatrix}$$

sia soluzione, e che tali $x_2,\ x_4,\ x_1$ sono calcolabili come segue

▽ dalla 3^a equazione si deduce

$$x_1 = 1 - 3s$$

◇ dalla 2^a equazione si deduce

$$x_4 = -\big(-2 - 2(1-3s) - 4s - 2\lambda\big) = 4 - 2s + 2\lambda$$

△ dalla 1^a equazione si deduce

$$x_2 = \frac{1}{2}\big(3 - 3(1-3s) + 3s - (4 - 2s + 2\lambda) + 5t - \lambda\big) =$$
$$-2 + 7s + 2.5t - 1.5\lambda$$

si conclude che

$$\blacktriangle \quad x = \begin{pmatrix} 1-3s \\ -2+7s+2.5t-1.5\lambda \\ s \\ 4-2s+2\lambda \\ t \\ \lambda \\ \mu \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 2.5 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ -1.5 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

con $s, t, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

è una rappresentazione parametrica dell'insieme delle soluzioni

PROBLEMA. Dato un sistema di equazioni lineari, trovare un sistema *equivalente* (ossia con lo stesso insieme di soluzioni) che sia in forma di Gauss, e quindi con l'insieme delle soluzioni determinabile con la procedura sopra descritta.

2.4.1 LEMMA PER RISOLVERLO. Sia K un campo. Si consideri un sistema $\mathscr{S}$ di n equazioni lineari a coefficienti in K, nella incognita $x \in K^m$

$$\begin{cases} \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \\ a_1x_1 + & \cdots & +a_mx_m & = & \alpha & h\text{-ma equazione} \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \\ b_1x_1 + & \cdots & +b_mx_m & = & \beta & k\text{-ma equazione} \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \end{cases}$$

Dato $\lambda \in K$, il sistema $\mathscr{S}'$ di n equazioni lineari a coefficienti in K, nella incognita $x \in K^m$

$$\begin{cases} \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \\ a_1x_1 + & \cdots & +a_mx_m & = & \alpha & h\text{-ma equazione} \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \\ (b_1+\lambda a_1)\,x_1 + & \cdots & +\,(b_m+\lambda a_m)\,x_m & = & (\beta+\lambda\alpha) & k\text{-ma equazione} \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \end{cases}$$

si dice ottenuto da $\mathscr{S}$ *sommando alla k-ma equazione il multiplo secondo λ della h-ma equazione.*

Si verifiche che, per $\forall x \in K^m$ sono equivalenti gli asserti

▼ x è una soluzione di $\mathscr{S}$

▲ x è una soluzione di $\mathscr{S}'$

da cui segue che

- $\mathscr{S}$ e $\mathscr{S}'$ hanno lo stesso insieme di soluzioni, ossia sono sistemi equivalenti

USO DEL LEMMA 2.4.1. Siano $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$, si consideri il sistema

$$\left\{\begin{array}{rrrcl} 2x_1 & +5x_2 & +2x_3 & = & \alpha \\ x_1 & +2x_2 & -x_3 & = & \beta \\ 3x_1 & +7x_2 & +x_3 & = & \gamma \end{array}\right.$$

nell'incognita $x \in \mathbb{C}^3$.

Da tale sistema,

▼ sommando alla 2^a equazione il multiplo secondo $-\dfrac{1}{2}$ della 1^a

e successivamente

⧫ sommando alla 3^a equazione il multiplo secondo $-\dfrac{3}{2}$ della 1^a

si ottiene il sistema equivalente

$$\left\{\begin{array}{rrrcc} 2x_1 & +5x_2 & +2x_3 & = & \alpha \\ & -0.5x_2 & -2x_3 & = & \dfrac{2\beta-\alpha}{2} \\ & -0.5x_2 & -2x_3 & = & \dfrac{2\gamma-3\alpha}{2} \end{array}\right. \qquad x \in \mathbb{C}^3$$

Da tale sistema,

▲ sommando alla 3^a equazione il multiplo secondo -1 della 2^a

si ottiene il sistema equivalente

$$\left\{\begin{array}{rrrcc} 2x_1 & +5x_2 & +2x_3 & = & \alpha \\ & -0.5x_2 & -2x_3 & = & \dfrac{2\beta-\alpha}{2} \\ & & 0x_3 & = & \gamma-\alpha-\beta \end{array}\right. \qquad x \in \mathbb{C}^3$$

L'insieme delle soluzioni di tale sistema varia a seconda di chi siano α, β, γ:

1° *caso.* se $\gamma - \alpha - \beta = 0$, allora

$\triangledown$ $\forall x \in \mathbb{C}^3$ verifica la 3^a equazione

$\lozenge$ il sistema è equivalente al sistema in forma di Gauss

$$\begin{cases} 2x_1 & +5x_2 & +2x_3 & = & \alpha \\ \boxed{} & -0.5x_2 & -2x_3 & = & \dfrac{2\beta-\alpha}{2} \end{cases} \qquad x \in \mathbb{C}^3$$

con x_1, x_2 come incognite di Gauss

$\lozenge$ per $\forall t \in \mathbb{C}$, posto

$$x_3 = t$$

si ha

$$x_2 = \frac{1}{-0.5}\left(\frac{2\beta-\alpha}{2} + 2t\right) = (\alpha - 2\beta) - 4t$$

$$x_1 = \frac{1}{2}\Big(\alpha - 5((\alpha-2\beta) - 4t) - 2t\Big) = (-2\alpha + 5\beta) + 9t$$

$\vartriangle$ una rappresentezione parametrica dell'insieme delle soluzioni è

$$x = \begin{pmatrix} (-2\alpha+5\beta)+9t \\ (\alpha-2\beta)-4t \\ t \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} (-2\alpha+5\beta) \\ (\alpha-2\beta) \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 9 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{con } t \in \mathbb{C}$$

2° *caso.* se $\gamma - \alpha - \beta \neq 0$, allora

$\triangledown$ $\nexists x \in \mathbb{C}^3$ che verifichi la 3^a equazione

$\lozenge$ il sistema si dice *non risolubile*

$\vartriangle$ l'insieme delle soluzioni è $\emptyset$

Esercizi:

▼ Si dia una rappresentazione parametrica dell'insieme delle soluzioni dell'equazione

$$(2+i)x_3 - (7+4i)x_5 = 4+2i \qquad x \in \mathbb{C}^6$$

♦ Si consideri il sistema

$$\begin{cases} (1+i)x_2 + (1-i)x_3 = 2 \\ (2-i)x_1 + (1+2i)x_3 = i \end{cases} \qquad x \in \mathbb{C}^4$$

▽ si verifichi che è in forma di Gauss

△ si dia una rappresentazione parametrica dell'insieme delle soluzioni

♦ Si consideri il sistema

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + ix_3 = 4+i \\ 2ix_1 + 3x_2 + x_3 = 1-2i \\ 2x_1 - ix_2 - x_3 = 2+3i \end{cases} \qquad x \in \mathbb{C}^3$$

▽ lo si riduca in forma di Gauss

△ si dia una rappresentazione parametrica dell'insieme delle soluzioni

♦ Si risolva il sistema

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + ix_3 = 4+i \\ 2ix_1 + 3x_2 + x_3 = 1-2i \\ 2x_1 - ix_2 - x_3 = 2+3i \end{cases} \qquad x \in \mathbb{C}^5$$

♦ Si risolva il sistema

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + ix_3 = 4+i \\ 2ix_1 + 3x_2 + x_3 = 1-2i \\ (6+2i)x_1 - 5ix_2 - (2+3i)x_3 = -8+5i \end{cases} \qquad x \in \mathbb{C}^3$$

♦ Si risolva il sistema

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + ix_3 = 4+i \\ 2ix_1 + 3x_2 + x_3 = 1-2i \\ (6+2i)x_1 - 5ix_2 - (2+3i)x_3 = -5-5i \end{cases} \qquad x \in \mathbb{C}^3$$

▲ Siano $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{C}$; si risolva il sistema

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + ix_3 = c_1 \\ 2ix_1 + 3x_2 + x_3 = c_2 \\ (6+2i)x_1 - 5ix_2 - (2+3i)x_3 = c_3 \end{cases} \qquad x \in \mathbb{C}^3$$

2.5 Spazi vettoriali di funzioni a valori in un campo

Sia K un campo. Dato un insieme $X \neq \emptyset$, indichiamo con

$$\mathscr{F}(X, K)$$

l'insieme avente per elementi le funzioni

$$f : X \to K \ .$$

Nell'insieme $\mathscr{F}(X, K)$ si introducono le seguenti operazioni di addizione e di multiplo secondo un elemento di K:

- date $f, g \in \mathscr{F}(X, K)$, si denota con

  $$f + g \in \mathscr{F}(X, K)$$

  la funzione

  $$f + g : X \to K$$

  definita da:

  $$\text{“}\mathit{per}\ \forall x \in X\ \ \mathit{si\ ha}\ (f + g)(x) = f(x) + g(x)\text{”}$$

- dati $f \in \mathscr{F}(X, K)$ e $\lambda \in K$, si denota con

  $$\lambda f \in \mathscr{F}(X, K)$$

  la funzione

  $$\lambda f : X \to K$$

  definita da:

  $$\text{“}\mathit{per}\ \forall x \in X\ \ \mathit{si\ ha}\ (\lambda f)(x) = \lambda(f(x))\text{”}$$

Si provi che $\mathscr{F}(X, K)$ con tali operazioni è uno spazio vettoriale sul campo K.

L'elemento neutro 0 di $\mathscr{F}(X, K)$ è una funzione

$$0 : X \to K \ ;$$

dato $x \in X$, chi è $0(x)$?

Data $f \in \mathscr{F}(X, K)$, l'opposto di f,ossia $-f$ è una funzione

$$-f : X \to K \ ;$$

dato $x \in X$, chi è $(-f)(x)$?

Esempi: Si consideri lo spazio vettoriale V su $\mathbb{R}$ definito da

$$V = \mathscr{F}\left(\left\{1,2,3,4\right\},\mathbb{R}\right) \;;$$

siano

$$e_1, e_2, e_3, e_4 \in V$$

le funzioni definite da

$$\begin{cases} e_1(1) = 1 \\ e_1(2) = 0 \\ e_1(3) = 0 \\ e_1(4) = 0 \end{cases} \begin{cases} e_2(1) = 0 \\ e_2(2) = 1 \\ e_2(3) = 0 \\ e_2(4) = 0 \end{cases} \begin{cases} e_3(1) = 0 \\ e_3(2) = 0 \\ e_3(3) = 1 \\ e_3(4) = 0 \end{cases} \begin{cases} e_4(1) = 0 \\ e_4(2) = 0 \\ e_4(3) = 0 \\ e_4(4) = 1 \end{cases} \;;$$

sia

$$f = -\sqrt{7}e_1 + (17/13)e_2 - (7/8)e_3 - 15e_4 \in V \;;$$

si calcolino

$$f(1), f(2), f(3), f(4) \;;$$

sia $g \in V$ la funzione definita da

$$\begin{cases} g(1) = 3/5 \\ g(2) = -4/7 \\ g(3) = \sqrt{6/5} \\ f(4) = 0 \end{cases} \;;$$

si determinino $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}$ tale che

$$g = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_e + \lambda_3 e_3 + \lambda_4 e_4 \;,$$

ossia, si scriva g come combinazione lineare di e_1, e_2, e_3, e_4.

Si consideri lo spazio vettoriale (su $\mathbb{R}$):

$$\mathscr{F}((-1,1),\mathbb{R})$$

ove (come usuale)

$$(-1,1) = \left\{t \in \mathbb{R} : -1 < t < 1\right\} \;;$$

siano

$$f, g \in \mathscr{F}((-1,1),\mathbb{R})$$

le funzioni definite da

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad -1 < t < 0 \\ 0 & \text{se} \quad 0 \leqslant t < 1 \end{cases} \;, \quad g(t) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad -1 < t < 0 \\ 1 & \text{se} \quad 0 \leqslant t < 1 \end{cases} \;;$$

si disegnino i grafici delle combinazioni lineari di f, g; in particolare si disegnino il grafico di $f+g$ e di $f-g$.

Si consideri lo spazio vettoriale (su $\mathbb{R}$)

$$\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$$

siano

$$f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

le funzioni definite da:

$$\begin{cases} f(t) = 1 & \forall t \in \mathbb{R} \\ g(t) = t & \forall t \in \mathbb{R} \\ h(t) = t^2 & \forall t \in \mathbb{R} \end{cases};$$

sia w la combinazione lineare di f, g, h con i coefficienti $1, 2, 1$:

- per $\forall t \in \mathbb{R}$, calcolare $w(t)$;
- come sono fatti i grafici delle combinazioni lineari di f, g, h al variare dei coefficienti?

2.6 Famiglie finite linearmente indipendenti

Sia K un campo e V uno spazio vettoriale su K.

Sia $(v_1, \dots, v_k)$ una *famiglia finita non vuota* di elementi di V;

▼ un $v \in V$ si dice una *combinazione lineare* di

$$(v_1, \dots, v_k)$$

se

$$\exists a_1, \dots, a_k \in K$$

tali che

$$v = a_1 v_1 + \cdots a_k v_k$$

▲ l'insieme degli elementi di V che sono combinazioni lineari di

$$(v_1, \dots, v_k)$$

si denota con

$$\langle v_1, \dots, v_k \rangle$$

Sia $\emptyset$ la *famiglia vuota* di elememti di V;

▼ un $v \in V$ si dice una *combinazione lineare* di

$$\emptyset$$

se

$$v = 0$$

▲ l'insieme degli elementi di V che sono combinazioni lineari di $\emptyset$ si denota con $\langle\emptyset\rangle$; ovviamente si ha

$$\langle\emptyset\rangle = \{0\}$$

2.6.1 Nota. Sia $(v_1, \ldots, v_k)$ una famiglia finita non vuota di elementi di V; sono equivalenti gli asserti:

a) $\forall v_\lambda$ non è combinazione lineare dei rimanenti elementi della famiglia

b) $\forall v_\lambda$ non è combinazione lineare degli elementi della famiglia che lo precedono

c) se $a_1, \ldots, a_k \in K$ sono tali che

$$a_1 v_1 + \cdots + a_k v_k = 0$$

allora

$$a_1 = \cdots = a_k = 0$$

d) se $a_1, \ldots, a_k,\ b_1, \ldots, b_k \in K$ sono tali che

$$a_1 v_1 + \cdots + a_k v_k = b_1 v_1 + \cdots + b_k v_k$$

allora

$$a_1 = b_1, \cdots, a_k = b_k$$

Cenno. Se $k = 1$ la verifica è banale. Supponiamo quindi $k \geqslant 2$.

a)⇒b) Ovvio.

b)⇒c) Se fosse $a_k \neq 0$ sarebbe

$$v_k = -\frac{a_1}{a_k} v_1 - \cdots - \frac{a_{k-1}}{a_k} v_{k-1}$$

allora è $a_k = 0$. Se fosse $a_{k-1} \neq 0$ sarebbe.... .

c)⇒d) Essendo

$$(a_1 - b_1)\, v_1 + \cdots + (a_k - b_k)\, v_k = 0$$

si ha

$$a_1 - b_1 = \cdots = a_k - b_k = 0$$

d)⇒a) Se, ad esempio, fosse

$$v_2 = a_1v_1 + a_3v_3 + \cdots + a_kv_k$$

si avrebbe

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0v_1 & + & 1v_2 & + & 0v_3 & + & \cdots & + & 0v_k & = \\ a_1v_1 & + & 0v_2 & + & a_3v_3 & + & \cdots & + & a_kv_k & \end{array}$$

e quindi si avrebbe $1 = 0$. ■

2.6.2 Definizione. Sia $(v_1, \ldots, v_k)$ una famiglia finita non vuota di elementi di V; se

▼ $(v_1, \ldots, v_k)$ verifica uno (e quindi tutti) gli asserti della Nota 2.6.1

allora

▲ $(v_1, \ldots, v_k)$ si dice una famiglia *linearmente indipendente*

La famiglia vuota $\emptyset$ si dice *linearmente indipendente.*

Una famiglia finita di elementi di V che non sia linearmente indipendente, si dice *linearmente dipendente.*

Esercizi:

▼ In $\mathbb{R}^4$ si consideri la famiglia $\mathscr{V}$:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 \\ 9 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix}$$

(le parentesi iniziali e finali sono state omesse per semplificare la scrittura)

▽ si dica quali tra i seguenti elementi di $\mathbb{R}^4$ siano combinazioni lineari di $\mathscr{V}$:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 13 \\ 13 \\ 11 \\ 11 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -7 \\ -7 \\ \pi \\ \pi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \pi \\ \pi \\ e \\ e \end{pmatrix}$$

Cenno. $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ è combinazione lineare di $\mathscr{V}$ se e solo se il sistema

$$x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 9 \\ 9 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad x \in \mathbb{R}^3$$

è risolubile; lo si decida studiandolo con il Metodo di Gauss. ■

△ sia $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$; si dica sotto quali condizioni su

$$a_1 \ , a_2 \ , a_3, \ a_4$$

a sia combinazione lineare di $\mathscr{V}$

♦ In $\mathbb{C}^2$ si considerino i seguenti elementi:

$$\begin{pmatrix} 1+i \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2-i \end{pmatrix}$$

si dica quali siano combinazioni lineari delle famiglia vuota $\emptyset$.

♦ In $\mathbb{R}^3$ si consideri il sottinsieme

$$\langle \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$$

▽ si provi che

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \in \langle \sharp \rangle, \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} \in \langle \sharp \rangle, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \langle \sharp \rangle$$

△ si dica sotto quali condizioni su

$$a_1 \ , a_2 \ , a_3 \in \mathbb{R}$$

si abbia $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \in \langle \sharp \rangle$

♦ Si provi che le seguenti famiglie di elementi di $\mathbb{C}^2$ sono tutte linearmente dipendenti

▽ $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Cenno. $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ è combinazione lineare della famiglia $\emptyset$, ossia della famiglia dei rimanenti elementi. ■

◊ $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix},$

Cenno. $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ è combinazione lineare della famiglia $\emptyset$, ossia della famiglia degli elementi che lo precedeno; oppure si osservi che

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

ossia che $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ è combinazione lineare della famiglia dei rimanenti elementi. ■

◊ $\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

◊ $\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

△ $\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1+i \\ 1-i \end{pmatrix}$

♦ In $\mathbb{C}^3$ si consideri la famiglia

$$\begin{pmatrix} 1+i \\ 1+i \\ 1-i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2+i \\ 2+i \\ 2-i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3-i \\ 3+i \\ 3+i \end{pmatrix}$$

▽ si provi che è linearmente indipendente

△ si risolva il sistema

$$x_1 \begin{pmatrix} 1+i \\ 1+i \\ 1-i \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 2+i \\ 2+i \\ 2-i \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 3-i \\ 3+i \\ 3+i \end{pmatrix} =$$

$$(17-13i) \begin{pmatrix} 1+i \\ 1+i \\ 1-i \end{pmatrix} +$$

$$(\pi - 7i) \begin{pmatrix} 2+i \\ 2+i \\ 2-i \end{pmatrix} + (11+ei) \begin{pmatrix} 3-i \\ 3+i \\ 3+i \end{pmatrix}$$

nelle incognite $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$

♦ Si consideri la famiglia $\mathscr{V}$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ -1 \end{pmatrix}$$

di elementi di $\mathbb{C}^2$

▽ si provi che $\mathscr{V}$ è linearmente indipendente su $\mathbb{Q}$ (ossia in $\mathbb{C}^2$ considerato come spazio vettoriale su $\mathbb{Q}$)

◇ si provi che $\mathscr{V}$ è linearmente indipendente su $\mathbb{R}$ (ossia in $\mathbb{C}^2$ considerato come spazio vettoriale su $\mathbb{R}$)

△ si provi che $\mathscr{V}$ è linearmente dipendente su $\mathbb{C}$ (ossia in $\mathbb{C}^2$ considerato come spazio vettoriale su $\mathbb{C}$)

♦ Si consideri la famiglia $\mathscr{V}$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ i\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

di elementi di $\mathbb{C}^2$; si provi che $\mathscr{V}$ è

$$\begin{cases} \text{linearmente indipendente su } \mathbb{Q} \\ \text{linearmente dipendente su } \mathbb{R} \\ \text{linearmente dipendente su } \mathbb{C} \end{cases}$$

♦ Siano K un campo, V uno spazio vettoriale su K, e

$$(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$$

una famiglia di elementi di V

▽ si provi che

$$(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5) \text{ è linearmente indipendente}$$
$$\Updownarrow$$
$$(v_5, v_1, v_4, v_3, v_2) \text{ è linearmente indipendente}$$

△ si generalizzi tale osservazione

♦ Siano K un campo, V uno spazio vettoriale su K, e

$$(v_1, \ldots, v_k)$$

una famiglia di elementi di V; si provi che

▽ $\exists \lambda$ tale che $v_\lambda = 0 \implies$ la famiglia è linearmente dipendente

△ $\exists \lambda, \mu$ tali che $\lambda \neq \mu,\ v_\lambda = v_\mu \implies$ la famiglia è linearmente dipendente

♦ Siano K un campo, V uno spazio vettoriale su K, e

$$(v_1, \ldots, v_k)$$

una famiglia linearmente indipendente di elementi di V; si provi che

▽ per $\forall \lambda \in \{1, \ldots, k\}$ si ha

$$v_\lambda \neq 0$$

△ per $\forall \lambda, \mu \in \{1, \ldots, k\}$ tali che $\lambda \neq \mu$ si ha

$$v_\lambda \neq v_\mu$$

♦ Si consideri lo spazio vettoriale (su $\mathbb{R}$) $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$;

▽ si provi che, per $\forall k \in \mathbb{N},\ k \geqslant 1$, la famiglia

$$1, t^1, \ldots, t^k \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$$

è linearmente indipendente

Nota: considerare *la famiglia*

$$1, t^1, \ldots, t^k \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$$

è un modo abbreviato convenzionale per dire: considerare *la famiglia*

$$f_0, f_1, \ldots, f_k \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \ ,$$

ove

$$f_0, f_1, \ldots, f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

sono le funzioni definite da:

$$\begin{cases} f_0(t) = 1 & \textit{per } \forall t \in \mathbb{R} \\ f_1(t) = t^1 & \textit{per } \forall t \in \mathbb{R} \\ \quad\vdots & \quad\vdots \\ f_k(t) = t^k & \textit{per } \forall t \in \mathbb{R} \end{cases} \ ;$$

tale convenzione sarà sistematicamente usata in quanto segue.

Cenno. Sia, ad esempio, $k = 2$, e siano $c_0, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ tali che

$$c_0 + c_1 t^1 + c_2 t^2 = 0 \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$$

Si ha

$$D\left(c_0 + c_1 t^1 + c_2 t^2\right) = c_1 + 2c_2 t = 0 \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$$
$$D^2\left(c_0 + c_1 t^1 + c_2 t^2\right) = 2c_2 = 0 \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}))$$

Ne segue $c_2 = 0,\ c_1 = 0,\ c_0 = 0$. ■

◊ si provi che la famiglia

$$\cos t,\ \sin t$$

è linearmente indipendente

Cenno. Siano $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ tali che

$$c_1 \cos t + c_2 \sin t = 0 \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$$

Per $t = 0$ si ottiene

$$c_1 \cos 0 + c_2 \sin 0 = 0 \in \mathbb{R}$$

ossia

$$1c_1 + 0c_2 = 0$$

Per $t = \pi/2$ si ottiene

$$c_1 \cos \pi/2 + c_2 \sin \pi/2 = 0 \in \mathbb{R}$$

ossia

$$0c_1 + 1c_2 = 0$$

Ne segue $c_1 = c_2 = 0$. ■

◊ sia $\omega \neq 0$; si provi che la famiglia

$$\cos \omega t,\ \sin \omega t$$

è linearmente indipendente

◊ sia $\omega \neq 0$; si provi che la famiglia

$$\cos \omega t + 5 \sin \omega t,\ 3 \cos \omega t + \sin \omega t$$

è linearmente indipendente

◊ si provi che la famiglia

$$1, t, \cos \pi t,\ \sin \pi t$$

è linearmente indipendente

Cenno. Siano $c_0, c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ tali che

$$c_0 + c_1 t + c_2 \cos \pi t + c_3 \sin \pi t = 0 \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$$

Derivando si ottiene

$$c_1 - c_2\pi \sin \pi t + c_3\pi \cos \pi t = 0 \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$$

Derivando una seconda volta si ottiene

$$-c_2\pi^2 \cos \pi t - c_3\pi^2 \sin \pi t = 0 \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$$

Siccome la famiglia $\cos \pi t,\ \sin \pi t$ è linearmente indipendente, si ottiene

$$c_2 = c_3 = 0$$

se ne deduca che si ha anche $c_0 = c_1 = 0$. ■

◊ si provi che la famiglia

$$\cos^2 t,\ \sin^2 t$$

è linearmente indipendente

◊ si provi che la famiglia

$$\cos^2 t,\ \sin^2 t,\ 1$$

è linearmente dipendente

△ si dica se la famiglia

$$\cos^2 t,\ \sin^2 t,\ \cos^2 \pi t,\ \sin^2 \pi t$$

sia o meno linearmente dipendente

▲ Si consideri lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^{3\times 2}$:

- Si provi che la famiglia

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 5 & 7 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$$

  è linearmente indipendente;

- si provi che la famiglia

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

  è linearmente dipendente.

2.7 Spazi vettoriali di tipo finito e non finito

Sia K un campo e V uno spazio vettoriale su K.

Sia $\mathscr{V}$ una famiglia finita (vuota o meno) di elementi di V;

▼ se

$$\langle \mathscr{V} \rangle = V$$

ossia se

▽ o $\mathscr{V}$ è non vuota e quindi

$$\begin{cases} \mathscr{V} = (v_1, \dots, v_k) \\ \langle v_1, \dots, v_k \rangle = V \end{cases}$$

△ o $\mathscr{V}$ è vuota e quindi

$$\begin{cases} \mathscr{V} = \emptyset \\ \langle \emptyset \rangle = V \end{cases}$$

▲ allora si dice che $\mathscr{V}$ è una *famiglia finita di generatori* di V

Se esiste una famiglia finita di generatori di V

▼ allora V si dice uno spazio vettoriale *di tipo finito*

se una tale famiglia non esite

▲ allora V si dice uno spazio vettoriale *di tipo non finito*

Si verifichi che

▼ sono equivalenti gli asserti

▽ $(v_1, \dots, v_k)$ è una famiglia non vuota di generatori di V

△ per $\forall v \in V,\ \exists \alpha_1, \dots, \alpha_k \in K$ tali che

$$v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k$$

⧫ sono equivalenti gli asserti

▽ $\emptyset$ è una famiglia di generatori di V

△ $V = \{0\}$

⧫ K^3 è uno spazio vettoriale di tipo finito

Cenno. Si ha

$$V = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$$

■

▲ Sia K un campo. Sia

$$a = (a_1, a_2, a_3, \dots)$$

una successione di elementi di K; se esiste $h \in \mathbb{N}$ tale che

$$\text{“}\mathit{per\ ogni}\ k > h\ \mathit{si\ ha}\ a_k = 0\text{”} \quad ,$$

allora a si dice una successione *definitivamente nulla*.

L'insieme delle successioni definitivamente nulle di elementi di K si denota con K^∞.

Dati

$$a = (a_1, a_2, a_3, \dots),\ b = (b_1, b_2, b_3 \dots) \in K^\infty, \quad \lambda \in K \ ,$$

si pone

$$\begin{cases} a + b &= (a_1 + b_1, a_2 + b_2, , a_3 + b_3, \dots) \\ \lambda a &= (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3, \dots) \end{cases} \quad ;$$

con tali operazioni, K^∞ è uno spazio vettoriale su K. Chi è 0, ossia l'elemento neutro di K^∞?

Sia $a \in K^\infty,\ a \neq 0$; il massimo $j \in \mathbb{N}$ tale che

$$a_j \neq 0$$

si dice l'*ordine* di a, e si denota con

$$\omega(a) \quad .$$

Si provi che:

- sia $a_1, \dots, a_k$ una famiglia finita di elementi non nulli di K^∞ tale che

  $$\begin{cases} \forall a_j \neq 0 \\ \omega(a_1), \dots, \omega(a_k) \text{ sono a due a due diversi} \end{cases} \quad ,$$

  allora $a_1, \dots, a_k$ è una famiglia linearmente indipendente;
- sia $a_1, \dots, a_k$ una famiglia finita di elementi non nulli di K^∞, e sia $a \in K^\infty$ un elemento non nullo tale che

  $$\omega(a) > \omega(a_1), \dots, \omega(a_k) \quad ;$$

  allora a non è combinazione lineare della famiglia $a_1, \dots, a_k$;
- K^∞ è uno spazio vettoriale di tipo non finito.

2.8 Basi

Sia K un campo e V uno spazio vettoriale di tipo finito su K. Una famiglia finita $\mathscr{V}$ di elementi di V che sia

$$\begin{cases} \text{una famiglia di generatori} \\ \text{una famiglia indipendente} \end{cases}$$

si dice una *base* di V.

Si verifichi che:

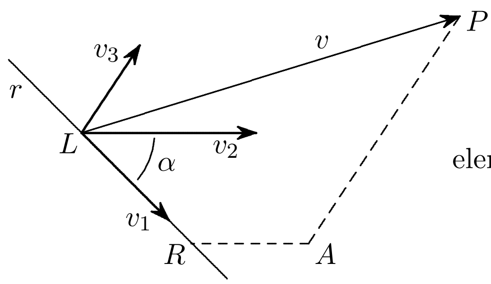
- ▼ sono equivalenti gli asserti
  - ▽ la famiglia vuota $\emptyset$ è una base di V
  - △ $V = \{0\}$
- ⧫ se $V = \{0\}$, allora la famiglia vuota $\emptyset$ è l'unica base di V
- ▼ se $V \neq \{0\}$ e $\mathscr{V} = (v_1, \dots, v_k)$, allora sono equivalenti gli asserti
  - ▽ la famiglia $v_1, \dots, v_k$ è una base di V
  - △ per $\forall v \in V,\ \exists_1 a_1, \dots, a_k \in K$ tali che

$$v = a_1 v_1 + \cdots + a_k v_k$$

Esempi:

- ▼ Si consideri lo spazio vettoriale V_L. Si scelgano:
  - ○ $v_1 \in V_L, \neq 0$; sia r la retta dei multipli di v_1
  - ○ $v_2 \in V_L$, no su r ossia no multiplo di v_1; sia α il piano delle combinazioni lineari di v_1, v_2
  - ○ $v_3 \in V_L$, no su α ossia no combinazione lineare di v_1, v_2
  - ○ si ponga $\mathscr{V} = (v_1, v_2, v_3)$

  Per la Definizione 2.6.2, $\mathscr{V}$ è una famiglia indipendente.



Sia $v = \overrightarrow{LP}$ un qualsiasi elemento di V_L:

- ∘ da P si tracci la parallela a v_3, e sia A il punto in cui interseca α
- ∘ da A si tracci la parallela a v_2, e sia R il punto in cui interseca r
- ∘ si considerino i numeri $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ tali che
$$\overrightarrow{LR} = \alpha_1 v_1, \quad \overrightarrow{RA} \sim \alpha_2 v_2, \quad \overrightarrow{AP} \sim \alpha_3 v_3$$
- ∘ si ha
$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3$$

Ne segue che $\mathscr{V}$ è anche una famiglia di generatori di V_L. Pertanto:

- ∘ V_L è uno spazio vettoriale di tipo finito,
- ∘ $\mathscr{V}$ è una base di V_L.

⧫ Sia K un campo. Si consideri lo spazio vettoriale K^n. Si ponga

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in K^n$$

e si ponga
$$\mathscr{E} = (e_1, \ldots, e_n) \; .$$

▽ si verifichi che la famiglia
$$(e_1, \ldots, e_n)$$
è una famiglia di generatori di K^n

◊ se ne deduca che K^n è uno spazio vettoriale di tipo finito

△ si verifichi che la famiglia
$$(e_1, \ldots, e_n)$$
è una base di K^n

La base $\mathscr{E}$ si dice la *base canonica* di K^n.

▲ Sia K un campo. Si consideri lo spazio vettoriale $K^{n\times m}$. Siano
$$e_1, \ldots, e_n$$
gli elementi della base canonica di K^n. In $K^{n\times m}$ si consideri la famiglia di matrici
$$E_{rs} \qquad r = 1, \ldots, n \quad s = 1, \ldots, m$$
definite da

$$E_{rs} = \big(0, \cdots, 0, \underset{\uparrow\ s\text{-ma colonna}}{e_r}, 0, \cdots, 0\big)$$

- ▽ si verifichi che la famiglia

$$E_{rs} \qquad r = 1, \ldots, n \quad s = 1, \ldots, m$$

  è una famiglia di generatori di $K^{n \times m}$
- ◇ se ne deduca che $K^{n \times m}$ è uno spazio vettoriale di tipo finito
- △ si verifichi che la famiglia

$$E_{rs} \qquad r = 1, \ldots, n \quad s = 1, \ldots, m$$

  è una base di $K^{n \times m}$

Sia V di tipo non finito;

- ▼ la famiglia vuota non è una famiglia di generatori di V
- ♦ se $J \neq \emptyset$ è un insieme finito, e

$$(v_j : j \in J)$$

  è una famiglia di elementi di V, allora $(v_j : j \in J)$ non è una famiglia di generatori di V
- ▲ sia J un insieme *infinito*, e sia

$$(v_j : j \in J)$$

  una famiglia di elementi di V; se

  - ▽ per $\forall j_1, \ldots, j_k \in J$, in numero finito e a 2 a 2 diversi, la famiglia finita

$$(v_{j_1}, \ldots, v_{j_k})$$

    è linearmente indipendente
  - △ per $\forall v \in V$, $\exists j_1, \ldots, j_k \in J$, in numero finito e a 2 a 2 diversi, ed $\exists a_1, \ldots, a_k \in K$ tali che

$$v = a_1 v_{j_1} + \cdots + a_k v_{j_k}$$

  allora

  - ∘ la famiglia $(v_j : j \in J)$ si dice una *base* di V

Si consideri K^∞ (vedi Sezione 2.7), e si ricordi che K^∞ è uno spazio vettoriale di tipo non finito su K. Per $j = 1, 2, 3, \dots$ si ponga

$$\begin{aligned} e_1 &= (1, 0, 0, 0, \dots) \\ e_2 &= (0, 1, 0, 0, \dots) \\ e_3 &= (0, 0, 1, 0, \dots) \\ &\vdots \end{aligned}$$

Si verifichi che la famiglia

$$(e_j : j \in \mathbb{N}, j \geqslant 1) = (e_1, e_2, e_3, \dots)$$

è una base di K^∞.

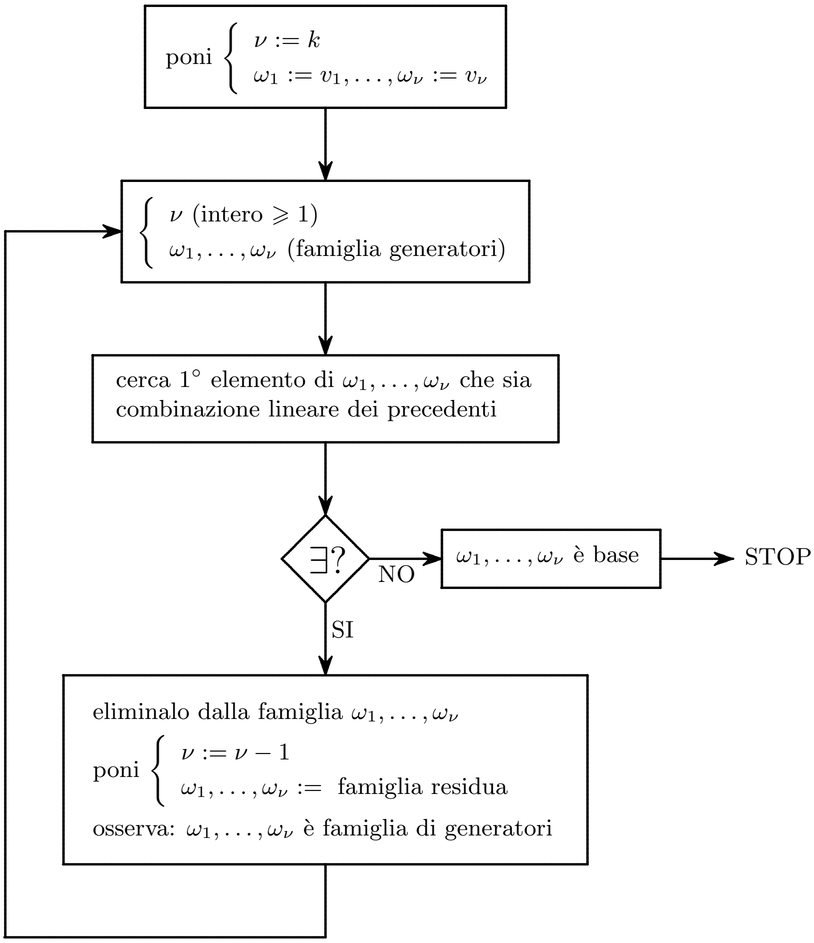
2.9 Spazi vettoriali di tipo finito: esistenza basi

Siano K un campo e V uno spazio vettoriale di tipo finito su K.

2.9.1 Sia $V \neq \{0\}$ (si ricordi che la famiglia vuota $\emptyset$ non è una famiglia di generatori di V), e sia

$$(v_1, \dots, v_k)$$

una famiglia finita di generatori di V. L'algoritmo che segue *estrae una base di V da tale famiglia*:



2.9.2 Sia $V \neq \{0\}$, e sia

$$(v_1, \ldots, v_k)$$

una famiglia finita linearmente indipendente di elementi di V. L'algoritmo che segue *amplia tale famiglia ad una base di* V:

step 1. si scelga una famiglia finita

$$(w_1, \ldots, w_h)$$

di generatori di V

step 2. si ponga

$$\tilde{v}_1 = v_1, \ldots, \tilde{v}_k = v_k \qquad \tilde{v}_{k+1} = w_1, \ldots, \tilde{v}_{k+h} = w_h$$
$$\tilde{k} = k + h$$

step 3. si osservi che

$$(\tilde{v}_1, \ldots \tilde{v}_{\tilde{k}})$$

è una famiglia finita di generatori, e si applichi a tale famiglia l'algoritmo 2.9.1

Esercizi:

▼ Si consideri $\mathbb{R}^2$

▽ si verifichi che

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 13 \\ 12 \end{pmatrix}$$

è un famiglia di generatori

Cenno. Usando il Metodo di Gauss si provi che il sistema

$$\begin{cases} 3x_2 + 6x_3 + 7x_4 + 13x_5 = a_1 \\ 5x_2 + 10x_3 + 2x_4 + 12x_5 = a_2 \end{cases} \qquad x \in \mathbb{R}^5$$

è risolubile per $\forall a_1, a_2 \in \mathbb{R}$. ■

△ usando l'algoritmo 2.9.1, si estragga una base da tale famiglia

▲ Si consideri $\mathbb{C}^3$

▽ si verifichi che

$$\begin{pmatrix} 1+i \\ 1+i \\ 1-i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2+i \\ 1+2i \\ 1-i \end{pmatrix}$$

è un famiglia linearmente indipendente

△ usando l'algoritmo 2.9.2, si ampli tale famiglia ad una base di $\mathbb{C}^3$

Cenno. Nello **step 1.** come famiglia finita di generatori si scelga la base canonica

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

■

2.10 Spazi vettoriali di tipo finito: dimensione

Sia K un campo e V uno spazio vettoriale di tipo finito su K. Per la Sezione 2.9, V ha basi. Le considerazioni che seguono, provano che due qualsiansi basi di V hanno lo stesso numero di elementi.

2.10.1 Lemma. Sia $V \neq \left\{0\right\}$ uno spazio vettoriale di tipo finito su K, e sia

$$(y_1, \ldots, y_r, z_1, \ldots, z_s)$$

una base di V. Sia $y \in V$ tale che

$$y \notin \langle y_1, \ldots, y_r \rangle \ .$$

Esiste z_i tale che

$$(y_1, \ldots, y_r, y, \underbrace{z_1, \ldots, z_s}_{z_i \ omesso})$$

è una base di V.

Nota: Lo stesso risultato, con la stessa dimostrazione, sussiste se in luogo della famiglia $y_1, \ldots, y_r$ si considera la famiglia vuota $\emptyset$.

Cenno. $(y_1, \ldots, y_r, y, z_1, \ldots, z_s)$ è una famiglia finita di generatori di V; tale famiglia è linearmente dipendente. Per l'Algoritmo 2.9.1, e per le ipotesi, esiste z_i tale che

$$(y_1, \ldots, y_r, y, \underbrace{z_1, \ldots, z_s}_{z_i \ omesso})$$

è una famiglia di generatori.

Se tale famiglia di generatori fosse linearmente dipendente, lo sarebbe anche la famiglia

$$(y_1, \ldots, y_r, \underbrace{z_1, \ldots, z_s}_{z_i \ omesso}, y) \ ;$$

per l'Algoritmo 2.9.1 e per le ipotesi, anche la famiglia

$$(y_1, \ldots, y_r, \underbrace{z_1, \ldots, z_s}_{z_i \ omesso})$$

sarebbe una famiglia di generatori: *assurdo*, perché

$$z_i \notin \langle y_1, \ldots, y_r, \underbrace{z_1, \ldots, z_s}_{z_i \ omesso} \rangle \ .$$

■

2.10.2 Teorema. Sia V uno spazio vettoriale di tipo finito su K. Sussistono gli asserti:

- se $V = \{0\}$, allora l'unica base di V è $\emptyset$;
- se $V \neq \{0\}$, e
$$(v_1, \ldots, v_k), \quad (w_1, \ldots, w_h)$$
sono due basi di V, allora si ha
$$k = h \quad .$$

Cenno. Il primo asserto è noto. Quanto al secondo, se fosse $k < h$ per il Lemma 2.10.1:

- esisterebbe una base di V del tipo
$$(v_1, \quad \underbrace{w_1, \ldots, w_h}_{1 \textit{ elemento omesso}} \quad)$$
- esisterebbe una base di V del tipo
$$(v_1, v_2, \quad \underbrace{w_1, \ldots, w_h}_{2 \textit{ element omessi}} \quad)$$

$\vdots$

- esisterebbe una base di V del tipo
$$(v_1, v_2, \ldots, v_k, \quad \underbrace{w_1, \ldots, w_h}_{k \textit{ element omessi}} \quad)$$

l'ultimo asserto è assurdo perché

$$\begin{cases} \text{la famiglia } (v_1, v_2, \ldots, v_k) \text{ è una base} \\ \text{la famiglia } (\underbrace{w_1, \ldots, w_h}_{k \textit{ element omessi}}) \text{ non è vuota} \end{cases} \quad .$$

Analogamente si prova che non può essere $h < k$. Quindi si ha $k = h$. ■

2.10.3 Definizione. Sia V uno spazio vettoriale sul campo K, di tipo finito:

- per l'Algoritmo 2.9.1 esitono basi,
- per il Teorema 2.10.2 due qualsiansi basi hanno lo stesso numero di elementi,
- il numero di elementi di una e quindi di tutte le basi si dice *la dimensione di* V o *la dimensione di* V *su* K. e si denota con uno dei simboli
$$\dim V, \quad \dim_K V$$

Esercizi:

- Si provi che

  $$\dim \mathbb{R}^n = n, \quad \dim \mathbb{C}^n = n, \quad \dim K^n = n, \quad \dim K^{n \times m} = nm$$

  (vedi Sezione 2.8)

- Si provi che

  $$\dim V_L = 3$$

  (vedi Sezione 2.8)

- Sia α un piano e sia L un punto di α. Si ponga

  $$\alpha_L = \left\{ \overrightarrow{LA} : A \in \alpha \right\} .$$

  Si provi che α_L con le usuali operazioni di somma e multiplo è uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{R}$.

  Si provi che

  $$\dim \alpha_L = 2$$

- Sia r una retta e sia L un punto di r. Si ponga

  $$r_L = \left\{ \overrightarrow{LA} : A \in r \right\} .$$

  Si provi che r_L con le usuali operazioni di somma e multiplo è uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{R}$.

  Si provi che

  $$\dim r_L = 1$$

- Sia L un punto dello spazio. Si consideri l'insieme

  $$\left\{ \overrightarrow{LL} \right\} .$$

  Si provi che $\left\{ \overrightarrow{LL} \right\}$ con le usuali operazioni di somma e multiplo è uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{R}$.

  Si provi che

  $$\dim \left\{ \overrightarrow{LL} \right\} = 0$$

- Si verifichi che

  $$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

  è una famiglia indipendente di $\mathbb{R}^2$.

  Se ne deduca che

  $$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

è una base di $\mathbb{R}^2$.

Cenno: Per l'Algoritmo 2.9.2, la famiglia

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

si può ampliare ad una base di $\mathbb{R}^2$. Siccome $\dim \mathbb{R}^2 = 2$, tale base deve avere 2 elementi; ne segue che l'ampliamento non aggiunge elementi; di conseguenza

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

è già una base.

- Sia (a_1, a_2, a_3, a_4) una famiglia di elementi di $\mathbb{C}^3$. Si provi che tale famiglia è linearmente dipendente.

  Cenno: Se non lo fosse, per l'Algoritmo 2.9.2 la famiglia

  $$(a_1, a_2, a_3, a_4)$$

  sarebbe ampliabile ad una base di $\mathbb{C}^3$. Siccome $\dim \mathbb{C}^3 = 3$, un tale ampliamento non è possibile.

- Sia K un campo. Sia (A_1, A_2, A_3) una famiglia di elementi di $K^{2\times 2}$. Si provi che tale famiglia non è una famiglia di generatori.

  Cenno: Se lo fosse, per l'Algoritmo 2.9.1 dalla famiglia

  $$(A_1, A_2, A_3)$$

  sarebbe estriabile una base di $\mathbb{C}^3$. Siccome $\dim K^{2\times 2} = 4$, ciò non è possibile.

- Sia K un campo e V uno spazio vettoriale di tipo finito su K. Sia

  $$\dim V = n$$

  Si provino gli asserti:

  - $(v_1, \ldots, v_k)$ famiglia linearmente indipendente in $V \Rightarrow k \leqslant n$
  - $(v_1, \ldots, v_k)$ famiglia linearmente indipendente in $V \Rightarrow$ $(v_1, \ldots, v_k)$ base di V
  - $(v_1, \ldots, v_k)$ famiglia di generatori di $V \Rightarrow k \geqslant n$
  - $(v_1, \ldots, v_n)$ famiglia di generatori di $V \Rightarrow$ $(v_1, \ldots, v_n)$ base di V

- Sia K un campo e V uno spazio vettoriale su K. Si provi che sono equivalenti gli asserti:

a) per ogni $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 1$ esiste una famiglia linearmente indipendente
$$(v_1, \ldots, v_k)$$
di elementi di V,

b) V è uno spazio di tipo non finito.

Cenno: a)$\Rightarrow$ b). Se V fosse di tipo finito, ogni famiglia finita di elementi di V con un numero di elementi $k > \dim V$ sarebbe linearmente dipendente.

b)$\Rightarrow$ a). Siccome $V \neq \{0\}$, esiste $v_1 \in V$ tale che $v_1 \neq 0$. Siccome
$$V \neq \langle v_1 \rangle$$
esiste $v_2 \in V$ tale che $v_2 \notin \langle v_1 \rangle$.Siccome
$$V \neq \langle v_1, v_2 \rangle$$
esiste $v_3 \in V$ tale che $v_3 \notin \langle v_1, v_2 \rangle$. Etc..

- Si provi che $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (vedi Sezione 2.5) è uno spazio vettoriale di tipo non finito su $\mathbb{R}$.
  (*Cenno:* vedi Esercizi della Sezione 2.6).
- Sia K un campo, ed $X \neq \emptyset$ un insieme. Si provino gli asserti:
  - se X è un insieme finito con n elementi, allora
  $$\mathscr{F}(X, K)$$
  è uno spazio vettoriale di tipo finito su K, e si ha
  $$\dim \mathscr{F}(X, K) = n$$
  - se X è un insieme non finito, allora
  $$\mathscr{F}(X, K)$$
  è uno spazio vettoriale di tipo non finito su K.

2.11 Spazi vettoriali di tipo finito: coordinate

Sia K un campo, e V uno spazio vettoriale di tipo finito su K; sia
$$\dim V = n \neq 0 ,$$
e sia
$$\mathscr{V} = (v_1, \ldots, v_n)$$
una base di V.

Per $\forall v \in V$,

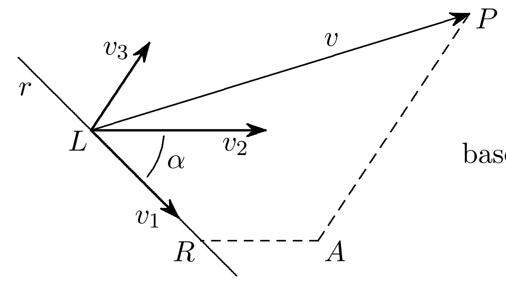
- $\exists_1 a_1, \ldots, a_n \in K$ tali che
$$v = \sum_{j=1}^{n} a_j v_j = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n \ ;$$
- i numeri
$$a_1, \ldots, a_n \in K$$
si dicono le *coordinate* di v rispetto alla base $\mathscr{V}$;
- la colonna
$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in K^n$$
si dice la *colonna delle coordinate* di v rispetto alla base $\mathscr{V}$;
- per esprimere che $a \in K^n$ è la colonna delle coordinate di v rispetto alla base $\mathscr{V}$, si usano le scritture
$$v \equiv_{\mathscr{V}} a \quad , v \equiv_{\mathscr{V}} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \quad , v \equiv_{\mathscr{V}} a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \quad .$$

Si osservi che:

- per $\forall v \in V$, $\exists_1 a \in K^n$ tale che
$$v \equiv_{\mathscr{V}} a \quad ;$$
- per $\forall a \in K^n$, $\exists_1 v \in V$ tale che
$$v \equiv_{\mathscr{V}} a \quad ;$$
- siano $v, w \in V$, e sia $\lambda \in K$; se
$$v \equiv_{\mathscr{V}} a, \quad v \equiv_{\mathscr{V}} b \quad ,$$
allora si ha
$$v + w \equiv_{\mathscr{V}} a + b, \qquad \lambda v \equiv_{\mathscr{V}} \lambda a \quad .$$

Esempi:

- Si consideri lo spazio vettoriale V_L sul campo $\mathbb{R}$,



e sia $\mathscr{V} = (v_1, v_2, v_3)$ una base di V_L (vedi Sezione 2.8);

- dato $v \in V$ (vedi figura), le coordinate di v rispetto alla base $\mathscr{V}$ sono i numeri
$$a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$$
tali che
$$\overrightarrow{LR} = a_1 v_1, \quad \overrightarrow{RA} \sim a_2 v_2, \quad \overrightarrow{AP} \sim a_3 v_3$$
ossia tali che
$$v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3$$
- disegnare i vettori:
$$w_1 \equiv_{\mathscr{V}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad w_2 \equiv_{\mathscr{V}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad w_3 \equiv_{\mathscr{V}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$w_4 \equiv_{\mathscr{V}} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad w_5 \equiv_{\mathscr{V}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad w_6 \equiv_{\mathscr{V}} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
- dato $P \in \mathscr{S}$ (vedi figura), se
$$\overrightarrow{LP} \equiv_{\mathscr{V}} a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$
ossia se
$$\overrightarrow{LP} = a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 \quad ,$$
allora si dice che
$$a_1 . a_2, a_3 \in \mathbb{R}$$
sono le *coordinate di P rispetto alla base $\mathscr{V}$*, e che la colonna
$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

è la *colonna delle coordinate di P rispetto alla base $\mathscr{V}$*, e si scrive

$$P \equiv_{\mathscr{V}} a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

- si disegnino i punti di coordinate:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

- Si consideri $\mathbb{C}^2$ come spazio vettoriale su $\mathbb{C}$, e sia

$$\mathscr{K} = \left(\begin{pmatrix} 1+i \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ 1-i \end{pmatrix} \right)$$

si verifichi che

- $\mathscr{K}$ è una base di $\mathbb{C}^2$ (come spazio vettoriale su $\mathbb{C}$)

Cenno. Si deve provare che per $\forall \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2, \exists_1 \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$ tali che

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1+i \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} i \\ 1-i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

Ciò equivale a provare che il sistema

$$\begin{cases} (1+i)x_1 + ix_2 = c_1 \\ x_1 + (1-i)x_2 = c_2 \end{cases} \qquad x_1, x_2 \in \mathbb{C}$$

ha una ed una sola soluzione. Risolvendo il sistema con il Metodo di Gauss si ottiene che $\exists_1$ soluzione, e precisamente

$$x_1 = \frac{3-i}{5}c_1 + \frac{1-2i}{5}c_2$$
$$x_2 = \frac{-2-i}{5}c_1 + \frac{1+3i}{5}c_2$$

■

- per $\forall \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$, la colonna delle coordinate di $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ rispetto a $\mathscr{K}$ è data da

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \equiv_{\mathscr{K}} \begin{pmatrix} \dfrac{3-i}{5}c_1 + \dfrac{1-2i}{5}c_2 \\ \dfrac{-2-i}{5}c_1 + \dfrac{1+3i}{5}c_2 \end{pmatrix}$$

si osservi che

- per $\forall v \in V_L$, la colonna delle coordinate di v rispetto ad una base $\mathscr{V}$ è un elemento di $\mathbb{R}^3$
- per $\forall c \in \mathbb{C}^2$, la colonna delle coordinate di c rispetto alla base $\mathscr{K}$ è un elemento di $\mathbb{C}^2$

2.12 Sottospazi

Sia K un campo e V uno spazio vettoriale su K;

2.12.1 Definizione: Un sottinsieme W di V, *non vuoto, chiuso rispetto alla somma, e chiuso rispetto alla formazione di multipli*, ossia tale che:

- $V \neq \emptyset$,
- per $\forall v, w \in W$ si ha $v + w \in W$,
- per $\forall v \in W$ e $\forall \lambda \in K$ si ha $\lambda v \in W$,

si dice un *sottospazio vettoriale* di V, o semplicemente un *sottospazio* di V.

Nota: Sia W un sottospazio di V; si provi che l'insieme W, con le operazioni di addizione e di multiplo indotte da V, è uno spazio vettoriale su K.

Che relazione c'è tra 0_W e 0_V? Sia $v \in W$, e sia v' l'opposto di v in W; che relazione c'è tra v' e $-v$?

Esempi:

▼ Sia K un campo e V uno spazio vettoriale su K. Sia

$$(v_1, \ldots, v_k)$$

una famiglia finita di elementi di V, e sia

$$W = \langle v_1, \ldots, v_k \rangle \ .$$

- Si ricordi che gli elementi di W sono le combinazioni lineari della famiglia $(v_1, \ldots, v_k)$ a coefficienti in K;
- si provi che W è un sottospazio di V;
- si provi che
$$(v_1, \ldots, v_k)$$
è una famiglia finita di generatori dello spazio vettoriale W;
- si provi che W è uno spazio vettoriale di tipo finito, e che
$$\dim W \leqslant k \ ;$$

- sia Z un sottospazio di V tale che
$$v_1, \dots, v_k \in Z \ ;$$
si provi che
$$W \subset Z \ ;$$
- si provi che W è il più piccolo tra i sottospazi Z di V tali che
$$v_1, \dots, v_k \in Z \ .$$
- W si dice il sottospazio di V *generato* dalla famiglia $(v_1, \dots, v_k)$.

♦ Sia K un campo e V uno spazio vettoriale su K. Si provi che

- V è un sottospazio di V, ed è quindi il massimo sottospazio di V;
- $\{0\}$ è un sottospazio di V, ed è quindi il minimo sottospazio di V;
- $\emptyset$ è un sottinsieme di V, ma non è un sottospazio di V.

♦ Sia $L \in \mathscr{S}$, e siano
$$\begin{cases} r \text{ una retta per } L \ , \\ \alpha \text{ un piano per } L \ . \end{cases}$$
Si provi che
$$\{\overrightarrow{LL}\}, \quad r_L, \quad \alpha_L, \quad V_L$$
sono sottospazi di V_L.

Siano
$$\begin{cases} s \text{ una retta non per } L \ , \\ \beta \text{ un piano non per } L \ . \end{cases}$$
Si provi che i seguenti sottinsiemi di V_L non sono sottospazi di V_L:
$$Y = \{\overrightarrow{LA} : A \in s\}, \qquad Z = \{\overrightarrow{LA} : A \in \beta\} \quad .$$

▲ Sia K un campo; si consideri il sistema $\mathscr{S}$ di n equazioni lineari a coefficienti in K
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1m}x_m = b_1 \\ \qquad\qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nm}x_m = b_m \end{cases} ,$$
nell'incognita
$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \in K^m \quad ,$$
e sia W l'insieme delle sue soluzioni; ovviamente
$$W \subset K^m \quad .$$

- Nell'ipotesi che $\mathscr{S}$ sia un sistema *omogeneo*, ossia che
$$b_1 = \cdots = b_m = 0 \quad ,$$
si provi che W è un sottospazio di K^m;
- nell'ipotesi che $\mathscr{S}$ non sia un sistema omogeneo, si provi che W non è un sottospazio di K^m.

2.12.2 Teorema: Siano K un campo, V uno spazio vettoriale di tipo finito su K, e sia
$$\dim V = n \ .$$

Sia W un sottospazio di V; sussistono gli asserti:

a) W è di tipo finito;

b) $\dim W \leqslant n$;

c) $\dim W = n \Leftrightarrow W = V$.

Cenno. a). Se W fosse di tipo non finito, esisterebbe una famiglia linearmente indipendente
$$(w_1, \ldots, w_{n+1})$$
di elementi di W. Tale famiglia sarebbe anche una famiglia linearmente indipendente di elementi di V: assurdo, perché $\dim V = n$.

b): Se fosse $\dim W > n$, esisterebbe una famiglia linearmente indipendente
$$(w_1, \ldots, w_{n+1})$$
di elementi di W: assurdo come nella prova di a). perché $\dim V = n$.

c). Dimostrare per esercizio. ■

Esercizio: Si provi che i sottospazi di V_L sono tutti e soli i seguenti:

$\{\overrightarrow{LL}\}$		quello di dimensione	0
r_L	con r retta per L	quelli di dimensione	1
α_L	con α piano per L	quelli di dimensione	2
V_L		quelli di dimensione	3

Cenno: Sia W un sottospazio di V_L; essendo $dimV_L$, per il Teorema 2.12.2 si ha che
$$\dim W \in \{0, 1, 2, 3\} \quad .$$

Si provi per esercizio il seguente:

2.12.3 Teorema: Siano K un campo, V uno spazio vettoriale di tipo finito su K, e sia
$$\dim V = n \ .$$

Sussistono gli asserti:

- $\{0\}$ è l'unico sottospazio di V di dimensione 0;
- per $k = 1, \dots, n$ i sottospazi di V di dimensione k sono descitti parametricamente da
$$\langle v_1, \dots, v_k \rangle$$
al variare di
$$(v_1, \dots, v_k)$$
tra le famiglie linearmente indipendenti di elementi di V.

Attenzione: famiglie diverse possono fornire uno stesso sottospazio.

2.13 Intersezione e somma di sottospazi

Sia K un campo e V uno spazio vettoriale su K. Sia
$$V_1, \dots, V_h$$
una famiglia finita di sottospazi di V; si verifichi che:

▼ $\displaystyle\bigcap_{j=1}^{h} V_j = V_1 \cap \dots \cap V_h$ è un sottospazio di V;

◆ se
$$\begin{cases} V_1 \not\subset V_2 \\ V_2 \not\subset V_1 \end{cases} ,$$
allora
$$V_1 \cup V_2$$
non è un sottospazio di V;

Cenno. Esistono
$$v_1 \begin{cases} \in V_1 \\ \notin V_2 \end{cases} , \quad v_2 \begin{cases} \in V_2 \\ \notin V_1 \end{cases} .$$
Sia
$$w = v_1 + v_2 \quad ;$$
se fosse
$$w \in V_1 \cup V_2 \quad ,$$
si avrebbe che:
$$\begin{cases} \text{o } w \in V_1 \\ \text{o } w \in V_2 \end{cases} .$$
Nel primo caso si avrebbe:
$$v_2 = \underbrace{w - v_1}_{\textit{entrambi} \in V_1} \in V_1 \qquad \text{assurdo,}$$

nel secondo caso si avrebbe:

$$v_1 = \underbrace{w - v_2}_{entrambi \in V_2} \in V_2 \qquad \text{assurdo.}$$

■

⧫ posto

$$\sum_{j=1}^{h} V_j = V_1 + \cdots + V_h =$$

$$\left\{ v \in V : \exists v_1 \in V_1, \ldots, v_h \in V_h \text{ tali che } v = v_1 + \cdots + v_h \right\} \quad ,$$

si ha:

- ▽ $\displaystyle\sum_{j=1}^{h} V_j$ è un sottospazio di V;
- ◊ $\displaystyle\bigcup_{j=1}^{h} V_j \subset \sum_{j=1}^{h} V_j$;
- ◊ se W è un sottospazio di V tale che

$$\bigcup_{j=1}^{h} V_j \subset W \quad ;$$

allora

$$\sum_{j=1}^{h} V_j \subset W \ ;$$

- △ $\displaystyle\sum_{j=1}^{h} V_j$ è il più piccolo tra i sottospazi W di V tali che

$$\bigcup_{j=1}^{h} V_j \subset W \ ;$$

Definizione: $\displaystyle\sum_{j=1}^{h} V_j$ si dice la *somma* dei sottospazi $V_1, \ldots, V_h$.

▲ se tutti i sottospazi $V_1, \ldots, V_h$ sono di tipo finito, e

$$V_1 = \langle v_{11}, \ldots, v_{1n_1} \rangle, \ \ldots, \ V_h = \langle v_{h1}, \ldots, v_{hn_h} \rangle \quad ,$$

allora:

$$\triangledown \quad \sum_{j=1}^{h} V_j = \langle v_{11}, \ldots, v_{1n_1}, \ \ldots, \ v_{h1}, \ldots, v_{hn_h} \rangle \ ,$$

$$\lozenge \quad \sum_{j=1}^{h} V_j \ \text{ è un sottospazio di tipo finito,}$$

$$\vartriangle \ \dim \sum_{j=1}^{h} V_j \leqslant \sum_{j=1}^{h} \dim V_j \ .$$

2.13.1 Teorema della dimensione (per sottospazi)**:** Sia K un campo e V uno spazio vettoriale su K. Siano

$$W, Z$$

sottospazi di V. Ovviamente si ha:

$$W \cap Z \subset \left\{ \begin{array}{c} W \\ \\ Z \end{array} \right\} \subset W + Z \quad .$$

Se i sottospazi W, Z sono entrambi di tipo finito, allora si ha:

- $W \cap Z, W + Z$ sono sottospazi di tipo finito,
- $\dim(W + Z) = \dim W + \dim Z - \dim(W \cap Z)$

Cenno. 1° *caso:* Si verifichi l'asserto per esercizio nei due casi:

$$W \subset Z, \quad Z \subset W \quad .$$

2° *caso:* Si supponga:

$$W \not\subset Z, \quad Z \not\subset W, \quad W \cap Z = \{0\}.$$

In tal caso esistono (perche?):

$$\begin{array}{ll} \text{una base } (w_1, \ldots, w_s) & \text{di } W \ , \\ \text{una base } (z_1, \ldots, z_t) & \text{di } Z \ ; \end{array}$$

si provi che

$$(w_1, \ldots, w_s, z_1, \ldots, z_t)$$

è una base di $W + Z$.

3° *caso:* Si supponga:

$$W \not\subset Z, \quad Z \not\subset W, \quad W \cap Z \neq \{0\}.$$

In tal caso esistono (perche?):

$$\begin{array}{ll} \text{una base } (v_1, \dots, v_r) & \text{di } W \cap Z \ , \\ \text{una base } (v_1, \dots, v_r, w_1, \dots, w_s) & \text{di } W \ , \\ \text{una base } (v_1, \dots, v_r, z_1, \dots, z_t) & \text{di } Z \ ; \end{array}$$

si provi che

$$(v_1, \dots, v_r, w_1, \dots, w_s, z_1, \dots, z_t)$$

è una base di $W + Z$. ∎

Esercizi:

- Si consideri $\mathbb{C}^7$, e siano W, Z suoi sottospazi. Si provi che:
  - $\dim W = 3, \dim Z = 5 \Rightarrow W \cap Z \neq \{0\}$ (si applichi a W, Z il Teorema 2.13.1),
  - $\dim W = 6, Z \not\subset W \Rightarrow W + Z = \mathbb{C}^7$.
- Sia K un campo e V uno spazio vettoriale su K, di tipo finito e $\dim V = n$. Siano W, Z sottospazi di V; si provi che:

$$\dim V + \dim Z > n \Rightarrow W \cap Z \neq \{0\} \ .$$

2.14 Somma diretta

Per rendere significativa la nozione di *somma diretta*, analiziamo preventivamente una situazione concreta: si consideri lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ (su $\mathbb{R}$), ed i suoi sottinsiemi

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ a \\ b \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}, \qquad Z = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \beta \\ \alpha \end{pmatrix} : \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\} \ ;$$

- si provi che W, Z sono sottospazi di $\mathbb{R}^4$;
- si determinino una base di W e una di Z;
  Cenno. Si ha

$$W = \left\{ a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle ,$$

  pertanto la famiglia

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

è una famiglia di generatori di W; siccome tale famiglia è anche linearmente indipendente, è una base di W. ■

- si provi che

$$W + Z = \left\{ x \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0 \right\}$$

Cenno. Si provino separatamente gli asserti:

a) $\dim(W + Z) = 3$

b) $\dim \left\{ x \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0 \right\} = 3$

c) $W + Z \subset \left\{ x \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0 \right\}$

■

- sia

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} ;$$

si constati che

$$v \notin W + Z ;$$

esistono $w \in W,\ z \in Z$ tali che

$$v = w + z \ ?$$

- sia

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} ;$$

si constati che

$$v \in W + Z ;$$

pertanto esistono $w \in W,\ z \in Z$ tali che

$$v = w + z ;$$

domanda: il modo di scrivere v nella forma

$$v = w + z, \quad w \in W, z \in Z$$

è unico, o ci sono più modi di farlo?

risposta: un modo è

$$v = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} ,$$

e per $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ un altro modo è

$$v = \begin{pmatrix} -1+\lambda \\ 0+\lambda \\ -1+\lambda \\ 0+\lambda \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2-\lambda \\ 3-\lambda \\ 3-\lambda \\ 2-\lambda \end{pmatrix} .$$

Risolvendo con il Metoo di Gauss il sistema

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \beta \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

nelle incognite

$$a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R} ,$$

si provi che, al variare di λ, le soluzioni indicate sono tutte e sole quelle possibili.

2.14.1 Definizione: Sia K un campo e V uno spazio vettoriale su K. Sia

$$V_1, \ldots, V_h$$

una famiglia finita di sottospazi di V.

- Se per $\forall v \in V_1 + \cdots + V_h$ esistono (ovviamente) e sono univocamente determinati

  $$v_1 \in V_1, \ldots, v_h \in V_h$$

  tali che

  $$v = v_1 + \cdots + v_h ,$$

- allora la somma

  $$\sum_{j=1}^{h} V_j = V_1 + \cdots + V_h$$

  si dice *diretta*, e si denota con i simboli

  $$\bigoplus_{j=1}^{h} V_j = V_1 \oplus \cdots \oplus V_h$$

  Attenzione: "$\bigoplus$" e "$\oplus$" non sono nuove operazioni tra sottospazi, sono semplicementi nuovi simboli con cui indicare "$\sum$" e "$+$" una volta che sia stato appurato che una somma è diretta.

Esempio: Si consideri lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^5$ (su $\mathbb{R}$), ed i suoi sottinsiemi

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ a \\ b \\ b \\ b \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}, \qquad Z = \left\{ \begin{pmatrix} 2\alpha \\ 3\alpha \\ 2\beta \\ 3\beta \\ 5\beta \end{pmatrix} : \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\} \ ;$$

- si provi che W, Z sono sottospazi di $\mathbb{R}^5$;
- si determinino una base di W e una di Z;
- si provi che

$$W + Z = \left\{ x \in \mathbb{R}^5 : 2x_3 - 3x_2 + x_5 = 0 \right\}$$

  Cenno. Si provino separatamente gli asserti:

  a) $\dim(W + Z) = 4$
  b) $\dim \left\{ x \in \mathbb{R}^5 : 2x_3 - 3x_2 + x_5 = 0 \right\} = 4$
  c) $W + Z \subset \left\{ x \in \mathbb{R}^5 : 2x_3 - 3x_2 + x_5 = 0 \right\}$

- sia

$$v = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 3 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \ ;$$

  si provi che

$$v \notin W + Z \ ;$$

  ovviamente

$$\nexists w \in W, z \in Z \quad \text{tali che} \quad v = w + z \ ;$$

- sia

$$v = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \\ \gamma_4 \\ \gamma_5 \end{pmatrix} \in W + Z \ ,$$

  ossia tale che

$$2\gamma_3 - 3\gamma_4 + \gamma_5 = 0 \ ;$$

  si provi che

$$\exists_1 w \in W, z \in Z \ \text{ tali che } \ v = w + z \ ;$$

Cenno. Con il Metodo di Gauss si risolva il sistema

$$\begin{pmatrix} a \\ a \\ b \\ b \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\alpha \\ 3\alpha \\ 2\beta \\ 3\beta \\ 5\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \\ \gamma_4 \\ \gamma_5 \end{pmatrix}$$

nelle incognite

$$a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \ .$$

■

- il precedente Item prova che la somma

$$W + Z$$

è diretta; da questo momento, tale somma può essere indicata con il simbolo

$$W \oplus Z \ ;$$

- sia

$$v = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \\ \gamma_4 \\ \gamma_5 \end{pmatrix} \in W \oplus Z \ ,$$

ossia tale che

$$2\gamma_3 - 3\gamma_4 + \gamma_5 = 0 \ ;$$

si scriva v nella forma

$$v = w + z \quad \text{con} \quad w \in W, \ z \in Z \quad .$$

Per controllare che una somma di sottospazi sia diretta, e per comprendere a cosa serva tale informazione, sono utili i seguenti due Teoremi (dimostrarli entrambi per esercizio).

2.14.2 Teorema: Sia K un campo e V uno spazio vettoriale su K. Sia

$$V_1, \ldots, V_h$$

una famiglia finita di sottospazi di V. Sono equivalenti gli asserti:

a) la somma

$$V_1 + \cdots + V_h$$

è diretta;

b) sussite l'implicazione

$$\begin{cases} v_1 \in V_1, \ldots, v_h \in V_h \\ v_1 + \cdots + v_h = 0 \end{cases} \Rightarrow v_1 = \cdots = v_h = 0 \ .$$

Nota: Si applichi questo Teorema ai due precedenti esempi di questa Sezione, per provare più elegantemente che nel primo caso la somma non è diretta e nel secondo la somma è diretta.

2.14.3 Teorema: Sia K un campo e V uno spazio vettoriale su K. Sia

$$V_1, \ldots, V_h$$

una famiglia finita di sottospazi di V.

Se

- $V_1, \ldots, V_h$ sono sottospazi di tipo finito,
- $\dim V_j \neq 0 \quad \text{per} \quad j = 1, \ldots, h$,

allora sono equivalenti gli asserti:

a) la somma $V_1 + \cdots + V_h$ è diretta;

b) esistono

$$\begin{array}{c} \text{una base} \quad (v_{11}, \ldots, v_{1n_1}) \quad \text{di} \quad V_1 \\ \vdots \\ \text{una base} \quad (v_{h1}, \ldots, v_{hn_h}) \quad \text{di} \quad V_h \end{array}$$

tali che

$$(v_{11}, \ldots, v_{1n_1}, \ \ldots, \ v_{h1}, \ldots, v_{hn_h})$$

sia una base di $V_1 + \cdots + V_h$;

c) si ha

$$\dim(V_1 + \cdots + V_h) = \dim V_1 + \cdots + \dim V_h \ .$$

Inoltre, se

- $V_1, \ldots, V_h$ sono sottospazi di tipo finito,
- $\dim V_j \neq 0 \quad \text{per} \quad j = 1, \ldots, h$,
- la somma $V_1 + \cdots + V_h$ è diretta,

allora, date comunque

$$\begin{array}{c} \text{una base} \quad (v_{11}, \ldots, v_{1n_1}) \quad \text{di} \quad V_1 \\ \vdots \\ \text{una base} \quad (v_{h1}, \ldots, v_{hn_h}) \quad \text{di} \quad V_h \end{array}$$

si ha che

$$(v_{11}, \ldots, v_{1n_1}, \ \ldots, \ v_{h1}, \ldots, v_{hn_h})$$

è una base di $V_1 \oplus \cdots \oplus V_h$.

Esercizi:

- Sia K un campo e V uno spazio vettoriale su K; sia

$$V_1, \dots, V_h$$

una famiglia di sottospazi di V, tale che la somma

$$V_1 + \cdots + V_h$$

sia diretta. Si provi che anche la somma

$$V_1 + \cdots + V_h + \langle 0 \rangle + \langle 0 \rangle + \langle 0 \rangle$$

è diretta.

- Sia K un campo e V uno spazio vettoriale su K; siano

$$W,\ Z$$

sottospazi di V. Si provi che sono equivalenti gli asserti:

a) la somma $W + Z$ è diretta;
b) si ha $W \cap Z = \{0\}$.

Attenzione: tale risultato non si generalizza in modo banale a famiglie con più di 2 sottospazi; vedi Item seguente.

- Sia K un campo e V uno spazio vettoriale su K; sia

$$V_1, \dots, V_h$$

una famiglia di sottospazi di V. Si provi che sono equivalenti gli asserti:

a) la somma $V_1, \dots, V_h$ è diretta;
b) si ha

$$\begin{aligned}
&V_1 \cap V_2 = \{0\} \\
&(V_1 + V_2) \cap V_3 = \{0\} \\
&(V_1 + V_2 + V_3) \cap V_4 = \{0\} \\
&\qquad\vdots \\
&(V_1 + V_2 + V_3 + \cdots + v_{h-1}) \cap V_h = \{0\} \quad .
\end{aligned}$$

- Si provi che

$$\mathbb{R}^3 = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle \oplus \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle \quad .$$

Cenno. Vanno provati separatamente 2 asserti:

1°) la somma indicata è *veramente* diretta: per questo si verifichi che

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) \qquad \text{è una base del } 1^\circ \text{ addendo,}$$

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}\right) \qquad \text{è una base del } 2^\circ \text{ addendo,}$$

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}\right) \qquad \text{è una base della somma,}$$

e si applichi il Teorema 2.14.3.

2°) $\mathbb{R}^3 = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle + \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle$: per questo, si osservi che

$$\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle + \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle \subset \mathbb{R}^3$$

$$\dim\left(\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle + \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle\right) = 3$$

$$\dim \mathbb{R}^3 = 3 \quad .$$

■

- Scrivere $\mathbb{C}^3$ nella forma:
  - $\mathbb{C}^3 = W \oplus Z$, con W, Z sottospazi di $\mathbb{C}^3$ tali che

$$\dim W > 0, \quad \dim Z > 0 \quad ;$$

Cenno. Dei 2 sottospazi, uno deve avere dimensione 1, e l'altro dimensione 2. Si scelga una base

$$(c_1, c_2, c_3)$$

di $\mathbb{C}^3$, e si ponga

$$W = \langle c_1, c_2 \rangle, \quad Z = \langle c_3 \rangle \quad .$$

■

- ○ $\mathbb{C}^3 = W \oplus Z \oplus Y$, con W, Z, Y sottospazi di $\mathbb{C}^3$ tali che

$$\dim W > 0, \quad \dim Z > 0, \quad \dim Y > 0 \; ; .$$

- ○ $\mathbb{C}^3 = W \oplus Z \oplus Y \oplus S$, con W, Z, Y, S sottospazi di $\mathbb{C}^3$ tali che

$$\dim W > 0, \quad \dim Z > 0, \quad \dim Y > 0 \quad , \dim S > 0 \quad ;$$

  Attenzione: richiesta assurda (perché?).
- ○ $\mathbb{C}^3 = W \oplus Z \oplus Y \oplus S$, con W, Z, Y, S sottospazi di $\mathbb{C}^3$.

- Si consideri $\mathscr{F}(\mathbb{C}, \mathbb{R})$ (vedi Sezione 2.5; è uno spazio vettoriale su $\mathbb{C}$ o su $\mathbb{R}$?). Siano

$$V_1 = \Big\{ f \in \mathscr{F}(\mathbb{C}, \mathbb{R}) : f(c) = 0 \ \text{ per } \forall c \text{ tale che } \operatorname{Re} c \leq 0 \Big\}$$
$$V_2 = \Big\{ f \in \mathscr{F}(\mathbb{C}, \mathbb{R}) : f(c) = 0 \ \text{ per } \forall c \text{ tale che } \operatorname{Re} c \neq 0 \Big\}$$
$$V_3 = \Big\{ f \in \mathscr{F}(\mathbb{C}, \mathbb{R}) : f(c) = 0 \ \text{ per } \forall c \text{ tale che } \operatorname{Re} c \geq 0 \Big\}$$

  Si provi che:

  - ○ $V_1, \ V_2, \ V_3$ sono sottospazi di $\mathscr{F}(\mathbb{C}, \mathbb{R})$;
  - ○ $\mathscr{F}(\mathbb{C}, \mathbb{R}) = V_1 \oplus V_2 \oplus V_3$.

- Si consideri $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione; si ricordi che:

  - ○ f si dice *pari* se per $\forall t \in \mathbb{R}$ si ha

$$f(-t) = f(t) \quad ;$$

  - ○ f si dice *dispari* se per $\forall t \in \mathbb{R}$ si ha

$$f(-t) = -f(t) \quad .$$

  Siano:

$$V_1 = \Big\{ f \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : f \text{ pari} \Big\}$$
$$V_2 = \Big\{ f \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : f \text{ dispari} \Big\}$$

  Si provi che:

  - ○ $V_1, \ V_2$ sono sottospazi di $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$;
  - ○ $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = V_1 \oplus V_2$.

Capitolo 3

Applicazioni lineari e matrici

3.1 Applicazioni lineari

Sia K un campo, e siano V, W spazi vettoriali su K.

3.1.1 Definizione: Sia

$$f : V \to W$$

una applicazione.

Se

- per $\forall v_1, v_2 \in V$ si ha

$$f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2)$$

- per $\forall v \in V$ e per $\forall \lambda \in K$ si ha

$$f(\lambda v) = \lambda f(v)$$

allora

- f si dice una applicazione *lineare* o un *omomorfismo*.

Esempi:

- Si considerino gli spazi vettoriali V_L e $\mathbb{R}^3$ sul campo $\mathbb{R}$. Sia

$$\mathscr{V} = (v_1, v_2, v_3)$$

una base di V_L. Si considerino le applicazioni

$$\kappa : V_L \to \mathbb{R}^3, \quad \vartheta : \mathbb{R}^3 \to V_L$$

definite da:

- per $\forall v \in V_L$ si consideri la colonna $a \in \mathbb{R}^3$ tale che
$$v \equiv_{\mathscr{V}} a \ ,$$
e si ponga
$$\kappa(v) = a \ ;$$
- per $\forall a \in \mathbb{R}^3$ si consideri il vettore $v \in V_L$ tale che
$$v \equiv_{\mathscr{V}} a \ ,$$
e si ponga
$$\vartheta(a) = v \ ;$$

Si provi che
$$\kappa : V_L \to \mathbb{R}^3, \qquad \vartheta : \mathbb{R}^3 \to V_L$$
sono applicazioni lineari.

Si dica come operano i prodotti i composizione
$$\vartheta\kappa : V_L \to V_L, \qquad \kappa\vartheta : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \ .$$

- Si considerino gli spazi vettoriali V_L e $\mathbb{R}^3$ sul campo $\mathbb{R}$. Siano
$$v_0 \in V_L, \qquad a_0 \in \mathbb{R}^3$$
Si considerino le applicazioni
$$\tau_{v_0} : V_L \to V_L, \qquad \tau_{a_0} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$
definite da:
  - per $\forall v \in V_L$ si ponga
$$\tau_{v_0}(v) = v + v_0 \in V_L \ ;$$
  - per $\forall a \in \mathbb{R}^3$ si ponga
$$\tau_{a_0}(a) = a + a_0 \in \mathbb{R}^3 \ ;$$

  Si provi che
$$\tau_{v_0} : V_L \to V_L, \qquad \tau_{a_0} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$
sono applicazioni non lineari.

- Si considerino gli spazi vettoriali su $\mathbb{R}$ definiti da:
$$V = \langle 1, \cos \pi t, \sin \pi t \rangle, \qquad W = \langle \cos \pi t, \sin \pi t \rangle$$
(sono sottospazi dello spazio vettoriale $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$). Si considerino le applicazioni
$$F : V \to W, \qquad G : W \to V$$
definite da:

- per $\forall f(t) \in V$ si provi che

$$f^{(1)}(t) \in W$$

(**Nota:** Il simbolo $f^{(h)}(t)$ denota la derivata h-esima di $f(t)$), e si ponga:

$$F(f(t)) = f^{(1)}(t) \ ;$$

- per $\forall g(t) \in W$ si consideri l'unica primitiva $\widetilde{g}(t)$ di $g(t)$ tale che

$$\widetilde{g}(1/2) = 0 \ ;$$

si provi che

$$\widetilde{g}(t) \in V \ ,$$

e si ponga

$$G(g(t)) = \widetilde{g}(t) \ .$$

Si provi che

$$F : V \to W, \quad G : W \to V$$

sono applicazioni lineari.

Si dica come operano i prodotti i composizione

$$GF : V \to V, \quad FG : W \to W \ .$$

3.1.2 Definizione: Sia

$$f : V \to W$$

una applicazione lineare.

- Si consideri l'insieme

$$\Big\{ v \in V : f(v) = 0 \Big\} \ ;$$

tale insieme si dice il *nucleo* di f (in inglese, il *kernel* di f), e si denota con il simbolo

$$\ker f \ ;$$

- si consideri l'insieme

$$\Big\{ w \in W : \exists v \in V \text{ tale che } f(v) = w \Big\} \ ;$$

tale insieme si dice l' *immagine* di f, e si denota con il simbolo

$$\operatorname{Im} f \ .$$

3.1.3 Osservazione: Sia
$$f : V \to W$$
una applicazione lineare. Si provino gli asserti seguenti:

▼ $\ker f$ è un sottospazio di V;

♦ $\mathrm{Im}\ f$ è un sottospazio di W;

♦ se
$$w \begin{cases} \in W \\ \notin \mathrm{Im}\ f \end{cases} ,$$
allora
$$\left\{ v \in V : \text{ tale che } f(v) = w \right\} = \emptyset \quad ;$$

♦ se
$$w \in \mathrm{Im}\ f$$
e $\widetilde{v} \in V$ è un elemento (certamente esistente) tale che
$$f(\widetilde{v}) = w \ ,$$
allora
$$\left\{ v \in V : \text{ tale che } f(v) = w \right\} = \widetilde{v} + \ker f \quad ;$$
Nota: se $y \in V$, e $M \subset V$, il simbolo
$$y + M$$
è definito da:
$$y + M = \left\{ y + m : m \in M \right\} \quad .$$

♦ f è surgettiva $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Im}\ f = W$ (è una tautologia);

♦ f è iniettiva $\Leftrightarrow$ $\ker f = \left\{ 0 \right\}$;

▲ se
$$f : V \to W$$
è bigettiva, allora
$$f^{-1} : W \to V$$
è lineare;

Cenno. Siano $w, z \in W$; siccome
$$\begin{aligned} & f\left(f^{-1}(w+z)\right) = w + z \\ & f\left(f^{-1}(w) + f^{-1}(z)\right) = \\ & \qquad f\left(f^{-1}(w)\right) + f\left(f^{-1}(z)\right) = w + z \end{aligned} ,$$
e f è iniettiva, si ha
$$f^{-1}(w + z) = f^{-1}(w) + f^{-1}(z) \quad .$$

■

3.2 Applicazioni lineari definite su spazi di tipo finito

Sia K un campo, e siano V, W spazi vettoriali su K.

3.2.1 Teorema (per la determinazione di Im f)**:** Sia

$$f : V \to W$$

una applicazione lineare.

Se V è di tipo finito, e

$$(v_1, \ldots, v_n)$$

è una famiglia finita di generatori di V, allora

$$\mathrm{Im}\ f = \langle f(v_1), \ldots, f(v_n) \rangle \quad .$$

In particolare:

- Im f è un sottospazio di tipo finito di W,
- $\dim(\mathrm{Im}\ f) \leqslant \dim V$.

Cenno. Sia $w \in W$. Si ha

$$\begin{aligned} w \in \mathrm{Im}\ f \Leftrightarrow \\ &\exists a_1, \ldots, a_n \in K \text{ tali che } f\left(a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n\right) = w \Leftrightarrow \\ &\exists a_1, \ldots, a_n \in K \text{ tali che } a_1 f\left(v_1\right) + \cdots + a_n f\left(v_n\right) = w \Leftrightarrow \\ &\qquad\qquad w \in \langle f(v_1), \ldots, f(v_n) \rangle \quad . \end{aligned}$$

■

3.2.2 Teorema (della dimensione per applicazioni lineari)**:** Sia

$$f : V \to W$$

una applicazioe lineare.

Se V è di tipo finito, allora

- $\ker f$ è di tipo finito (vedi Esempi nella Sezione 2.12),
- Im f è di tipo finito (vedi Teorema 3.2.1);

sussiste inoltre la relazione:

$$\dim V = \dim(\mathrm{Im}\ f) + \dim(\ker f) \ .$$

Cenno. Si ponga

$$\dim V = n \ .$$

Si provi per esercizio il Teorema nei seguenti 3 casi:

$$\begin{aligned}
&n = 0\\
&n \neq 0 \quad \text{e} \quad \dim(\ker f) = 0\\
&n \neq 0 \quad \text{e} \quad \dim(\ker f) = n \quad .
\end{aligned}$$

Supponiamo quindi

$$n \neq 0, \quad 0 < \dim(\ker f) < n \ ,$$

e sia

$$h = \dim(\ker f) \quad .$$

Si cosideri una base

$$(v_1, \ldots, v_h)$$

di $\ker f$; esistono $z_1, \ldots, z_{n-h} \in V$ tali che

$$(v_1, \ldots, v_h, z_1, \ldots, z_{n-h})$$

sia una base di V.

Si provi che

$$(f(z_1), \ldots, f(z_{n-h}))$$

è una base di $\mathrm{Im}\ f$. ■

Esercizio: Sia K una campo, V, W spazi vettoriali su K, e sia

$$f : V \to W$$

una applicazione lineare. Si provino gli asserti:

- se
$$\dim V = 5, \quad \dim W = 3 \ ,$$
allora f non è iniettiva;
- se
$$\dim V = 7, \quad \dim W = 11 \ ,$$
allora f non è surgettiva;
- se
$$\dim V = 13$$
e f è bigettiva, allora W è di tipo finito e
$$\dim W = 13 \ .$$

Si generalizzino tali risultati.

3.2.3 Teorema (per la costruzione di tutte le applicazioni lineari)**:** Sia V di tipo finito, e sia
$$\dim V = n \neq 0 \ .$$
Siano
$$\begin{array}{ll} (v_1, \ldots, v_n) & \text{una base di } V \\ (w_1, \ldots, w_n) & \text{una famiglia qualsiasi di elementi di } V \ . \end{array}$$
Allora $\exists_1$ applicazione
$$f : V \to W$$
verificante le proprietà:

- f è lineare,
- per $j = 1, \ldots, n$ si ha
$$f(v_j) = w_j \ .$$

Cenno. Si ponga
$$\mathscr{V} = (v_1, \ldots, v_n) \ .$$
Si consideri la applicazione
$$\varphi : V \to W$$
definita come segue: per $\forall v \in V$,

- si consideri la colonna
$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in K^n$$
tale che
$$v \equiv_{\mathscr{V}} a$$
- si ponga
$$\varphi(v) = a_1 w_1 + \cdots + a_n w_n \in W \ .$$

Si verifichi che:

- l'applicazione
$$\varphi : V \to W$$
è lineare, e per $\forall j = 1, \ldots, n$ si ha
$$\varphi(v_j) = w_j \ ;$$

- se
$$f : V \to W$$
è lineare, e per $\forall j = 1, \dots, n$ si ha
$$f(v_j) = w_j \quad ,$$
allora per $\forall v \in V$ si ha $f(v) = \varphi(v)$.

■

Eserizio: Si considerino tutte le applicazioni
$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$
tali che
$$f\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

- si diano infiniti esempi di tali applicazioni;
- si provi che tra tali applicazioni ne esiste una sola che sia lineare;
  Cenno. Si osservi che
$$\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$
  è una base di $\mathbb{R}^2$, e si applichi il Teorema 3.2.3. ■

Sia
$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$
l'unica applicazione lineare tale che
$$f\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} \quad ;$$

- per $\forall x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ si calcoli
$$f(x) = f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ? \\ ? \\ ? \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad ;$$
- si determinino
$$\ker f, \quad \text{Im f} \quad ,$$
  loro basi e le loro dimensioni;

- si determini l'insieme

$$\left\{x \in \mathbb{R}^2 : f(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \;;$$

- si determini l'insieme

$$\left\{x \in \mathbb{R}^2 : f(x) = \begin{pmatrix} 9 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix}\right\} \;;$$

- si verifichi che

$$\dim \mathbb{R}^2, \quad \dim(\ker f), \quad \dim(\mathrm{Im}\ f)$$

  rispettano il Teorema della dimensione 3.2.2.

3.3 La categoria degli spazi vettoriali

Sia K un campo.

Per ogni diagramma:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ & & \downarrow g \\ & & Z \end{array}$$

ove:

- ∘ V, W, Z sono spazi vettoriali su K,
- ∘ f, g sono applicazioni lineari,

si consideri il prodotto di composizione

$$V \xrightarrow{gf} Z \;,$$

ossia l'applicazione definita da: *per* $\forall v \in V$ *si ha*

$$(gf)(v) = g(f(v)) \;;$$

si verifichi che:

- ∘ gf è una applicazione lineare,

- ∘ il diagramma

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ & gf \searrow & \downarrow g \\ & & Z \end{array}$$

è *commutativo,* nel senso che, per $\forall v \in V$,

"trasformare v seguendo il lato orizzontale e poi il verticale"

"trasformare v seguendo il lato diagonale"

sono due operazioni che forniscono lo stesso risultato in Z.

Per ogni spazio vettoriale V su K, si indica con

$$\iota_V : V \to V$$

l'*applicazione identica di* V, ossia l'applicazione definita da: *per* $\forall v \in V$ *si ha*

$$\iota_V(v) = v \ :$$

ovviamente ι_V è una applicazzione lineare. Si verifichi che per ogni applicazione lineare

$$f : V \to W$$

si ha che i diagrammi

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ & f \searrow & \downarrow \iota_W \\ & & W \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ \iota_V \uparrow & \nearrow f & \\ V & & \end{array}$$

sono commutativi, ossia che

$$\iota_W f = f \qquad f \iota_V = f \ .$$

Sia $\mathscr{K}$ l'insieme di tutti gli spazi vettoriali su K:

- per ogni coppia $(V, W) \in \mathscr{K} \times \mathscr{K}$ si ponga

$$\text{Hom } (V, W) = \left\{ f : V \to W : f \text{ lineare} \right\}$$

(le applicazioni lineari da V in W, saranno chiamate gli *omomorfismi* di V in W),

- per ogni terna $(V, W, Z) \in \mathscr{K} \times \mathscr{K} \times \mathscr{K}$ si ha l'applicazione

$$\text{Hom } (W, Z) \times \text{Hom } (V, W) \to \text{Hom } (V, Z)$$

definita da

$$(g, f) \to gf \ ,$$

ove gf è il prodotto di composizione.

3.3.1 Definizione: Si consideri l'insieme $\mathscr{K}$, dotato degli insiemi di omomorfismi $\operatorname{Hom}(V, W)$, e dell'operazione di composizione tra omomorfismi.

Siccome l'operazione di composizione tra omomorfismi è *associativa* ed ammette *elementi neutri*, ossia:

- per ogni terna di omomorfismi
$$h : Z \to T, \quad g : W \to Z, \quad f : V \to W \ ,$$
si ha (verifica ovvia)
$$h(gf) = (hg)f \quad ,$$
- per ogni omomorfismo
$$f : V \to W \ ,$$
si ha:
  - $\iota_V \in \operatorname{Hom}(V, V)$
  - $\iota_W \in \operatorname{Hom}(W, W)$
  - $f\iota_V = f, \quad \iota_W f = f$

allora si dice che $\mathscr{K}$ è una *categoria*, e precisamente la *categoria degli spazi vettoriali su* K.

3.3.2 Definizione: Siano $V, W \in \mathscr{K}$; si consideri l'insieme
$$\operatorname{Hom}(V, W) \ .$$
In $\operatorname{Hom}(V, W)$ si considerano le operazioni definite da:

- per ogni coppia di omomorfismi
$$f, g : V \to W \ ,$$
si indica con
$$f + g : V \to W$$
l'applicazione definita da: *per* $\forall v \in V$ *si ha*
$$(f + g)(v) = f(v) + g(v) \ ;$$
- per ogni omomorfismo
$$f : V \to W \ ,$$
e per ogni
$$\lambda \in K \ ,$$
si indica con
$$\lambda f : V \to W$$
l'applicazione definita da: *per* $\forall v \in V$ *si ha*
$$(\lambda f)(v) = \lambda f(v) \ ;$$

si verifichi che:

- $f+g,\ \lambda f \in \mathrm{Hom}(V,W)$, ossia che
$$f+g,\ \lambda f$$
sono applicazioni lineari;
- $\mathrm{Hom}(V,W)$, con tali operazioni, è uno spazio vettoriale su K .

Come opera l'elemento neutro
$$0 : V \to W$$
rispetto alla somma in $\mathrm{Hom}(V,W)$? Sia $f \in \mathrm{Hom}(V,W)$; come opera l'opposto
$$-f : V \to W$$
di f in $\mathrm{Hom}(V,W)$?

3.3.3 Osservazione: Siano
$$V, W, Z \in \mathscr{K} \ .$$
Si provi che per
$$\forall f,g \in \mathrm{Hom}(V,W), \quad \forall h,k \in \mathrm{Hom}(W,Z), \quad \forall \lambda \in K$$
si ha:
$$\begin{cases} h(f+g) = hf + hg \\ h(\lambda f) = \lambda(hf) \end{cases} \qquad \begin{cases} (h+k)f = hf + kf \\ (\lambda h)f = \lambda(hf) \end{cases}$$

Il sussistere di tali uguaglianze si esprime dicendo che il prodotto di composizione tra omomorfismi è *lineare sia a destra che a sinistra.*

Esercizio: Sia $K = \mathbb{R}$. Si considerino le applicazioni
$$f,g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \qquad h,k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$$
definite da:
$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 - 3x_2 \\ 3x_1 + 4x_2 \\ 2x_1 - 5x_2 \end{pmatrix}, \quad g\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x_1 - 2x_2 \\ 3x_1 - 5x_2 \\ 4x_1 - 6x_2 \end{pmatrix}$$
$$h\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 - 3x_2 - 4x_3 \\ 3x_1 + 4x_2 - 6x_3 \end{pmatrix},$$
$$k\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x_1 - 2x_2 - 2x_3 \\ 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 \end{pmatrix};$$

- si provi che

$$f, g \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3), \quad h, k \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$$

- si calcolino:

$$(2f - 7g)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad (-3h + 2k)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$hf\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad fh\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \;;$$

- ha senso calcolare:

$$fg\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} ?$$

3.3.4 Definizione-osservazione: Sia

$$V \in \mathscr{K} \ .$$

Gli elementi di

$$\mathrm{Hom}(V, V) \ ,$$

ossia le applicazioni lineari

$$f : V \to V \ ,$$

si dicono gli *endomorfismi* di V; l'insieme $\mathrm{Hom}(V, V)$ si denota con

$$\mathrm{End}\ V \ .$$

- Si osservi che per $\forall f, g \in \mathrm{End}\ V$ e per $\forall \lambda \in K$ si ha

$$\begin{cases} f + g & \in & \mathrm{End}\ V \\ fg & \in & \mathrm{End}\ V \\ \lambda f & \in & \mathrm{End}\ V \end{cases} \;;$$

- si ricordi che $\mathrm{End}\ V$ con le operazioni

$$+, \ \lambda\cdot$$

  è uno spazio vettoriale su K;
- si provi che $\mathrm{End}\ V$ con le operazioni

$$+, \ \cdot$$

  è un anello con identità;

- chi è l'identità di End V ?
- si ricordi che per $\forall f, g \in \text{End } V$ e per $\forall \lambda \in K$ si ha

$$(\lambda f)g = f(\lambda g) = \lambda(fg)$$

Esercizio: Sia $K = \mathbb{R}$; si consideri l'anello

$$\text{End } \mathbb{R}^2 \ .$$

Sia

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

l'applicazione definita da:

$$f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\sqrt{2}/2)x_1 - (\sqrt{2}/2)x_2 \\ (\sqrt{2}/2)x_1 + (\sqrt{2}/2)x_2 \end{pmatrix} \ .$$

- Si provi che
$$f \in \text{End } \mathbb{R}^2 \ ;$$
- si provi che
$$f^2 = -\iota + \sqrt{2} f \ ;$$
(**Nota:** f^2 significa ff; ι significa $\iota_{\mathbb{R}^2}$, ossia l'identità di End $\mathbb{R}^2$.)
- in End $\mathbb{R}^2$ (si ricordi che si tratta di uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$) si consideri il sottospazio
$$F = \langle \iota, f \rangle \ ;$$
si provi che
$$\dim F = 2 \ ;$$
- siano
$$c, d \in F \ ;$$
si provi che
$$c + d, \ cd \in F \ ;$$
- si provi che F è un campo;
- chi è f^{-1} , ossia l'inverso di f in F?
- si ponga
$$j = f^2 \ ;$$
si provino gli asserti:
  - $F = \langle \iota, j \rangle$,

- $j^2 = -\iota$,
- l'applicazione
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & F \\ a+bi & \to & a\iota + bj \end{array}$$
è bigettiva, trasforma somme in $\mathbb{C}$ in somme in F, prodotti in $\mathbb{C}$ in prodotti in F.

  (**Nota:** L'ultimo risultato si esprime dicendo che l'applicazione indicata è un *isomorfismo di campi*, e che il campo F è *isomorfo* al campo complesso $\mathbb{C}$.)

3.4 Applicazione lineare canonica associata ad una matrice

Sia K un campo.

3.4.1 Definizione(di prodotto matrice-colonna)**:** Si consideri una matrice
$$A = (a_1, \dots, a_n) \in K^{m\times n} \ ,$$
ove
$$a_1, \dots, a_n \in K^m$$
sono le colonne di A.

Per
$$\forall x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n \ ,$$
si consideri la "combinazione lineare
$$\sum_{j=1}^{n} x_j a_j = x_1 a_1 + \cdots + x_n a_n \in K^n$$
delle n colonne di A con gli n numeri della colonna x"; tale combinazione lineare

- si dice il *prodotto della matrice $A \in K^{m\times n}$ per la colonna $x \in K^n$*,
- si denota con la sigla
$$Ax \ ;$$

si ha quindi:
$$Ax = (a_1, \dots, a_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{n} x_j a_j = x_1 a_1 + \cdots + x_n a_n \in K^m \ .$$

3.4.2 Definizione(di applicazione lineare canonica associata ad una matrice)**:** Si consideri una matrice

$$A = (a_1, \ldots, a_n) \in K^{m\times n} \ ,$$

ove

$$a_1, \ldots, a_n \in K^m$$

sono le colonne di A.

Si consideri l'applicazione

$$\mathscr{L}_A : K^n \to K^m$$

definita da: *per* $\forall x \in K^n$ *si ha*

$$\mathscr{L}_A(x) = Ax \in K^m \ .$$

Si verifichi che:

- $\mathscr{L}_A \in \mathrm{Hom}(K^n, K^m)$, ossia che

  $$\mathscr{L}_A : K^n \to K^m$$

  è una applicazione lineare;
- considerata la base canonica

  $$\mathscr{E} = (e_1, \ldots, e_n)$$

  di K^n, si ha:

  $$\mathscr{L}_A(e_1) = a_1, \ldots, \mathscr{L}_A(e_n) = a_n \ ;$$
- $\mathscr{L}_A$ è l'unico elemento di

  $$\mathrm{Hom}(K^n, K^m)$$

  che (vedi Teorema 3.2.3):

  $$\begin{array}{cccc} \text{trasforma} & e_1 \in K^n & \text{in} & a_1 \in K^m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \text{trasforma} & e_n \in K^n & \text{in} & a_n \in K^m \end{array}$$

L'applicazione

$$\mathscr{L}_A : K^n \to K^m$$

si dice l'*applicazione lineare canonica associata alla matrice* A.

Nota: La matrice A, nata come una banale tabella numerica, diviene portatrice di tutte le proprietà geometriche e algebriche della applicazione lineare canonica $\mathscr{L}_A$ associata ad A.

Esercizio: Si consideri il campo $\mathbb{R}$ e la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 8 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 4} \ ;$$

si consideri l'applicazione lineare canonica

$$\mathscr{L}_A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$$

associata ad A.

Si determinino:

- $\ker A$, ossia $\ker \mathscr{L}_A$;

  Cenno. Gli elementi di $\ker A$ sono quindi le soluzioni del sistema

  $$Ax = 0 \ ,$$

  ossia del sistema

  $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 8 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ ,$$

  ossia del sistema

  $$\begin{cases} 1x_1 + 2x_2 + 1x_3 + 3x_4 = 0 \\ 4x_1 + 8x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 1x_4 = 0 \end{cases} \ ,$$

  nell'incognita $x \in \mathbb{R}^4$. ■

- $\mathrm{Im}\ A$, ossia $\mathrm{Im}\ \mathscr{L}_A$;

  Cenno. Per il Teorema 3.2.1, si ha quindi

  $$\mathrm{Im}\ A = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

  ■

- $\dim(\ker A)$, ossia $\dim(\ker \mathscr{L}_A)$;

- $\dim(\mathrm{Im}\ A)$, ossia $\dim(\mathrm{Im}\ \mathscr{L}_A)$.

Si dica se

- A sia *iniettiva*, ossia se $\mathscr{L}_A$ sia iniettiva;

- A sia *surgettiva*, ossia se $\mathscr{L}_A$ sia surgettiva;
- A sia *bigettiva*, ossia se $\mathscr{L}_A$ sia bigettiva.

Si applichi ad A il Teorema della dimension 3.2.2

Cenno. Tale Teorema applicato a $\mathscr{L}_A$ dice che

$$\dim \mathbb{R}^4 = \dim (\mathrm{Im}\ \mathscr{L}_A) + \dim (\ker \mathscr{L}_A)\ \ ;$$

pertanto si ha:

$$\dim(\mathrm{Im}\ A) + \dim(\ker A) = 4\ .$$

■

3.4.3 Teorema(isomorfismo canonico matrici-applicazioni lineari)**:** Si consideri l'applicazione

$$\begin{array}{ccc} K^{m\times n} & \to & \mathrm{Hom}(K^n, K^m) \\ A & \to & \mathscr{L}_A \end{array}$$

Si provi che:

- tale applicazione è bigettiva;
- per
$$\forall A, B \in K^{m\times n}, \quad \forall \lambda \in K$$
  si ha:
$$\begin{cases} \mathscr{L}_{A+B} = \mathscr{L}_A + \mathscr{L}_B \\ \mathscr{L}_{\lambda A} = \lambda \mathscr{L}_A \end{cases}$$

L'applicazione

$$\begin{array}{ccc} K^{m\times n} & \to & \mathrm{Hom}(K^n, K^m) \\ A & \to & \mathscr{L}_A \end{array}$$

è pertanto un *isomorfismo di spazi vettoriali.* Tale isomorfismo si dice l'*isomorfismo canonico* tra $K^{m\times n}$ e $\mathrm{Hom}(K^n, K^m)$.

3.5 Prodotto tra matrici

Sia K un campo.

Si considerino due matrici

$$A \in K^{m\times n}, \quad B \in K^{n\times q}\ ,$$

e siano

$$\mathscr{L}_A : K^n \to K^m, \quad \mathscr{L}_B : K^q \to K^n$$

le applicazioni lineari canoniche associate ad A, B.

Come visto nella Sezione 3.3, è definito il prodotto di composizione

$$\mathscr{L}_A\mathscr{L}_B : K^q \to K^m \ ,$$

e si ha:

$$\mathscr{L}_A\mathscr{L}_B \in \mathrm{Hom}(K^q, K^m) \ ;$$

si ha quindi il diagramma commutativo di applicazioni lineari:

$$\begin{array}{ccc} K^q & \xrightarrow{\mathscr{L}_B} & K^n \\ & \mathscr{L}_A\mathscr{L}_B \searrow & \downarrow \mathscr{L}_A \\ & & K^m \end{array}$$

3.5.1 Definizione(di prodotto tra matrici)**:** Per il Teorema 3.4.3 esiste una ed una sola matrice

$$P \in K^{m\times q}$$

tale che

$$\mathscr{L}_P = \mathscr{L}_A\mathscr{L}_B \ .$$

Si ponga

$$B = (\underbrace{b_1, \ \dots \ , b_q}_{\text{noti; } \forall b_j \in K^n}), \qquad P = (\underbrace{p_1, \qquad \dots \qquad , p_q}_{\text{da calcolare; } \forall p_j \in K^m}) \ ;$$

- per il Teorema 3.4.3, per $\forall e_j$ della base canonica di K^q si ha

$$p_j = \mathscr{L}_P(e_j) = (\mathscr{L}_A\mathscr{L}_B)(e_j) = \mathscr{L}_A\left(\mathscr{L}_B(e_j)\right) = \mathscr{L}_A(b_j) = Ab_j$$

- si ha quindi

$$P = (Ab_1, \dots, Ab_q) \ .$$

La matrice

$$P \in K^{m\times q}$$

si dice il *prodotto* tra la matrice A e la matrice B, e si denota con

$$AB \in K^{m\times q} \ .$$

Con tale definizione, si ha quindi

$$\begin{aligned} &AB = A(b_1, \dots, b_q) = (Ab_1, \dots, Ab_q) \\ &\mathscr{L}_A\mathscr{L}_B = \mathscr{L}_{AB} \ . \end{aligned}$$

Attenzione: Il prodotto

$$AB$$

è stato definito *solo* sotto le ipotesi

$$A \in K^{q\times \mathbf{n}}, \quad B \in K^{\mathbf{n}\times m} \ .$$

Esempi e complementi: Sia K un campo:

- Siano
$$A = (a_1, a_2) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \in K^{3\times 2}$$
$$B = (b_1, b_2, b_3, b_4) = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \end{pmatrix} \in K^{2\times 4} \ ;$$
si ha:
$$AB = (Ab_1, Ab_2, Ab_3, Ab_4) =$$
$$(b_{11}a_1 + b_{21}a_2 \ , \dots , \ b_{14}a_1 + b_{24}a_2) =$$
$$\begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & \cdots & a_{11}b_{14} + a_{12}b_{24} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & \cdots & a_{21}b_{14} + a_{22}b_{24} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} & \cdots & a_{31}b_{14} + a_{32}b_{24} \end{pmatrix} \in K^{3\times 4}$$
- Siano
$$A = (a_1, \dots , a_n) \in K^{m\times n}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in K^n = K^{n\times 1} \ ;$$
il simbolo
$$Ab$$
è ora di interpretazione ambigua, infatti può essere interpretato
  - ◦ come prodotto della matrice $A \in K^{m\times n}$ per la colonna $b \in K^n$, secondo la Definizione 3.4.1: in tal caso significa
$$b_1a_1 + \cdots + b_na_n \in K^m$$
  - ◦ come prodotto della matrice $A \in K^{m\times n}$ per la matrice $b \in K^{n\times 1}$, secondo la Definizione 3.5.1: in tal caso significa
$$b_1a_1 + \cdots + b_na_n \in K^{m\times 1} = K^m$$

  si conclude che tale ambiguità di interpretazione è irrilevante agli effetti del risultato.
- **3.5.2** Siano
$$a = (a_1, \dots , a_n) \in K^{1\times n} \quad \forall a_j \in K$$
$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in K^{n\times 1} \qquad \forall b_j \in K \ ;$$

si calcoli

$$ab = (a_1, \dots, a_n) \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in K^{1\times 1} = K$$

e si verifichi che

$$ab = \sum_{j=1}^{n} a_j b_j = a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n \ .$$

- **3.5.3** Siano

$$a = (a_1, \dots, a_n) \in K^{1\times n} \quad \forall a_j \in K$$
$$B = (b_1, \dots, b_q) \in K^{n\times q} \quad \forall b_j \in K^{n\times 1} = K^n \ ;$$

si ha

$$aB = (ab_1, \dots, ab_q) \in K^{1\times q} \ ;$$

se ne deduca che, posto

$$B = \begin{pmatrix} b'_1 \\ \vdots \\ b'_n \end{pmatrix} \in K^{n\times q} \quad \forall b'_j \in K^{1\times q} \ ,$$

si ha:

$$aB = \sum_{j=1}^{n} a_j b'_j = a_1 b'_1 + \cdots + a_n b'_n \ ,$$

ossia che aB è “la combinazione lineare delle n righe di B con gli n numeri della riga a”.

- **3.5.4** Siano

$$A = (a_1, \dots, a_n) = \begin{pmatrix} a'_1 \\ \vdots \\ a'_m \end{pmatrix} \in K^{m\times n}$$

$$B = (b_1, \dots, b_q) = \begin{pmatrix} b'_1 \\ \vdots \\ b'_n \end{pmatrix} \in K^{n\times q} \ ;$$

si verifichi che si ha:

$$AB = \\ (Ab_1, \dots, Ab_q) = \begin{pmatrix} a'_1 b_1 & & a'_1 b_q \\ \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots \\ a'_m b_1 & & a'_m b_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a'_1 B \\ \vdots \\ a'_m B \end{pmatrix} \ .$$

• Siano

$$A = (a_1, a_2) = \begin{pmatrix} a'_1 \\ a'_2 \\ a'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \in K^{3\times 2}$$

$$B = (b_1, b_2, b_3, b_4) = \begin{pmatrix} b'_1 \\ b'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \end{pmatrix} \in K^{2\times 4} \ ;$$

si ha:

$$AB =$$

$$(Ab_1, Ab_2, Ab_3, Ab_4) = (b_{11}a_1 + b_{21}a_2 \ , \dots , \ b_{14}a_1 + b_{24}a_2) =$$

$$\begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & \cdots & a_{11}b_{14} + a_{12}b_{24} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & \cdots & a_{21}b_{14} + a_{22}b_{24} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} & \cdots & a_{31}b_{14} + a_{32}b_{24} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a_{11}b'_1 + a_{12}b'_2 \\ a_{21}b'_1 + a_{22}b'_2 \\ a_{31}b'_1 + a_{32}b'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a'_1 B \\ a'_2 B \\ a'_3 B \end{pmatrix} \in K^{3\times 4}$$

Altri esempi:

▼ Siano

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} \in K^m = K^{m\times 1}, \quad b = (b_1, \dots , b_n) \in K^{1\times n}$$

si ha

$$ab = \begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_mb_1 & a_mb_2 & \cdots & a_mb_n \end{pmatrix} \in K^{m\times n}$$

⧫ Sia $A = (a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbb{C}^{7\times 4}$; si ha

$$A \begin{pmatrix} 1 & 3i \\ i & 2 \\ 3 & 1 \\ 2i & 4i \end{pmatrix} =$$

$$(a_1 + ia_2 + 3a_3 + 2ia_4, \ 3ia_1 + 2a_2 + a_3 + 4ia_4) \in K^{7\times 2}$$

▲ Sia $B = \begin{pmatrix} b'_1 \\ b'_2 \\ b'_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 9}$; si ha

$$\begin{pmatrix} 1+i & 3 & 2 \\ 2i & i & 1-i \end{pmatrix} B =$$

$$\begin{pmatrix} (1+i)b'_1 + 3b'_2 + 2b'_3 \\ 2ib'_1 + ib'_2 + (1-i)b'_3 \end{pmatrix} \in K^{2\times 9}$$

Esercizi:

▼ Calcolare

▽ $\begin{pmatrix} 1 & 2+i & 2i & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3-i \\ 2+i \\ -2i \\ 1+i \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{1\times 1} = \mathbb{C}$

◊ $\begin{pmatrix} 1 & 2+i & 2i & 3 \\ 2i & 3 & 1+i & 3-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3-i \\ 2+i \\ -2i \\ 1+i \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 1} = \mathbb{C}^2$

◊ $\begin{pmatrix} 1 & 2+i & 2i & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3-i & 3i \\ 2+i & 2+i \\ -2i & 1-i \\ 1+i & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{1\times 2}$

◊ $\begin{pmatrix} 1 & 2+i & 2i & 3 \\ 2i & 3 & 1+i & 3-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3-i & 3i \\ 2+i & 2+i \\ -2i & 1-i \\ 1+i & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$

◊ $\begin{pmatrix} 3-i & 3i \\ 2+i & 2+i \\ -2i & 1-i \\ 1+i & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2+i & 2i & 3 \\ 2i & 3 & 1+i & 3-i \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{4\times 4}$

△ $\begin{pmatrix} 3-i \\ 2+i \\ -2i \\ 1+i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2+i & 2i & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{4\times 4}$

♦ Siano

$$A = \begin{pmatrix} 1+i & 3+i & 1+2i \\ 1-i & 3-i & 1-2i \\ 2+i & 3-2i & 3-i \\ 1-i & 2+i & 1+3i \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{4\times 3}$$

$$B = \begin{pmatrix} i & 3 & 1 & 3 & 2 & i \\ 1 & 2i & -1 & 3 & -i & i \\ 1 & 3i & 2i & i & i & -i \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 6}$$

e sia

$$C = AB \in \mathbb{C}^{4\times 6}$$

Calcolare

$$c_4, \; c'_3, \; c_{2,5} \qquad Ab_3, \; a'_4B, \; a'_3b_5$$

▲ Sia

$$A = (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) = \begin{pmatrix} a'_1 \\ a'_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 5}$$

Indicare matrici B_1, B_2, B_3, B_4 tali che

$$AB_1 = (a_3, a_2, a_2) \quad AB_2 = (0, a_1 + a_5, (1+i)a_4, 0)$$

$$B_3A = \begin{pmatrix} a'_3 \\ a'_1 \\ a'_2 \\ a'_3 \end{pmatrix} \qquad B_4A = \begin{pmatrix} (1+i)a'_1 + (1-i)a'_3 \\ 0 \\ a'_2 + ia'_3 \\ (2+i)a'_1 \end{pmatrix}$$

3.6 Prodotto tra matrici: proprietà

Sia K un campo.

Il prodotta tra matrici ad elementi in K verifica le proprietà seguenti:

associatività: siano

$$A \in K^{m\times n}, \quad B \in K^{n\times q}, \quad C \in K^{q\times p}$$

si verifichi che

▼ $AB \in K^{m\times q}, \quad C \in K^{q\times p}, \quad (AB)C \in K^{m\times p}$

♦ $A \in K^{m\times n}, \quad BC \in K^{n\times p}, \quad A(BC) \in K^{m\times p}$

▲ $(AB)C = A(BC)$

Cenno. Per la Definizione 3.5.1 si ha

$$\mathscr{L}_{(AB)C} = \mathscr{L}_{AB}\mathscr{L}_C = (\mathscr{L}_A\mathscr{L}_B)\,\mathscr{L}_C$$
$$\mathscr{L}_{A(BC)} = \mathscr{L}_A\mathscr{L}_{BC} = \mathscr{L}_A\,(\mathscr{L}_B\mathscr{L}_C) \;\;;$$

per l'associatività del prodotto di composizione tra funzioni si ha

$$(\mathscr{L}_A \mathscr{L}_B)\,\mathscr{L}_C = \mathscr{L}_A\,(\mathscr{L}_B \mathscr{L}_C)\ ;$$

se ne deduce che

$$\mathscr{L}_{(AB)C} = \mathscr{L}_{A(BC)}\ ;$$

per il Teorema 3.4.3 se ne deduce che

$$(AB)C = A(BC)\ .$$

■

esistenza elementi neutri: per $r = 1, 2, 3, \ldots$ si ponga

$$I_r = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = (e_1, e_2, \ldots, e_r) \in K^{r\times r}$$

ove

$$e_1,\ e_2,\ \ldots,\ e_r$$

sono gli elementi della base canonica di K^r;

si verifichi che per $\forall A \in K^{m\times n}$ si ha

$$I_m A = A, \qquad A I_n = A$$

tenuto conto di tali uguaglianze la matrice I_r si dice la matrice *identica* di ordine r

linearità a destra: siano

$$A \in K^{m\times n}, \quad B, C \in K^{n\times q}, \quad \lambda \in K$$

si verifichi che

▼ $A(B + C) = AB + AC \in K^{m\times q}$

Cenno. Per la Definizione 3.5.1 e per il Teorema 3.4.3 si ha

$$\mathscr{L}_{A(B+C)} = \mathscr{L}_A \mathscr{L}_{(B+C)} = \mathscr{L}_A\,(\mathscr{L}_B + \mathscr{L}_C)$$
$$\mathscr{L}_{(AB+AC)} = \mathscr{L}_{AB} + \mathscr{L}_{AC} = \mathscr{L}_A \mathscr{L}_B + \mathscr{L}_A \mathscr{L}_C\ ;$$

per l'Osservazione 3.3.3 si ha

$$\mathscr{L}_A\,(\mathscr{L}_B + \mathscr{L}_C) = \mathscr{L}_A \mathscr{L}_B + \mathscr{L}_A \mathscr{L}_C\ ;$$

se ne deduce che

$$\mathscr{L}_{A(B+C)} = \mathscr{L}_{AB+AC}\ ;$$

per il Teorema 3.4.3 se ne deduce che

$$A(B + C) = AB + AC\ .$$

■

◆ $A(\lambda B) = \lambda(AB) \in K^{m\times q}$

Cenno. Per la Definizione 3.5.1 e per il Teorema 3.4.3 si ha

$$\mathscr{L}_{A(\lambda B)} = \mathscr{L}_A \mathscr{L}_{(\lambda B)} = \mathscr{L}_A\left(\lambda \mathscr{L}_B\right)$$
$$\mathscr{L}_{\lambda(AB)} = \lambda \mathscr{L}_{AB} = \lambda\left(\mathscr{L}_A \mathscr{L}_B\right)\ ;$$

per l'Osservazione 3.3.3 si ha

$$\mathscr{L}_A\left(\lambda \mathscr{L}_B\right) = \lambda\left(\mathscr{L}_A \mathscr{L}_B\right)\ ;$$

se ne deduce che

$$\mathscr{L}_{A(\lambda B)} = \mathscr{L}_{\lambda(AB)}\ ;$$

per il Teorema 3.4.3 se ne deduce che

$$A(\lambda B) = \lambda(AB)\ .$$

■

linearità a sinistra: siano

$$A, B \in K^{m\times n},\quad C \in K^{n\times q},\quad \lambda \in K$$

si verifichi che

▼ $(A + B)C = AC + BC \in K^{m\times q}$

◆ $(\lambda A)C = \lambda(AC) \in K^{m\times q}$

Le considerazioni che seguono provano che il prodotto tra matrici *non è* commutativo

▼ siano $A \in K^{3\times5}, B \in K^{5\times9}$

  ▽ è definito il prodotto $AB \in K^{3\times9}$

  △ non è definito il prodotto BA

◆ siano $A \in K^{3\times5}, B \in K^{5\times3}$

  ▽ è definito il prodotto $AB \in K^{3\times3}$

  ◊ è definito il prodotto $BA \in K^{5\times5}$

  △ ovviamente si ha $AB \neq BA$

▲ siano $A \in K^{3\times3}, B \in K^{3\times3}$

  ▽ sono definiti i prodotti

$$AB,\ BA \in K^{3\times3}$$

◊ per

$$A = I_3, \ \forall B$$

si ha $AB = BA$

△ per

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

si ha $AB \neq BA$

Esercizi:

▼ siano $A, B, C \in K^{2\times4}$, $X, Y, Z \in K^{4\times3}$; si esegua l'operazione

$$\big((2+i)A + (3-i)B - (2-3i)C\big)\cdot$$
$$\big((2-i)X + (3+i)Y - (2+3i)Z\big) \in \mathbb{C}^{2\times3}$$

⧫ Siano $A, B \in \mathbb{C}^{4\times4}$; si calcolino

$$(A+B)^2 = (A+B)(A+B)$$
$$(A+B)^3 = (A+B)(A+B)(A+B)$$
$$(A+B)(A-B)$$
$$(A-iB)(A+iB)(A^2-B^2)$$

⧫ Siano $A, B \in \mathbb{C}^{4\times4}$ due matrici che *commutano*, ossia tali che

$$AB = BA$$

si calcolino

$$(A+B)^2 = (A+B)(A+B)$$
$$(A+B)^3 = (A+B)(A+B)(A+B)$$
$$(A+B)(A-B)$$
$$(A-iB)(A+iB)(A^2-B^2)$$

⧫ sia $A \in \mathbb{C}^{4\times4}$ e sia $I = I_4$; si verifichi che le due matrici

$$\big((1+i)I + (2-i)A + iA^2\big), \quad \big((1+i)I + iA^3\big)$$

commutano.

▲ In $\mathbb{C}^{2\times 2}$ siano

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si calcolino tutti i prodotti

$$E_{rs}E_{\lambda\mu}$$

Se ne deducano esempi di coppie di matrici di $\mathbb{C}^{2\times 2}$ che non commutano.

3.7 Trasposizione: gli operatori T e $*$

Sia K un campo.

Data una matrice

$$A = (a_{rs}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \end{pmatrix} \in K^{3\times 5}$$

si indica con

$$A^T \in K^{5\times 3}$$

la matrice definita da

$$A^T = (\alpha_{ij}) = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} \\ \alpha_{51} & \alpha_{52} & \alpha_{53} \end{pmatrix} \qquad \text{ove} \quad \alpha_{ij} = a_{ji}$$

ossia da

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} \\ a_{15} & a_{25} & a_{35} \end{pmatrix}$$

la matrice A^T si dice la *trasposta* di A.

Si provi che

▼ per $\forall A, B \in K^{m\times n}$, $\forall \lambda \in K$ si ha

▽ $(A + B)^T = A^T + B^T$

◊ $(\lambda \cdot A)^T = \lambda \cdot A^T$

△ $\left(A^T\right)^T = A$

▲ per $\forall A \in K^{m\times n},\ B \in K^{n\times q}$ si ha

▽ $AB \in K^{m\times q}$ e quindi

$$(AB)^T \in K^{q\times m}$$

◊ $B^T \in K^{q\times n},\quad A^T \in K^{n\times m}$ e quindi

$$B^T A^T \in K^{q\times m}$$

△ $(AB)^T = B^T A^T$

Cenno. Si ha

$$\begin{array}{lcll} AB & = & (c_{rs}) & \text{ove} \quad c_{rs} = a'_r b_s \\ (AB)^T & = & (d_{ij}) & \text{ove} \quad d_{ij} = c_{ji} = a'_j b_i \\ B^T A^T & = & (h_{ij}) & \text{ove} \quad h_{ij} = (b_i)^T \cdot \left(a'_j\right)^T = a'_j b_i \end{array}$$

■

Sia $K = \mathbb{C}$. Data una matrice

$$C = (c_{rs}) = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & c_{35} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 5}$$

▼ si pone

$$\overline{C} = (\overline{c}_{rs}) = \begin{pmatrix} \overline{c}_{11} & \overline{c}_{12} & \overline{c}_{13} & \overline{c}_{14} & \overline{c}_{15} \\ \overline{c}_{21} & \overline{c}_{22} & \overline{c}_{23} & \overline{c}_{24} & \overline{c}_{25} \\ \overline{c}_{31} & \overline{c}_{32} & \overline{c}_{33} & \overline{c}_{34} & \overline{c}_{35} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 5}$$

$$C^* = \left(\overline{C}\right)^T = \overline{(C^T)} = \begin{pmatrix} \overline{c}_{11} & \overline{c}_{21} & \overline{c}_{31} \\ \overline{c}_{12} & \overline{c}_{22} & \overline{c}_{32} \\ \overline{c}_{13} & \overline{c}_{23} & \overline{c}_{33} \\ \overline{c}_{14} & \overline{c}_{24} & \overline{c}_{34} \\ \overline{c}_{15} & \overline{c}_{25} & \overline{c}_{35} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{5\times 3}$$

♦ la matrice $\overline{C}$ si dice la *coniugata* di C

▲ la matrice C^* si dice la *trasposta coniugata* di C

Si verifichi che

▼ per $\forall C, D \in \mathbb{C}^{m\times n}$ e per $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ si ha

$$(C+D)^{-} = \overline{C} + \overline{D} \qquad (\lambda \cdot C)^{-} = \overline{\lambda} \cdot \overline{C} \qquad \left(\overline{C}\right)^{-} = C$$
$$(C+D)^{*} = C^{*} + D^{*} \qquad (\lambda \cdot C)^{*} = \overline{\lambda} \cdot C^{*} \qquad \left(C^{*}\right)^{*} = C$$

▲ per $\forall C \in \mathbb{C}^{m\times n},\ D \in \mathbb{C}^{n\times q}$ si ha

$$(CD)^{-} = \overline{C} \cdot \overline{D} \qquad (CD)^{*} = D^{*}C^{*}$$

Esercizi:

▼ Sia

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1+2i \\ i & 1-i \\ 2i & 3 \\ 1+i & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{4\times 2}$$

Si calcolino

$$\overline{C},\ \ C^{T},\ \ \big((2+3i)C\big)^{-},\ \ \big((2+3i)C\big)^{*}$$

♦ Siano

$$C \in \mathbb{C}^{m\times n},\ \ D \in \mathbb{C}^{n\times q},\ \ H \in \mathbb{C}^{q\times p}$$

Si provi che

$$(CDH)^{T} = H^{T}D^{T}C^{T},\quad (CDH)^{*} = H^{*}D^{*}C^{*}$$

Cenno. $(CDH)^{T} = \big(C(DH)\big)^{T} = (DH)^{T}C^{T} = \cdots$ ■

▲ Sia $C \in \mathbb{C}^{m\times n}$; si verifichi che

$$\left(C^{*}\right)^{T} = \overline{C},\ \ \left(C^{*}\right)^{-} = C^{T}$$

3.8 Matrici reali simmetriche e complesse hermitiane

Si consideri $\mathbb{R}^{n\times n}$ come spazio vettoriale su $\mathbb{R}$.

Le due Definizioni seguenti introducono le nozioni di *matrici reali simmetriche ed emisimmetriche.*

3.8.1 Definizione: Una matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ si dice *simmetrica* se

$$A^T = A \ .$$

Si osservi che:

- $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ è simmetrica
  - se e solo se
  $$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \ ,$$
  - se e solo se $\forall a_{rs} = a_{sr}$,
  - se e solo se
  $$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{21} & a_{22} & a_{32} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \ ,$$
  - se e solo se A è combinazione lineare della famiglia
  $$\Bigg(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ ,$$
  $$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \ ,$$
  $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Bigg) \ .$$

Denotiamo con

$$\mathscr{S}_n$$

l'insieme delle matrici simmetriche di $\mathbb{R}^{n\times n}$; si provi per esercizio che:

- $\mathscr{S}_n$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^{n\times n}$,
- $\dim \mathscr{S}_n = 1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{(n+1)n}{2}$.

3.8.2 Definizione: Una matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ si dice *emisimmetrica* se

$$A^T = -A \ .$$

Si osservi che:

- $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ è emisimmetrica
  - se e solo se
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & -a_{22} & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & -a_{33} \end{pmatrix} ,$$
  - se e solo se $\forall a_{rs} = -a_{sr}$,
  - se e solo se
$$A = \begin{pmatrix} 0 & -a_{21} & -a_{31} \\ a_{21} & 0 & -a_{32} \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{pmatrix} ,$$
  - se e solo se A è combinazione lineare della famiglia
$$\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} , \right.$$
$$\left. \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right) .$$

Denotiamo con
$$\mathscr{S}'_n$$
l'insieme delle matrici emisimmetriche di $\mathbb{R}^{n\times n}$; si provi per esercizio che:

- $\mathscr{S}'_n$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^{n\times n}$,
- $\dim \mathscr{S}'_n = 1 + 2 + \cdots + (n-1) = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

Il Teorema seguente prova che $\mathbb{R}^{n\times n}$ è somma diretta di $\mathscr{S}_n$ e di $\mathscr{S}'_n$, e dice come si rappresenti una qualsiasi matrice di $\mathbb{R}^{n\times n}$ in somma di una simmetrica e di una emisimmetrica.

3.8.3 Teorema: Sussistono gli asserti:

a) $\mathbb{R}^{n\times n} = \mathscr{S}_n \oplus \mathscr{S}'_n$,

b) per $\forall A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ si ha:
   - $\frac{1}{2}(A + A^T) \in \mathscr{S}_n, \ \ \frac{1}{2}(A - A^T) \in \mathscr{S}'_n$
   - $A = \frac{1}{2}(A + A^T) + \frac{1}{2}(A - A^T)$.

Cenno. Si verifichi direttamente b); ne segue $\mathbb{R}^{n\times n} = \mathscr{S}_n + \mathscr{S}'_n$. Si provi per esercizio che

$$\mathscr{S}_n \cap \mathscr{S}'_n = \{0\} \ ;$$

ne segue che la somma $\mathscr{S}_n + \mathscr{S}'_n$ è diretta. ∎

Si consideri $\mathbb{C}^{n\times n}$ come spazio vettoriale su $\mathbb{C}$.

Le due Definizioni seguenti introducono le nozioni di *matrici complesse hermitiane ed emihermitiane.*

3.8.4 Definizione: Una matrice $C \in \mathbb{C}^{n\times n}$ si dice *hermitiana* se

$$C^* = C \ .$$

Si osservi che:

- $C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ è hermitiana
  - se e solo se
  $$\begin{pmatrix} \overline{c}_{11} & \overline{c}_{21} & \overline{c}_{31} \\ \overline{c}_{12} & \overline{c}_{22} & \overline{c}_{32} \\ \overline{c}_{13} & \overline{c}_{23} & \overline{c}_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} \ ,$$
  - se e solo se $\forall c_{rs} = \overline{c}_{sr}$,
  - se e solo se
  $$C = \begin{pmatrix} c_{11} & \overline{c}_{21} & \overline{c}_{31} \\ c_{21} & c_{22} & \overline{c}_{32} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} \ ,$$
  con
  $$\begin{cases} c_{31} \in \mathbb{C} \\ c_{21}, c_{32} \in \mathbb{C} \\ c_{11}, c_{22}, c_{33} \in \mathbb{R} \end{cases} \ .$$

Denotiamo con

$$\mathscr{H}_n$$

l'insieme delle matrici hermitiane di $\mathbb{C}^{n\times n}$; si provi per esercizio che:

- $\mathscr{H}_n$ non è un sottospazio di $\mathbb{C}^{n\times n}$ considerato come spazio vettoriale su $\mathbb{C}$,
- per $\forall C_1, C_2 \in \mathscr{H}_n$ e per $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ si ha
$$C_1 + C_2, \ \alpha C_1 \in \mathscr{H}_n \ ,$$
- $\mathscr{H}_n$ è un sottospazio di $\mathbb{C}^{n\times n}$ considerato come spazio vettoriale su $\mathbb{R}$,

3.8.5 Definizione: Una matrice $C \in \mathbb{C}^{n\times n}$ si dice *emihermitiana* se

$$C^* = -C \ .$$

Si osservi che:

- $C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ è emihermitiana
  - se e solo se
  $$\begin{pmatrix} \overline{c}_{11} & \overline{c}_{21} & \overline{c}_{31} \\ \overline{c}_{12} & \overline{c}_{22} & \overline{c}_{32} \\ \overline{c}_{13} & \overline{c}_{23} & \overline{c}_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c_{11} & -c_{12} & -c_{13} \\ -c_{21} & -c_{22} & -c_{23} \\ -c_{31} & -c_{32} & -c_{33} \end{pmatrix} \ ,$$
  - se e solo se $\forall c_{rs} = -\overline{c}_{sr}$,
  - se e solo se
  $$C = \begin{pmatrix} c_{11} & -\overline{c}_{21} & -\overline{c}_{31} \\ c_{21} & c_{22} & -\overline{c}_{32} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} \ ,$$
  con
  $$\begin{cases} c_{31} \in \mathbb{C} \\ c_{21}, c_{32} \in \mathbb{C} \\ c_{11}, c_{22}, c_{33} \in i\mathbb{R} \end{cases}$$

Denotiamo con

$$\mathscr{H}'_n$$

l'insieme delle matrici emihermitiane di $\mathbb{C}^{n\times n}$; si provi per esercizio che:

- $\mathscr{H}'_n$ non è un sottospazio di $\mathbb{C}^{n\times n}$ considerato come spazio vettoriale su $\mathbb{C}$,
- per $\forall C_1, C_2 \in \mathscr{H}'_n$ e per $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ si ha
  $$C_1 + C_2, \ \alpha C_1 \in \mathscr{H}'_n \ ,$$
- $\mathscr{H}'_n$ è un sottospazio di $\mathbb{C}^{n\times n}$ considerato come spazio vettoriale su $\mathbb{R}$,

Il Teorema seguente prova che $\mathbb{C}^{n\times n}$, come spazio vettoriale su $\mathbb{R}$, è somma diretta di $\mathscr{H}_n$ e di $\mathscr{H}'_n$, e dice come si rappresenti una qualsiasi matrice di $\mathbb{C}^{n\times n}$ in somma di una hermitiana e di una emihermitiana.

3.8.6 Teorema: Si consideri $\mathbb{C}^{n\times n}$ come spazio vettoriale su $\mathbb{R}$.
Sussistono gli asserti:

a) $\mathbb{C}^{n\times n} = \mathscr{H}_n \oplus \mathscr{H}'_n$,

b) per $\forall C \in \mathbb{C}^{n\times n}$ si ha:

- $\circ$ $\frac{1}{2}(C+C^*) \in \mathscr{H}_n$, $\frac{1}{2}(C-C^*) \in \mathscr{H}'_n$
- $\circ$ $C = \frac{1}{2}(C+C^*) + \frac{1}{2}(C-C^*)$.

Cenno. Si verifichi direttamente b); ne segue $\mathbb{C}^{n\times n} = \mathscr{H}_n + \mathscr{H}'_n$. Si provi per esercizio che

$$\mathscr{H}_n \cap \mathscr{H}'_n = \{0\} \ ;$$

ne segue che la somma $\mathscr{H}_n + \mathscr{H}'_n$ è diretta. ■

Le considerazioni che seguono mostrano le relazioni che sussitono tra matrici complesse hermitiane ed emihermitiane, e matrici reali simmetriche ed emisimmetriche.

Si consideri $\mathbb{C}^{n\times n}$ come spazio vettoriale su $\mathbb{R}$; si verifichi che:

- $\mathbb{R}^{n\times n}$, $i\mathbb{R}^{n\times n}$ sono sottospazi di $\mathbb{C}^{n\times n}$;
- $$\begin{pmatrix} 2-3i & -1+4i & -2+i \\ 7+5i & 3-i & 3-4i \\ -4+i & 8-6i & 1-i \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 7 & 3 & 3 \\ -4 & 8 & 1 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} -3 & 4 & 1 \\ 5 & -1 & -4 \\ 1 & -6 & -1 \end{pmatrix} \ ;$$
- per $\forall C \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $\exists_1 A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tali che
$$C = A + iB \ ;$$
- $\mathbb{C}^{n\times n} = \mathbb{R}^{n\times n} \oplus i\mathbb{R}^{n\times n}$;
- $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C}^{n\times n} = 2 \cdot n^2 = 2 \cdot \dim_{\mathbb{C}} C^{n\times n}$;
- sia
$$C = A + iB \in \mathbb{C}^{n\times n} \ ;$$
si ha:
  - $\circ$ $C^* = A^T - iB^T$,
  - $\circ$ C è hermitiana $\Leftrightarrow \begin{cases} A \in \mathscr{S}_n \\ B \in \mathscr{S}'_n \end{cases}$,
  - $\circ$ C è emihermitiana $\Leftrightarrow \begin{cases} A \in \mathscr{S}'_n \\ B \in \mathscr{S}_n \end{cases}$,
- $\mathscr{H}_n = \mathscr{S}_n \oplus i\mathscr{S}'_n$, $\dim_{\mathbb{R}} \mathscr{H}_n = n^2$,

- $\mathscr{H}'_n = \mathscr{S}'_n \oplus i\mathscr{S}_n, \quad \dim_{\mathbb{R}} \mathscr{H}'_n = n^2$.

Nelle considerazioni precedenti abbiamo considerato $\mathbb{C}^{n\times n}$ sia come spazio vettoriale su $\mathbb{C}$ sia come spazio vettoriale su $\mathbb{R}$, ed abbiamo osservato che

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C}^{n\times n} = 2 \cdot \dim_{\mathbb{C}} C^{n\times n} \ ;$$

il Teorema seguente generalizza tali considerazioni ad un qualsiasi spazio vettoriale su $\mathbb{C}$ di tipo finito.

3.8.7 Teorema: Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{C}$ di tipo finito, e sia

$$\dim_{\mathbb{C}} V = k \ .$$

Sussistono gl asserti:

- Se
$$V = \{0\} \ ,$$
allora $\emptyset$ è una base di V sia come spazio vettoriale su $\mathbb{C}$ sia come spazio vettoriale su $\mathbb{R}$; ovviamente si ha
$$\dim_{\mathbb{R}} V = 2 \cdot \dim_{\mathbb{C}} V \ .$$

- Se
$$V \neq \{0\} \ ,$$
si consideri una base
$$(v_1, \ldots, v_k)$$
di V su $\mathbb{C}$; si ponga
$$w_1 = iv_1, \ldots, w_k = iv_k \ ;$$
si verifichi che
$$(v_1, w_1, \ldots, v_k, w_k)$$
è una base di V su $\mathbb{R}$;
se ne deduca che
$$\dim_{\mathbb{R}} V = 2 \cdot \dim_{\mathbb{C}} V \ .$$

3.9 L'anello $K^{n\times n}$ delle matrici quadrate

Sia K un campo. Si consideri l'insieme

$$K^{n\times n}$$

delle matrici quadrate di tipo $n \times n$.

Si osservi che per

$$\forall A, B \in K^{n\times n}, \quad \forall \lambda \in K$$

si ha

$$A+B, \quad AB, \quad \lambda A \quad \in K^{n\times n}$$

Si provi che

- $K^{n\times n}$, con le operazioni "+" e "$\cdot$", è un anello con identità

  (Posto $I = I_n$, per $\forall A \in K^{n\times n}$ si ha $IA = AI = A$)

- $K^{n\times n}$, con le operazioni "+" e "$\lambda\cdot$", è uno spazio vettoriale su K

- per $\forall A, B \in K^{n\times n}, \quad \forall \lambda \in K$ si ha

$$(\lambda A)B = A(\lambda B) = \lambda(AB) .$$

L'anello

$$K^{n\times n}$$

si dice l'*anello delle matrici quadrate* $n \times n$.

Esrecizi:

▼ Sia K un campo. Sia $\widetilde{K}$ l'insieme delle matrici del tipo

$$aI = \begin{pmatrix} a & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a \end{pmatrix} \in K^{n\times n} \qquad \text{con } a \in K$$

Si provi che

▽ per $\forall A, B \in \widetilde{K}$ si ha

$$A+B, \ AB \ \in \widetilde{K}$$

△ $\widetilde{K}$, con le operazioni "+", "$\cdot$", è un campo *isomorfo* a K

◆ **3.9.1** Sia K un campo. In $K^{n\times n}$ si considerino le matrici E_{rs} definite da

$$E_{rs} = \big(0, \cdots, 0, \underset{\uparrow\ s\text{-ma colonna}}{e_r}, 0, \cdots, 0\big)$$

▽ si verifichi che

$$E_{rs}E_{\lambda\mu} = \delta_{s\lambda}E_{r\mu}$$

ove $\delta_{s\lambda}$ è il simbolo di Kronecker

△ se ne deduca che, se $n \geqslant 2$, allora $K^{n\times n}$ è un anello non commutativo.

♦ Sia K un campo; si consideri $K^{n\times n}$. Sia $\lambda \in K$. Si verifichi che λI commuta con ogni $B \in K^{n\times n}$.

♦ Sia K un campo, e sia $A \in K^{2\times 2}$. Si provi che sono equivalenti gli asserti

▽ A commuta con $\forall B \in K^{2\times 2}$

△ A commuta con $E_{11}, E_{21}, E_{12}, E_{22}$

Se ne deduca che sono equivalenti gli asserti

▽ $\exists \lambda \in K$ tale che $A = \lambda I$

△ A commuta con $\forall B \in K^{2\times 2}$

♦ Sia K un campo, e sia $A \in K^{n\times n}$. Si calcolino

$$E_{rs}A, \quad AE_{rs}$$

Si provi che sono equivalenti gli asserti

▽ A commuta con $\forall B \in K^{n\times n}$

△ A commuta con $\forall E_{rs}$

Se ne deduca che sono equivalenti gli asserti

▽ $\exists \lambda \in K$ tale che $A = \lambda I$

△ A commuta con $\forall B \in K^{n\times n}$

♦ Sia K un campo, e sia $A \in K^{n\times n}$; si ponga $A^0 = I$. Sia

$$\mathscr{A} = \Big\{ B \in K^{n\times n} : \exists h \geqslant 0, \exists b_0, \ldots, b_h \in K \\ \text{tali che } B = b_0A^0 + \cdots b_hA^h \Big\}$$

Si verifichi che

▽ $0, I, A \in \mathscr{A}$

◊ per $\forall B, C \in \mathscr{A}$ e $\forall \lambda \in K$ si ha

$$B + C,\ BC,\ \lambda B\ \in \mathscr{A}$$

△ $\mathscr{A}$, con le operazioni "+", "·", "λ·", è un anello commutativo

♦ Siano $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$;

▽ calcolare $(A+B)^2,\ (A+B)^3$

◊ dire se sia vero o falso che

$$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

△ verificare che, se A, B commutano, allora

$$(A+B)^h = \sum_{\lambda=0}^{h} \begin{pmatrix} h \\ \lambda \end{pmatrix} A^{h-\lambda} B^{\lambda}$$

▲ Sia

$$A = \begin{pmatrix} 1+i & 2+i \\ 1-i & 2-i \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$$

▽ determinare le $X, Y \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ tali che

$$AX = 0, \quad YA = 0$$

(*Cenno:* con il Metodo di Gauss si risolvano sistemi opportuni di 4 equazioni in 4 incognite)

△ verificare che $\exists_1 X, Y \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ tali che

$$AX = I, \quad YA = I$$

e verificare che $X = Y$

3.10 Matrici associate ad applicazioni lineari

Sia K un campo.

Siano V, W spazi vettoriali su K di tipo finito e dimensioni

$$\dim V = n, \quad \dim W = m \ ,$$

e sia

$$f : V \to W$$

una applicazione lineare.

Le considerazioni che seguono, provano che lo studio di f può essere ricondotto allo studio di una applicazione lineare

$$\mathscr{L}_A : K^n \to K^m$$

ove $A \in K^{m\times n}$ è una matrice opportuna.

Si considerino una base

$$\mathscr{V} = (v_1, \dots, v_n)$$

di V, e una base

$$\mathscr{W} = (w_1, \dots, w_m)$$

di W.

3.10.1 Definizione: Si calcolino le coordinate di $f(v_1), \ldots, f(v_n)$ rispetto alla base $\mathscr{W}$, e sia

$$f(v_1) \equiv_{\mathscr{W}} a_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \ldots, f(v_n) \equiv_{\mathscr{W}} a_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} .$$

La matrice

$$A = (a_1, \ldots, a_n) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in K^{m \times n}$$

si dice la *matrice associata ad f rispetto alle basi $\mathscr{V}$ e $\mathscr{W}$.*

Il seguente Teorema fornisce lo strumento per usare A e

$$\mathscr{L}_A : K^n \to K^m$$

nella soluzione di problemi relativi ad f.

3.10.2 Teorema: Siano

$$x_1, \ldots, x_n \in K, \quad c_1, \ldots, c_m \in K \ ;$$

sono equivalenti gli asserti:

a) $f(x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n) = c_1 w_1 + \cdots + c_m w_m$

b) $A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}$

c) $\mathscr{L}_A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}$

(verificare per esercizio).

Esercizi:

- si provi che sono equivalenti gli asserti:
  - f è iniettiva,
  - le colonne di A sono una famiglia linearmente indipendente in K^m (e quindi in particolare si ha $n \leqslant m$);
- si provi che sono equivalenti gli asserti:

  - f è surgettiva,
  - le colonne di A sono una famiglia di generatori di K^m (e quindi in particolare si ha $n \geqslant m$);

- si provi che sono equivalenti gli asserti:
  - f è bigettiva,
  - le colonne di A sono una base di K^m (e quindi in particolare si ha $m = n$);

- come utilizzare una base di
$$\langle a_1, \ldots, a_n \rangle$$
per ottenere una base di
$$\operatorname{Im} f \ ?$$

- come utilizzare una base dello spazio delle soluzioni del sistema omogeneo
$$Ax = 0$$
di m equazioni lineari nell'incognita $x \in K^n$, per ottenere una base di
$$\ker f \ ?$$

Capitolo 4

Determinante

4.1 Permutazioni e segno

Si consideri l'insieme

$$\{1, 2, 3, 4, 5\} \ .$$

Una applicazione bigettiva

$$\varphi : \{1, 2, 3, 4, 5\} \to \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

si dice una *permutazione* dell'insieme $\{1, 2, 3, 4, 5\}$; l'insieme delle permutazioni di $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ si denota con

$$S_5 \ .$$

Esempi di elementi di S_5 sono:

- l'applicazione φ definita da:

  $$\varphi(1) = 3, \varphi(2) = 5, \varphi(3) = 2, \varphi(4) = 1, \varphi(5) = 4 \ ;$$

  tale applicazione si denota con il simbolo

  $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

- l'applicazione identica ι, ossia la permutazione definita da

  $$\iota = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

- la permutazione

  $$\psi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix} \ .$$

Date permutazioni
$$\sigma, \eta \in S_5$$
anche il loro prodotto di composizione
$$\sigma\eta : \{1,2,3,4,5\} \to \{1,2,3,4,5\}$$
è una permutazione di $\{1,2,3,4,5\}$; ad esempio:

- se
$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \qquad \eta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix} ,$$
si ha
$$\sigma\eta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix} \qquad \eta\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$
- se
$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \qquad \psi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix} ,$$
si ha
$$\varphi\psi = \psi\varphi = \iota \ .$$

L'operazione di *prodotto di composizione* tra elementi di S_5 verifica le proprietà seguenti:

- è *associativa*, ossia: per $\forall \sigma, \eta, \tau \in S_5$ si ha
$$(\sigma\eta)\tau = \sigma(\eta\tau) \ ;$$
- ammette *elemento neutro*, ossia: esiste un elemento di S_5, e precisamente la permutazione identica ι, tale che per $\forall \sigma \in S_5$ si ha
$$\sigma\iota = \iota\sigma = \sigma;$$
- ogni elemento ammette *inverso*, ossia: per $\forall \sigma \in S_5$ esiste una permutazione, e precisamente l'applicazione inversa σ^{-1} della applicazione bigettiva σ, tale che
$$\sigma\sigma^{-1} = \sigma^{-1}\sigma = \iota \ .$$

Allora S_5 con il prodotto di composizione si dice un *gruppo moltiplicativo*, e precisamente il *gruppo delle permutazioni* dell'insieme $\{1,2,3,4,5\}$ o il *gruppo simmetrico di ordine 5.*

Si verifichi che:

- se
$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} ,$$
allora si ha
$$\varphi^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix} ;$$
- se $\sigma, \eta \in S_5$, allora si ha
$$(\sigma\eta)^{-1} = \eta^{-1}\sigma^{-1} ,$$
- S_5 é un gruppo con $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$ elementi.

Sia
$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 & \sigma_4 & \sigma_5 \end{pmatrix} \in S_5 ;$$
si pone:
$$\begin{aligned} \text{sgn } \sigma = \quad & \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2-1} \cdot \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{3-1} \cdot \frac{\sigma_4 - \sigma_1}{4-1} \cdot \frac{\sigma_5 - \sigma_1}{5-1} \cdot \\ & \frac{\sigma_3 - \sigma_2}{3-2} \cdot \frac{\sigma_4 - \sigma_2}{4-2} \cdot \frac{\sigma_5 - \sigma_2}{5-2} \cdot \\ & \frac{\sigma_4 - \sigma_3}{4-3} \cdot \frac{\sigma_5 - \sigma_3}{5-3} \cdot \\ & \frac{\sigma_5 - \sigma_4}{5-4} \quad ; \end{aligned}$$
si verifichi che:

- sgn $\sigma \in \Big\{ -1, 1 \Big\}$;
- sgn $\sigma = 1$ se il numero di *fattori negativi* al numeratore è *pari*;
- sgn $\sigma = -1$ se il numero di *fattori negativi* al numeratore è *dispari*;

si verifichi inoltre che (*attenzione:* non è una verifica difficile, ma non è banale):

- per $\forall \sigma, \eta \in S_5$ si ha
$$\text{sgn } (\sigma\eta) = (\text{sgn } \sigma)(\text{sgn } \eta)$$

Si considerino $2, 5 \in \Big\{1, 2, 3, 4, 5, \Big\}$; si indica con
$$(2, 5)$$
la permutazione definita da
$$(2, 5) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} ;$$

tale permutazione si dice uno *scambio*, e precisamente *lo scambio tra* 2 *e* 5; si osservi che tale permutazione coincide con la propria inversa, ossia che

$$(2,5)^{-1} = (2,5) \ .$$

Si verifichi che

- per ogni $i, j \in \Big\{1,2,3,4,5,\Big\}$ tali che $i \neq j$, si ha
$$\text{sgn }(i.j) = -1 \ .$$

Si consideri la permutazione

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \ ;$$

si verifichi successivamente che:

- $(4,5)\sigma = (4,5)\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$
- $(4,1)(4,5)\sigma = (4,1)\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$
- $(3,2)(4,1)(4,5)\sigma = (3,2)\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$
- $(1,2)(3,2)(4,1)(4,5)\sigma = (1,2)\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \iota \ ;$

se ne deduca che:

- $\sigma = \Big((1,2)(3,2)(4,1)(4,5)\Big)^{-1}$
- $\sigma = (4,5)^{-1}(4,1)^{-1}(3,2)^{-1}(1,2)^{-1}$
- $\sigma = (4,5)(4,1)(3,2)(1,2)$,

ossia che

- σ (e analogamente ogni elemento di S_5) è scomponibile in un prodotto di scambi.

Si noti che ciascuna σ ammette molte scomposizioni in prodotto di scambi. La seguente osservazione prova che la parità del numero di fattori di una scomposizione di σ non cambia al variare delle scomposizioni.

Segno e scomposizione in prodotto di scambi sono logicamente correlati dalla seguente osservazione (dimostrarla come esercizio quasi banale):

- sia $\sigma \in S_5$, e sia
$$\sigma = s_h \cdots s_1$$
una scomposizione di σ in prodotto di h scambi; si ha
$$\begin{aligned} \text{sgn } \sigma &= \ \ 1 \quad \Rightarrow \quad h \text{ è pari} \\ \text{sgn } \sigma &= -1 \quad \Rightarrow \quad h \text{ è dispari} \end{aligned}$$

dalla osservazione precedente si deduca che:

- per $\forall \sigma \in S_5$ si ha:
$$\text{sgn } \sigma^{-1} = \text{sgn } \sigma$$
(*Cenno:* Posto $\sigma = s_h \cdots s_1$, con $s_1, \cdots, s_h$ scambi , si ha $\sigma^{-1} = s_1 \cdots s_h$.)

In maniera analoga si opera in uno qualsiasi dei gruppi simmetrici
$$S_1, S_2, \ldots, S_6, S_7, \ldots \quad .$$
. L'unica attenzione da fare è per S_1, ove l'unica permutazione é
$$\iota = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \ ,$$
e la definizione vista di segno non si può applicare a tale permutazione; in tal caso si pone come definizione autonoma:
$$\text{sgn } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \ .$$

4.2 Determinante

Sia K un campo e sia $K^{n \times n}$ l'insieme delle matrici $n \times n$ ad elementi in K.

In questa Sezione studiamo una applicazione
$$\begin{aligned} \det : \ K^{n\times n} &\to \quad K \\ A \quad &\to \ \det A \quad (\textit{determinante di } A) \end{aligned}$$
che si indica con "det" e si chiama "*determinante*", che gode delle seguenti proprietà:

- è *n-lineare sulle colonne*, ossia: dato comunque $i \in \{1, \ldots, n\}$, e date comunque $n-1$ colonne
$$a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n \in K^n \ ,$$

per $\forall y, z \in K^n$ e $\forall \lambda \in K$ si ha

$$\begin{aligned}
&\det(a_1, \ldots, a_{i-1}, y+z, a_{i+1}, \ldots, a_n) = \\
&\qquad\qquad \det(a_1, \ldots, a_{i-1}, y, a_{i+1}, \ldots, a_n) + \\
&\qquad\qquad \det(a_1, \ldots, a_{i-1}, z, a_{i+1}, \ldots, a_n) \\
&\det(a_1, \ldots, a_{i-1}, \lambda y, a_{i+1}, \ldots, a_n) = \\
&\qquad\qquad \lambda \det(a_1, \ldots, a_{i-1}, y, a_{i+1}, \ldots, a_n)
\end{aligned}$$

- è *alternante sulle colonne*, ossia: data comunque

  $$(a_1, \ldots, a_n) \in K^{n \times n} \ ,$$

  se esistono $i \neq j$ tali che $a_i = a_j$, allora si ha

  $$\det(a_1, \ldots, a_n) = 0$$

- $\det I = 1$, ossia:

  $$\det(e_1, \ldots, e_n) = 1 \ ,$$

  ove

  $$(e_1, \ldots, e_n)$$

  è la base canonica di K^n.

Il seguente Teorema dice come cambia il determinante di una matrice quando se ne scambiano due colonne.

4.2.1 Teorema: Sia $(a_1, \ldots, a_n) \in K^{n \times n}$, e sia

$$\sigma \in S_n$$

uno scambio. Si ha:

$$\det(a_{\sigma(1)}, \ldots, a_{\sigma(n)}) = -\det(a_1, \ldots, a_n) \ .$$

Cenno. Supponiamo per semplicità di scrittura che σ sia lo scambio tra 1 e 2. Si ha

$$\begin{aligned}
0 = {} & \det(a_1 + a_2, a_1 + a_2, a_3, \ldots, a_n) = \\
& \det(a_1, a_1, a_3, \ldots, a_n) + \det(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n) + \\
& \det(a_2, a_1, a_3, \ldots, a_n) + \det(a_2, a_2, a_3, \ldots, a_n) = \\
& \qquad \det(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n) + \det(a_2, a_1, a_3, \ldots, a_n)
\end{aligned}$$

■

Il seguente Teorema dice come cambia il determinante di una matrice quando se ne permutano le colonne.

4.2.2 Teorema: Sia $(a_1, \ldots, a_n) \in K^{n\times n}$, e sia

$$\sigma \in S_n \ .$$

Si ha:

$$\det(a_{\sigma(1)}, \ldots, a_{\sigma(n)}) = (\mathrm{sgn}\ \sigma) \det(a_1, \ldots, a_n) \ .$$

Cenno. Supponiamo che

$$\sigma = s_h \cdots s_1$$

sia una scomposizione di σ in prodotto di scambi. Tenuto conto del Teorema 4.2.1 si ha

$$\begin{aligned}
&\det(a_1, \ldots, a_n) = \\
&\qquad (-1)^1 \det(a_{s_1(1)}, \ldots, a_{s_1(n)}) = \\
&\qquad (-1)^2 \det(a_{s_2 s_1(1)}, \ldots, a_{s_2 s_1(n)}) = \\
&\qquad\qquad \vdots \\
&\qquad (-1)^h \det(a_{s_h \cdots s_2 s_1(1)}, \ldots, a_{s_h \cdots s_2 s_1(n)}) = \\
&\qquad\qquad\qquad (\mathrm{sgn}\ \sigma) \det(a_{\sigma(1)}, \ldots, a_{\sigma(n)})
\end{aligned}$$

■

Il seguente Lemma fornisce l'informazione più profonda sul comportamento del determinante.

4.2.3 Lemma: Siano

$$B = (b_1, \ldots, b_n), \quad A = (a_1, \ldots, a_n) \in K^{n\times n} \ ;$$

si ha:

$$\det(BA) = \left(\sum_{\sigma \in S_n} (\mathrm{sgn}\ \sigma) a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(n)n} \right) \det(b_1, \ldots, b_n)$$

Cenno. Tenuto conto della n-linearità e della alternanza di det, e tenuto conto del Teorema 4.2.2, si ha:

$$\begin{aligned}
\det(BA) = \det &\left(\sum_{\sigma_1=1}^{n} a_{\sigma_1 1} b_{\sigma_1}, \ldots, \sum_{\sigma_n=1}^{n} a_{\sigma_n n} b_{\sigma_n} \right) = \\
&\sum_{\sigma_1, \ldots, \sigma_n=1}^{n} a_{\sigma_1 1} \cdots a_{\sigma_n n} \det(b_{\sigma_1}, \ldots, b_{\sigma_n}) = \\
&\sum_{\sigma \in S_n} a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(n)n} \det(b_{\sigma(1)}, \ldots, b_{\sigma(n)}) = \\
&\sum_{\sigma \in S_n} a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(n)n} \left((\mathrm{sgn}\ \sigma) \det(b_1, \ldots, b_n) \right)
\end{aligned}$$

■

Il seguente Teorema dice come si calcola il determinante di una matrice, e come si comporta il determinante rispetto al prodotta tra matrici.

4.2.4 Teorema: Sussistono gli asserti seguenti:

a) per
$$\forall A = (a_1, \ldots, a_n) \in K^{n\times n}$$
si ha
$$\det A = \sum_{\sigma\in S_n} (\operatorname{sgn}\, \sigma) a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(n)n} \ ;$$

b) (Teorema di Binet) per $\forall A, B \in K^{n\times n}$ si ha
$$\det(AB) = \det(BA) = (\det A)(\det B) \ .$$

Cenno. a) Per il Lemma 4.2.3 si ha
$$\det A = \det(IA) =$$
$$\left(\sum_{\sigma\in S_n} (\operatorname{sgn}\, \sigma) a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(n)n}\right)(\det I) =$$
$$\sum_{\sigma\in S_n} (\operatorname{sgn}\, \sigma) a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(n)n}$$
b) Segue dal Lemma 4.2.3 e da a). ■

IL seguente Teorema prova che una matrice e la propria trasposta hanno lo stesso determinante.

4.2.5 Teorema: Sia $A \in K^{n\times n}$; si ha
$$\det A^T = \det A \ .$$

Cenno. Per Il Teorema 4.2.4, posto
$$A = (a_1, \ldots, a_n)$$
si ha
$$\det A = \sum_{\sigma\in S_n} (\operatorname{sgn}\, \sigma) a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(n)n} = \sum_{\sigma\in S_n} (\operatorname{sgn}\, \sigma) a_{1\sigma^{-1}(1)} \cdots a_{n\sigma^{-1}(n)} =$$
$$\sum_{\sigma\in S_n} (\operatorname{sgn}\, \sigma^{-1}) a_{1\sigma^{-1}(1)} \cdots a_{n\sigma^{-1}(n)} = \sum_{\sigma\in S_n} (\operatorname{sgn}\, \sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)} = \det A^T$$
■

Nota: Dal Teorema 4.2.5 si deduce facilmente che l'applicazione
$$\det : K^{n\times n} \to K$$
oltre ad essere n-lineare e alternante sulle colonne, è anche *n-lineare e alternante sulle righe.*

4.3 Il Metodo di Gauss

Sia K un campo.

Tutte le considerazioni di questa Sezione sono presentate per matrici 4×4. Si generalizzano in modo ovvio a qualsiasi matrice $n \times n$.

Il seguente Teorema dice come si calcola il determinante di una matrice diagonale.

4.3.1 Teorema: Siano $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in K$; si ha

$$\det \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_4 \end{pmatrix} = \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4 \ .$$

Cenno. Si ha

$$\det \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_4 \end{pmatrix} = \det(\alpha_1 e_1, \alpha_2 e_2, \alpha_3 e_3, \alpha_4 e_4) =$$

$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4 \det(e_1, e_2, e_3, e_4) = \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4$$

■

La seguente Nota indica alcune operazioni sulle colonne e sulle righe di una matrice che ne lasciano inalterato il determinante o lo mutano nel proprio opposto

4.3.2 Nota: Sia

$$A = (a_1, a_2, a_3, a_4) = \begin{pmatrix} a'_1 \\ a'_2 \\ a'_3 \\ a'_4 \end{pmatrix} \in K^{n \times n} \ ;$$

si verifichi che:

- se una colonna è nulla, allora il determinante è nullo;
  ad esempio se $a_3 = 0$, allora $\det(a_1, a_2, a_3, a_4) = 0$
  Cenno:

  $$\det(a_1, a_2, a_3, a_4) = \det(a_1, a_2, 0 \cdot a_3, a_4) = 0 \cdot \det(a_1, a_2, a_3, a_4)$$

■

- se una riga è nulla, allora il determinante è nullo;
  ad esempio se $a_2' = 0$, allora $\det \begin{pmatrix} a_1' \\ a_2' \\ a_3' \\ a_4' \end{pmatrix} = 0$
- scambiando due colonne il determinante si muta nel proprio opposto;
  ad esempio $\det(a_1, a_4, a_3, a_2) = -\det(a_1, a_2, a_3, a_4)$
  Cenno: Usare il Teorema 4.2.2 ■
- scambiando due righe il determinante si muta nel proprio opposto;
  ad esempio $\begin{pmatrix} a_2' \\ a_1' \\ a_3' \\ a_4' \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} a_1' \\ a_2' \\ a_3' \\ a_4' \end{pmatrix}$
- sommando ad una colonna un multiplo di un'*altra* colonna il determinante rimane inalterato;
  ad esempio $\det(a_1, a_2 + \lambda a_4, a_3, a_4) = \det(a_1, a_2, a_3, a_4)$
  Cenno:

$$\det(a_1, a_2 + \lambda a_4, a_3, a_4) = \det(a_1, a_2, a_3, a_4) + \lambda \det(a_1, a_4, a_3, a_4)$$

■

- sommando ad una riga un multiplo di un'*altra* riga il determinante rimane inalterato;
  ad esempio $\det \begin{pmatrix} a_1' \\ a_2' \\ a_3' + \lambda a_1 \\ a_4' \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a_1' \\ a_2' \\ a_3' \\ a_4' \end{pmatrix}$

Il seguente Teorema dice come si calcola il determinante di una matrice triangolare superiore.

4.3.3 Teorema: Siano $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in K$; si ha

$$\det \begin{pmatrix} \alpha_1 & \sharp & \sharp & \sharp \\ 0 & \alpha_2 & \sharp & \sharp \\ 0 & 0 & \alpha_3 & \sharp \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_4 \end{pmatrix} = \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4 \ .$$

Cenno. Sia A la matrice considerata.
Se $\alpha_1 = 0$, la 1^a colonna di A è nulla e quindi

$$\det A = 0 = \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4$$

Se invece $\alpha_1 \neq 0$, sommando alla $2^a, 3^a, 4^a$ colonna di A multipli opportuni della 1^a colonna di A, si ottiene una matrice

$$A_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \sharp & \sharp \\ 0 & 0 & \alpha_3 & \sharp \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_4 \end{pmatrix}$$

tale che

$$\det A = \det A_1 \ .$$

Se $\alpha_2 = 0$, la 2^a colonna di A_1 è nulla e quindi

$$\det A = \det A_1 = 0 = \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4$$

Se invece $\alpha_2 \neq 0$, sommando alla $3^a, 4^a$ colonna di A_1 multipli opportuni della 2^a colonna di A_1, si ottiene una matrice

$$A_2 = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 & \sharp \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_4 \end{pmatrix}$$

tale che

$$\det A = \det A_1 = \det A_2 \ .$$

Se $\alpha_3 = 0$, la 3^a colonna di A_2 è nulla e quindi

$$\det A = \det A_1 = \det A_2 = 0 = \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4$$

Se invece $\alpha_3 \neq 0$, sommando alla 4^a colonna di A_2 un multiplo opportuno della 3^a colonna di A_2, si ottiene una matrice diagonale

$$A_3 = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_4 \end{pmatrix}$$

tale che

$$\det A = \det A_1 = \det A_2 = \det A_3 = \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4 \ .$$

■

Il seguente Teorema dice come si calcola il determinante di una matrice triangolare inferiore.

4.3.4 Teorema: Siano $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in K$; si ha

$$\det \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & 0 \\ \sharp & \alpha_2 & 0 & 0 \\ \sharp & \sharp & \alpha_3 & 0 \\ \sharp & \sharp & \sharp & \alpha_4 \end{pmatrix} = \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4 \ .$$

Cenno. Stesse considerazioni del Teorema 4.3.3, operando sulle righe invece che sulle colonne. ■

Il seguente Metodo di Gauss riconduce il calcolo del determinante di una matrice a quello del determinante di una matrice triangolare.

4.3.5 Metodo di Gauss(per il calcolo di un determinante)**:** Sia

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \in K^{4\times 4} \ .$$

Step 1-1. Se

$$\forall a_{ij} = 0 \ ,$$

allora A è ovviamente triangolare superiore. **Stop**

Step 1-2. Se

$$\exists a_{ij} \neq 0 \ ,$$

scambiando al più due colonne e al più due righe di A si porti a_{ij} in posizione "11"; sia h_1 il numero di scambi fatti e sia

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{pmatrix} \qquad b_{11} \neq 0$$

la matrice ottenuta; ovviamente si ha

$$\det A = (-1)^{h_1} \det B \ .$$

Si sommino alla $2^a, 3^a, 4^a$ riga di B multipli opportuni della 1^a riga di B in modo da ottenere una matrice

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ 0 & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ 0 & c_{32} & c_{33} & c_{34} \\ 0 & c_{42} & c_{43} & c_{44} \end{pmatrix} \ ;$$

ovviamente si ha

$$\det B = \det C \ ,$$

e quindi si ha

$$\det A = (-1)^{h_1} \det C \ .$$

Step 2-1. Se

$$\forall c_{ij} = 0 \quad 2 \leqslant i, j \leqslant 4 \ ,$$

allora C è ovviamente triangolare superiore. **Stop**

Step 2-2. Se

$$\exists c_{ij} \neq 0 \quad 2 \leqslant i, j \leqslant 4 \ ,$$

scambiando al più due colonne e al più due righe di C si porti c_{ij} in posizione "22"; sia h_2 il numero di scambi fatti e sia

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} \\ 0 & d_{22} & d_{23} & d_{24} \\ 0 & d_{32} & d_{33} & d_{34} \\ 0 & d_{42} & d_{43} & d_{44} \end{pmatrix} \qquad d_{22} \neq 0$$

la matrice ottenuta; ovviamente si ha

$$\det C = (-1)^{h_2} \det D \ ,$$

e quindi si ha

$$\det A = (-1)^{h_1 + h_2} \det D \ .$$

Si sommino alla $3^a, 4^a$ riga di D multipli opportuni della 2^a riga di D in modo da ottenere una matrice

$$E = \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} & e_{14} \\ 0 & e_{22} & e_{23} & e_{24} \\ 0 & 0 & e_{33} & e_{34} \\ 0 & 0 & e_{43} & e_{44} \end{pmatrix} \ ;$$

ovviamente si ha

$$\det D = \det E \ ,$$

e quindi si ha

$$\det A = (-1)^{h_1 + h_2} \det E \ .$$

Step 3-1. Se

$$\forall e_{ij} = 0 \quad 3 \leqslant i, j \leqslant 4 \ ,$$

allora E è ovviamente triangolare superiore. **Stop**

Step 3-2. Se

$$\exists e_{ij} \neq 0 \quad 3 \leqslant i, j \leqslant 4 \ ,$$

scambiando al più due colonne e al più due righe di E si porti e_{ij} in posizione "33"; sia h_3 il numero di scambi fatti e sia

$$F = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{14} \\ 0 & f_{22} & f_{23} & f_{24} \\ 0 & 0 & f_{33} & f_{34} \\ 0 & 0 & f_{43} & f_{44} \end{pmatrix} \qquad f_{33} \neq 0$$

la matrice ottenuta; ovviamente si ha

$$\det E = (-1)^{h_3} \det F \ ,$$

e quindi si ha

$$\det A = (-1)^{h_1+h_2+h_3} \det F \ .$$

Si sommi alla 4^a riga di F un multiplo opportun0 della 3^a riga di F in modo da ottenere una matrice

$$G = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & g_{14} \\ 0 & g_{22} & g_{23} & g_{24} \\ 0 & 0 & g_{33} & g_{34} \\ 0 & 0 & 0 & g_{44} \end{pmatrix} \ ;$$

ovviamente si ha

$$\det F = \det G \ ,$$

e quindi si ha

$$\det A = (-1)^{h_1+h_2+h_3} \det G \ ,$$

con G triangolare superiore. **Stop**

Una Procedura analoga operante sulle colonne invece che sulle righe riconduce il calcolo del determinante di A al calcolo del determinante di una matrice triangolare inferiore.

4.4 Il Teorema di Laplace

Sia K un campo.

Tutte le considerazioni di questa Sezione sono presentate per matrici 4×4. Si generalizzano in modo ovvio a qualsiasi matrice $n \times n$.

Sia

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \in K^{4\times 4} \ .$$

Il seguente Lemma riconduce il calcolo di due particolari tipi di matrici 4×4 al calcolo di una matrice 3×3.

4.4.1 Lemma: Siano $\alpha_{ij} \in K$; si ha

$$\det \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & 0 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & 0 \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{14} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\det \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \ .$$

Cenno. Si ha:

$$\det\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & 0 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & 0 \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & 1 \end{pmatrix} = \sum_{\sigma\in S_4} (\text{sgn }\sigma)\alpha_{\sigma(1)1}\alpha_{\sigma(2)2}\alpha_{\sigma(3)3}\alpha_{\sigma(4)4} =$$

$$\sum_{\sigma\in S_4, \sigma(4)=4} (\text{sgn }\sigma)\alpha_{\sigma(1)1}\alpha_{\sigma(2)2}\alpha_{\sigma(3)3}\alpha_{\sigma(4)4} =$$

$$\sum_{\sigma\in S_4, \sigma(4)=4} (\text{sgn }\sigma)\alpha_{\sigma(1)1}\alpha_{\sigma(2)2}\alpha_{\sigma(3)3} =$$

$$\sum_{\sigma\in S_3} (\text{sgn }\sigma)\alpha_{\sigma(1)1}\alpha_{\sigma(2)2}\alpha_{\sigma(3)3} = \det\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix} .$$

Per esercizio si provi la rimanente uguaglianza. ■

Il seguente Lemma-Definizione dice come si calcola il determinante della matrice ottenuta da A sostituendone la j^a colonna con e_i, oppure sostituendone la i^a riga con e_j^T, e introduce la nozione di *aggiunto* a'_{ji} di un elemento a_{ij} di A (si ponga attenzione all'inversione degli indici).

4.4.2 Lemma-Definizione: Siano

$$1 \leqslant i, j \leqslant 4 \ ;$$

si ponga:

- $(e_i \to a_j; A)$ = "matrice 4×4 ottenuta da A sostituendone la j^a colonna a_j con e_i",
- $(e_j^T \to a'_i; A)$ = "matrice 4×4 ottenuta da A sostituendone la i^a riga a'_i con e_j^T",
- A_{ij} = "matrice 3×3 ottenuta da A eliminandone la i^a riga e la j^a colonna", o equivalentemenete "eliminandone la riga e la colonna che si intersecano in a_{ij}"

Si ha:

$$\det(e_i \to a_j; A) = \det(e_j^T \to a'_i; A) = (-1)^{i+j} \det A_{ij} \ .$$

Si pone:

- a'_{ji} = *aggiunto di* $a_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$.

Cenno. Ad esempio, tenuto conto del Lemma 4.4.1 si ha:

$$\det(e_3 \to a_2; A) = \det \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & 0 & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & 1 & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & 0 & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} =$$

$$(-1) \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} & 0 & a_{14} \\ a_{21} & a_{23} & 0 & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & 1 & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & 0 & a_{44} \end{pmatrix} = (-1)^2 \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} & 0 \\ a_{21} & a_{23} & a_{24} & 0 \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} & 1 \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} & 0 \end{pmatrix} =$$

$$(-1)^3 \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} & 0 \\ a_{21} & a_{23} & a_{24} & 0 \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} & 0 \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} & 1 \end{pmatrix} = (-1)^3 \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} =$$

$$(-1)^3 \det A_{32} \ ;$$

si osservi che l'esponente 3 di (-1) é il numero di scambi tre righe e colonne effettuati nei passaggi precedenti, tale numero è pertanto

$$(4-2) + (4-3) = 2 \cdot 4 - (3+2)$$

e quindi si ha

$$(-1)^3 = (-1)^{2 \cdot 4-(3+2)} = (-1)^{3+2} \ .$$

■

La seguente Definizione introduce la nozione di *matrice aggiunta* di A.

4.4.3 Definizione: Si chiama *matrice aggiunta* di A la matrice $A' \in K^{4\times 4}$ definita da

$$A' = \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} & a'_{14} \\ a'_{21} & a'_{22} & a'_{23} & a'_{24} \\ a'_{31} & a'_{32} & a'_{33} & a'_{34} \\ a'_{41} & a'_{42} & a'_{43} & a'_{44} \end{pmatrix} \ .$$

Si noti ad esempio che:

- la 3^a colonna di A' è costituita dagli aggiunti degli elementi della 3^a riga di A,
- la 2^a riga di A' è costituita dagli aggiunti degli elementi della 2^a colonna di A.

La proprietà fondamentale della matrice A' è fornita dal seguente Teorema.

4.4.4 Teorema(di Laplace)**:** Sussistono gli asserti:

$$\text{a)}\ \ A'A = \begin{pmatrix} \det A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \det A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \det A & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \det A \end{pmatrix} = (\det A)I \ ,$$

$$\text{b)}\ \ AA' = \begin{pmatrix} \det A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \det A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \det A & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \det A \end{pmatrix} = (\det A)I \ .$$

Cenno. a). Proviamo ad esempio che

$$(a'_{31}, a'_{32}, a'_{33}, a'_{34}) \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \\ a_{43} \end{pmatrix} = \det A \ .$$

Tenuto conto del Teorema 4.4.2 si ha infatti:

$$\begin{aligned} \det A = \det(a_1, a_2, a_{13}e_1 + a_{23}e_2 + a_{33}e_3 + a_{43}e_4, a_4) = \\ a_{13}\det(e_1 \to a_3; A) + a_{23}\det(e_2 \to a_3; A) + \\ a_{33}\det(e_3 \to a_3; A) + a_{43}\det(e_4 \to a_3; A) = \\ a_{13}a'_{31} + a_{23}a'_{32} + a_{33}a'_{33} + a_{43}a'_{34} \ . \end{aligned}$$

b). Proviamo ad esempio che

$$(a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{24}) \begin{pmatrix} a'_{14} \\ a'_{24} \\ a'_{34} \\ a'_{44} \end{pmatrix} = 0 \ .$$

Tenuto conto del Teorema 4.4.2 si ha infatti:

$$0 = \det \begin{pmatrix} a'_1 \\ a'_2 \\ a'_3 \\ a'_2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a'_1 \\ a'_2 \\ a'_3 \\ a_{21}e_1^T + a_{22}e_2^T + a_{23}e_3^T + a_{24}e_4^T \end{pmatrix} =$$

$$\begin{aligned} a_{21}\det(e_1^T \to a'_4; A) + a_{22}\det(e_2^T \to a'_4; A) + \\ a_{23}\det(e_3^T \to a'_4; A) + a_{24}\det(e_4^T \to a'_4; A) = \\ a_{21}a'_{14} + a_{22}a'_{24} + a_{23}a'_{34} + a_{24}a'_{44} \ . \end{aligned}$$

■

4.5 Basi di K^n, unità di $K^{n\times n}$

Sia K un campo.

Il seguente Teorema caratterizza in termini di determinante le basi di K^n.

4.5.1 Teorema: Si consideri una n-upla

$$(a_1, \ldots, a_n) \in K^n \ ;$$

sono equivalenti gli asserti:

a) $(a_1, \ldots, a_n)$ è una base di K^n;

b) $\det(a_1, \ldots, a_n) \neq 0$.

Cenno. a)⇒b). Si ponga

$$\mathscr{A} = (a_1, \ldots, a_n) \ ;$$

sicccome $\mathscr{A}$ è una base di K^n, per $i = 1, \ldots, n$ si ponga

$$e_i \equiv_{\mathscr{A}} b_i \in K^n \ ;$$

si ha

$$(a_1, \ldots, a_n)(b_1, \ldots, b_n) = I \ .$$

Per il Teorema 4.2.4 si ha:

$$1 = \det I = \det\big((a_1, \ldots, a_n)(b_1, \ldots, b_n)\big) = \\ \big(\det(a_1, \ldots, a_n)\big)\big(\det(b_1, \ldots, b_n)\big) \ ;$$

pertanto $\det(a_1, \ldots, a_n) \neq 0$.

a)⇒b). Per assurdo: se $(a_1, \ldots, a_n)$ non fosse una base di K^n, esisterebbe una colonna combinazione lineare delle rimanenti colonne; supponiamo ad esempio che sia

$$a_n = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i a_i \ ;$$

allora si avrebbe:

$$\det(a_1, \ldots, a_n) = \det\left(a_1, \ldots, a_{n-1}, \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i a_i\right) = \\ \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \det(a_1, \ldots, a_{n-1}, a_i) = 0 \ ,$$

il che è assurdo. ■

Tenuto conto del Teorema 4.2.5, il Teorema precedente si generalizza nel seguente:

4.5.2 Teorema: Sia $A \in K^{n\times n}$; sono equivalenti gli asserti:

a) $\det A \neq 0$;

b) le colonne di A sono una base di K^n ;

c) le righe di A sono una base di $K^{1\times n}$.

Il seguente Teorema caratterizza in termini di determinante le matrici invertibili, ossia le unità, dell'anello $K^{n\times n}$. (Per l'anello $K^{n\times n}$ vedi la Sezione 3.9; per la nozione di elementi invertibili, o unità, di un anello vedi la Sezione 1.5)

4.5.3 Teorema: Sia $A \in K^{n\times n}$; sono equivalenti gli asserti:

a) $\det A \neq 0$;

b) A è una matrice invertibile.

Se A è invertibile, si ha:

$$\det A^{-1} = (\det A)^{-1} \ .$$

(*Nota:* Si ricordi che in tal caso A ammette una sola inversa destra, una sola inversa sinistra, e che tali due matrici coincidono; si ricordi che l'unica inversa destra, che coincide con l'unica inversa sinistra, si denota con il simbolo A^{-1}.)

Cenno. a)$\Rightarrow$b). Come visto nella dimostrazione del Teorema 4.5.1, essendo le colonne di A una base di K^n, si prova che esiste $B' \in K^{n\times n}$ tale che $AB' = I$. Analogamente, essendo le righe di A una base di $K^{1\times n}$, si prova che esiste $B'' \in K^{n\times n}$ tale che $B''A = I$. Pertanto A è una unità di $K^{n\times n}$.

b)$\Rightarrow$a). Usando l'inversa di A, si ottine:

$$1 = \det I = \det(AA^{-1}) = (\det A)(\det A^{-1}) \ ;$$

ne segue che $\det A \neq 0$. ■

Il seguente Teorema fornisce il legama tra l'inversa di una matrice e la matrice aggiunta.

4.5.4 Teorema: Sia $A \in K^{n\times n}$ una matrice invertibile (per il Teorema 4.5.3 si ha $\det A \neq 0$), e sia

$$A' \in K^{n\times n}$$

la matrice aggiunta. Si ha:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} A' \ .$$

Cenno. È sufficiente osservare che per il Teorema 4.4.4 si ha

$$\left(\frac{1}{\det A} A'\right) A = \frac{1}{\det A}(A'A) = \frac{1}{\det A}\left((\det A)I\right) = I \ .$$

$\blacksquare$

Esercizio: Sia $A \in K^{n\times n}$ una matrice tale che

$$\begin{cases} A \neq 0 \\ A \ \textit{non invertibile} \end{cases}$$

si provi che A è un divisore sia destro che sinistro di 0.

(*Cenno:* Si usino i Teoremi 4.5.2 e 4.5.3 per provare che le colonne di A sono una famiglia linearmente dipendente, e che le righe di A sono una famiglia linearmente dipendente; se ne deduca rispettivamente l'esistenza di una matrice non nulla $B \in K^{n\times n}$ tale che $AB = 0$, e di una matrice non nulla $C \in K^{n\times n}$tale che $CA = 0$.)

4.6 Famiglie indipendenti in K^n

Sia K un campo.

Tutte le nozioni di questa Sezione sono date su esempi. Si generalizzano in modo ovvio a qualsiasi altra situazione analoga.

Sia

$$A = (a_{rs}) \in K^{5\times 7} \ ;$$

nella figura seguente

$$A = \begin{array}{cc}
\begin{matrix} & & 3^a & & & 6^a & 7^a \\ & & \downarrow & & & \downarrow & \downarrow \end{matrix} & \\
\begin{pmatrix}
\bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\
\bullet & \bullet & a_{23} & \bullet & \bullet & a_{26} & a_{27} \\
\bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\
\bullet & \bullet & a_{43} & \bullet & \bullet & a_{46} & a_{47} \\
\bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet
\end{pmatrix} &
\begin{matrix} \\ \leftarrow 2^a \\ \\ \leftarrow 4^a \\ \\ \end{matrix}
\end{array}$$

sono evidenziati gli elementi di A che si ottengono *intersecando*

la 2^a e 4^a riga di A

con

la 3^a, 6^a e 7^a colonna di A ;

la matrice

$$\begin{pmatrix} a_{23} & a_{26} & a_{27} \\ a_{43} & a_{46} & a_{47} \end{pmatrix}$$

si dice

- il *minore* di A ottenuto intersecando la 2^a e 4^a riga di A con la 3^a, 6^a e 7^a colonna di A,
- o piú genericamente, un *minore di tipo* 2×3 di A.

Il Teorema seguente caratterizza le famiglie linearmente indipendenti di K^n, in termini di minori. La Dimostrazione fornisce un metodo per ampliare ad una base una famiglia indipendente di elementi di K^n. A titolo di Esercizio si dia la riformulazione di tale Teorema in termini di righe invece che di colonne.

4.6.1 Teorema: Si consideri una famiglia

$$(a_1, a_2, a_3)$$

di elementi di K^5.

Sono equivalenti gli asserti:

a) (a_1, a_2, a_3) è una famiglia linearmente indipendente,

b) la matrice
$$(a_1, a_2, a_3) \in K^{5\times 3}$$
ha un minore B di tipo 3×3 con $\det B \neq 0$.

Cenno. a)$\Rightarrow$b). Siccome

$$(a_1, a_2, a_3)$$

è una famiglia linearmente indipendente, per l'Algoritmo 2.9.2 esitono 2 elementi della base canonica di K, ad esempio

$$e_2, e_4\ ,$$

tali che

$$(a_1, a_2, a_3, e_2, e_4)$$

sia una base di K^5.

Per il Teorema 4.5.2 si ha

$$\det(a_1, a_2, a_3, e_2, e_4) \neq 0\ ;$$

applicando due volte il Teorema di Laplace 4.4.4, si ottiene

$$0 \neq \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 1 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & 0 & 1 \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$-\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 1 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & 0 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} \end{pmatrix}\ .$$

b)⇒a). Supponiamo ad esempio che il minore B sia quello ottenuto

eliminando la 3^a *e la* 5^5 *riga;*

Aplicando due volte il Teorema di Laplace 4.4.4, si ottiene

$$\det(a_1, a_2, a_3, e_3, e_5) = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 1 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 1 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & 0 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{pmatrix} = -\det B \neq 0 \ ;$$

allora, per il Teorema 4.5.2,

$$(a_1, a_2, a_3, e_3, e_5)$$

è una base di K^5. ■

Il seguente Teorema caratterizza le colonne di K^n che sono linearmente dipendenti da una famiglia indipendente data. A titolo di Esercizio si dia la riformulazione di tale Teorema in termini di righe invece che di colonne.

4.6.2 Teorema: Si consideri una famiglia linearmente indipendente

$$(a_1, a_2, a_3)$$

di elementi di K^5, e sia

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_5 \end{pmatrix} \in K^5 \ .$$

Scelto a piacere un minore B di (a_1, a_2, a_3) tale che

$$\det B \neq 0$$

(certamente esistente per il Teorema 4.6.1), sono equivalenti gli asserti:

a) $b \in \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$,

b) tutti i minori 4×4 di

$$(a_1, a_2, a_3, b) \in K^{5\times 4}$$

che si ottengono *ampliando* B hanno determinante 0 (ad esempio, se

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{pmatrix} ,$$

tali minori sono

$$\left(\begin{array}{cccccc} & & & & * & \\ & a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 & \\ & a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 & \\ * & a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 & * \\ & a_{41} & a_{42} & a_{43} & b_4 & \\ & & & & * & \end{array}\right) , \left(\begin{array}{cccccc} & & & & * & \\ & a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 & \\ & a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 & \\ & a_{41} & a_{42} & a_{43} & b_4 & \\ * & a_{51} & a_{52} & a_{53} & b_5 & * \\ & & & & * & \end{array}\right) ,$$

ove gli asterischi evidenziano in ciascuna matrice 4×4, la riga e la colonna usate per *ampliare* B.)

Cenno. a)$\Rightarrow$b). Se uno di tali minori avesse determinante $\neq 0$, per il Teorema 4.6.1 (ovviamente generalizzato) la famiglia

$$(a_1, a_2, a_3, b)$$

sarebbe linearmente dipendente.

b)$\Rightarrow$a). Si provi per esercizio che

$$\exists_1 \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in K$$

tali che

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_4 \end{pmatrix} .$$

Se fosse

$$b_3 \neq \lambda_1 a_{31} + \lambda_2 a_{32} + \lambda_3 a_{33} ,$$

si avrebbe

$$\det\begin{pmatrix} & & & * & & \\ & a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 & \\ & a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 & \\ * & a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 & * \\ & a_{41} & a_{42} & a_{43} & b_4 & \\ & & & & * & \end{pmatrix} =$$

$$\det\begin{pmatrix} & & & & * & \\ & a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 & \\ & a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & \\ * & a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 - (\lambda_1 a_{31} + \lambda_2 a_{32} + \lambda_3 a_{33}) & * \\ & a_{41} & a_{42} & a_{43} & 0 & \\ & & & & * & \end{pmatrix} \neq 0 \ ;$$

contro una delle ipotesi. Quindi si ha

$$b_3 = \lambda_1 a_{31} + \lambda_2 a_{32} + \lambda_3 a_{33}$$

Analogamente si prova che

$$b_5 = \lambda_1 a_{51} + \lambda_2 a_{52} + \lambda_3 a_{53} \ .$$

Ne segue che

$$b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 \ .$$

■

4.7 Rango

Sia K un campo.

Si consideri una matrice

$$A = (a_1, \ldots, a_n) = \begin{pmatrix} a'_1 \\ \vdots \\ a'_m \end{pmatrix} \in K^{m \times n} \ .$$

Il seguente Teorema prova che

$$\dim \langle a_1, \ldots, a_n \rangle = \dim \langle a'_1, \ldots, a'_m \rangle \ ,$$

e riconduce il calcolo di tale dimensione all'individuazione di un opportuno minore quadrato B di A.

4.7.1 Teorema(di Kronecker)**:** Sono (ovviamente) equivalenti gli asserti:

a) per ogni minore B, di tipo 1×1, di A si ha
$$\det B = 0 \ ,$$
b) $\dim \langle a_1, \ldots, a_n \rangle = 0$,
c) $\dim \langle a'_1, \ldots, a'_m \rangle = 0$.

Sia $h \geqslant 1$; sono equivalenti gli asserti:

a') esiste un minore B, di tipo $h \times h$, di A tale che
$$\det B \neq 0 \ ,$$
e che tutti i minori C di A di tipo $(h+1) \times (h+1)$ che si ottengono ampliando B hanno
$$\det C = 0 \ ;$$
b') $\dim \langle a_1, \ldots, a_n \rangle = h$,
c') $\dim \langle a'_1, \ldots, a'_m \rangle = h$.

in tal caso:

- tutti i minori C di A di tipo $k \times k$, con $k > h$, hanno
$$\det C = 0 \ .$$

Cenno. a')$\Leftrightarrow$b'). Provare per esercizio, applicando i Teoremi 4.6.1 e 4.6.2.
a')$\Leftrightarrow$c'). Provare per esercizio, applicando i Teoremi 4.6.1 e 4.6.2 nella versione "per righe". ■

La seguente Definizione, tenuto conto del Teorema di Kronecker, introduce la nozione di *rango* di A.

4.7.2 Definizione: Per il Teorema 4.7.1, il sottospazio
$$\langle a_1, \ldots, a_n \rangle \subset K^m$$
generato dalla famiglia delle colonne di A, e il sottospazio
$$\langle a'_1, \ldots, a'_m \rangle \subset K^{1 \times n}$$
generato dalla famiglia delle righe di A, hanno la stessa dimensione; tale dimensione si dice il *rango* di A, e si denota con
$$\mathrm{rank} A \ .$$

Si ha quindi
$$\mathrm{rank} A = \dim \langle a_1, \ldots, a_n \rangle = \dim \langle a'_1, \ldots, a'_m \rangle \ .$$

Tenuto conto del Teorema di Kronecker, per calcolare il rango di una matrice si può procedere come nell'esempio seguente.

4.7.3 Proceduraper il calcolo del rango)**:** Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 5} \ .$$

Step 0. Domanda: "i $4 \cdot 5$ minori B di tipo 1×1 di A, hanno tutti $\det B = 0$?"
Risposta: "no"; ad esempio

$$\det(a_{22}) = \det(2) \neq 0 \ .$$

Allora:

$$\mathrm{rank} A \geqslant 1 \ ;$$

si pone

$$B = (a_{22}) \ ,$$

e si passa a **Step 1.** .

Step 1. Domanda: "i $3 \cdot 4$ minori C di tipo 2×2 di A che si ottengono ampliando

$$B = (a_{22})$$

hanno tutti $\det C = 0$?"
Risposta: "no"; ad esempio

$$\det \begin{pmatrix} a_{22} & a_{24} \\ a_{42} & a_{44} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \neq 0 \ .$$

Allora:

$$\mathrm{rank} A \geqslant 2 \ ;$$

si pone

$$B = \begin{pmatrix} a_{22} & a_{24} \\ a_{42} & a_{44} \end{pmatrix} \ ,$$

e si passa a **Step 2.** .

Step 2. Domanda: "i $2 \cdot 3$ minori C di tipo 3×3 di A che si ottengono ampliando

$$B = \begin{pmatrix} a_{22} & a_{24} \\ a_{42} & a_{44} \end{pmatrix}$$

hanno tutti $\det C = 0$?"
Risposta: "si".
Allora:

$$\mathrm{rank} A = 2 \ .$$

Stop.

Per il Teorema di Kronecker, tutti i minori C di

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

di tipo 3×3 e 4×4 hanno

$$\det C = 0 \ .$$

4.8 Sistemi di equazioni lineari: il Teorema di Cramer

In questa Sezione consideriamo sistemi di equazioni lineari con il numero delle equazioni uguale al numero delle incognite, e con le colonne dei coefficienti delle incognite linearmente indipendenti. Tali sistemi sono ovviamente univocamente risolubili. Per tali sistemi ciascuna incognita è autonomamente calcolabile tramite un opportuno quoziente di due determinanti.

Sia K un campo.

Si consideri il sistema

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

di n equazioni lineari a coefficienti in K, nelle n incognite $x_1, \ldots, x_n \in K$.

Si ponga

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = (a_1, \ldots, a_n) \in K^{n \times n}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in K^n$$

4.8.1 Nota: Sia

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n \ ;$$

sono (ovviamente) equivalenti gli asserti:

a) x è una soluzione del sistema,

b) $Ax = b$,

c) $x_1 a_1 + \cdots + x_n a_n = b$.

4.8.2 Definizione: Con il simbolo

$$(b \to a_j; A)$$

indichiamo la matrice

$$(a_1, \ldots, a_{j-1}, b, a_{j+1}, \ldots, a_a) \ ,$$

ossia la matrice ottenuta da A sostituendone la j-ma colonna a_j con la colonna b.

4.8.3 Teorema(di Cramer)**:** Se

$$\det A \neq 0$$

sussitono gli asserti:

a) A è invertibile,
b) $x = A^{-1}b$ è l'unica soluzione del sistema,
c) per $j = 1, \ldots, n$ si ha

$$x_j = \frac{\det(b \to a_j; A)}{\det A} \ .$$

Cenno. Gli asserti a),b) sono ovvii. Quanto a c), si osservi che si ha:

$$x_1 a_1 + \cdots + x_{j-1} a_{j-1} + 1 \cdot (x_j a_j - b) + x_{j+1} a_{j+1} + \cdots + x_n a_n = 0 \ ;$$

se ne deduce che la famiglia

$$(a_1, \ldots, a_{j-1}, x_j a_j - b, a_{j+1}, \ldots, a_n)$$

è linearmente indipendente; conseguentemente si ha

$$\det(a_1, \ldots, a_{j-1}, x_j a_j - b, a_{j+1}, \ldots, a_n) = 0 \ ;$$

si completi la dimostrazione per esercizio. ■

4.9 Sistemi di equazioni lineari: il metodo del rango

In questa Sezione indichiamo un modo per studiare un qualsiasi sistema di equazioni lineari: tale metodo utilizza la nozione di rango per decidere se il sistema sia o meno risolubile, e per ridurre un sistema risolubile ad un sistema equivalente avente le equazioni linearmente indipendenti. Riconduce il calcolo delle soluzioni alla soluzione con il Teorema di Cramer di opportuni sistemi ausiliari.

Sia K un campo.
Si consideri il sistema

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

di m equazioni lineari a coefficienti in K, nelle n incognite $x_1, \ldots, x_n \in K$.

4.9.1 Definizioni:

- La matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_1, \ldots, a_n) \in K^{m \times n}$$

  si dice la *matrice incompleta* del sistema;

- la colonna

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in K^m$$

  si dice la *colonna dei termini noti* del sistema;

- la colonna

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \in K^m$$

  si dice la *colonna delle incognite* del sistema;

- la matrice

$$(A, b) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} = (a_1, \ldots, a_n, b) \in K^{m \times (n+1)}$$

  si dice la *matrice completa* del sistema;

- l'applicazione lineare

$$\mathscr{L}_A : K^n \to K^m$$

  si dice l'*applicazione lineare associata* al sistema;

- usando le notazioni precedenti, il sistema può essere scritto nelle forme seguenti:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} ,$$

$$Ax = b \ ,$$

$$\mathscr{L}_A(x) = b \ ;$$

- l'insieme delle soluzioni del sistema è

$$\big\{x \in K^n : Ax = b\big\} = \big\{x \in K^n : \mathscr{L}_A(x) = b\big\} \ ;$$

- se

$$\big\{x \in K^n : Ax = b\big\} \neq \emptyset \ ,$$

  ossia se l'insieme delle soluzioni del sistema non è vuoto, allora il sistema si dice *risolubile*;
- se

$$\big\{x \in K^n : Ax = b\big\} = \emptyset \ ,$$

  ossia se l'insieme delle soluzioni del sistema è vuoto, allora il sistema si dice *non risolubile*;
- il sistema

$$Ax = 0$$

  si dice il *sistema omogeneo associato* al sistema; ovviamente si ha

$$\big\{x \in K^n : Ax = 0\big\} = \ker \mathscr{L}_A \ ,$$

  e quindi in particolare

$$\begin{cases} \big\{x \in K^n : Ax = 0\big\} \text{ è un sottospazio di } K^n \ , \\ \big\{x \in K^n : Ax = 0\big\} \neq \emptyset \ . \end{cases}$$

Il Teorema seguente fornisce condizioni necessarie e sufficienti a che il sistema sia risolubile.

4.9.2 Teorema(di Rouché-Capelli)**:** Sono equivalenti gli asserti:

a) il sistema $Ax = b$ è risolubile;

b) $b \in \langle a_1, \ldots, a_n \rangle$;

c) $\langle a_1, \ldots, a_n, b \rangle = \langle a_1, \ldots, a_n \rangle$;

d) $\dim \langle a_1, \ldots, a_n, b \rangle = \dim \langle a_1, \ldots, a_n \rangle$;

e) $\operatorname{rank}(A,b) = \operatorname{rank}(A)$.

Cenno. Si dimostrino separatamente le seguenti ovvie implicazioni:

$$\text{a)}\Leftrightarrow\text{b)},\text{b)}\Leftrightarrow\text{c)},\text{c)}\Leftrightarrow\text{d)},\text{d)}\Leftrightarrow\text{e)} \ .$$

■

4.9.3 Ipotesi: Sia

$$q = \operatorname{rank}(A) \ ;$$

da qui in avanti supponiamo che il sistema

$$Ax = b$$

sia risolubile, ossia tenuto conto del Teorema 4.9.2 supponiamo che

$$\operatorname{rank}(A,b) = \operatorname{rank}(A) = q \ .$$

Caso 1. Sotto l'Ipotesi 4.9.3, se

$$q = 0 \ ,$$

si ha

$$A = 0, \ b = 0 \ ,$$

e quindi si ha:

$$\Big\{x \in K^n : Ax = b\Big\} = K^n \ .$$

Caso 2. Sempre sotto l'Ipotesi 4.9.3, supponiamo quindi che sia

$$q \geqslant 1 \ .$$

Si determini un minore B, di tipo $q \times q$, di A tale che

$$\det B \neq 0 \ ,$$

(ad esempio applicando ad A la Procedura 4.7.3); siano

$$i_1 < \cdots < i_q, \quad j_1 < \cdots < j_q$$

gli indici tali che

$$B = \begin{pmatrix} a_{i_1 j_1} & \cdots & a_{i_1 j_q} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i_q j_1} & \cdots & a_{i_q j_q} \end{pmatrix} \ .$$

Si ponga

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} a_{i_1 1} & \cdots & a_{i_1 n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i_q 1} & \cdots & a_{i_q n} \end{pmatrix} = (\widetilde{a}_1, \ldots, \widetilde{a}_n) \in K^{q\times n}, \quad \widetilde{b} = \begin{pmatrix} b_{i_1} \\ \vdots \\ b_{i_q} \end{pmatrix} \in K^q \ ,$$

e si consideri il sistema

$$\widetilde{A}x = \widetilde{b}$$

di q equazioni nella incognita $x \in K^n$.

Si ponga

$$\begin{aligned} S &= \left\{ x \in K^n : Ax = b \right\} \\ \widetilde{S} &= \left\{ x \in K^n : \widetilde{A}x = \widetilde{b} \right\} \end{aligned} \quad ;$$

ovviamente si ha

$$S \subset \widetilde{S} \ .$$

Le considerazioni seguenti provano che

$$S = \widetilde{S}$$

ed indicano un modo per determinare gli elementi di $\widetilde{S}$:

- ovviamente si ha
  $$\ker \mathscr{L}_A \subset \ker \mathscr{L}_{\widetilde{A}} \ ;$$
  per il Teorema 3.2.2 si ha
  $$\begin{aligned} \dim \ker \mathscr{L}_A &= n - \dim \mathrm{Im} \mathscr{L}_A = \\ & n - \dim \langle a_1, \ldots, a_n \rangle = n - \mathrm{rank} A = n - q \ , \\ \dim \ker \mathscr{L}_{\widetilde{A}} &= n - \dim \mathrm{Im} \mathscr{L}_{\widetilde{A}} = \\ & n - \dim \langle \widetilde{a}_1, \ldots, \widetilde{a}_n \rangle = n - \mathrm{rank} \widetilde{A} = n - q \ ; \end{aligned}$$
  si ha quindi
  $$\begin{aligned} & \dim \ker \mathscr{L}_A = \dim \ker \mathscr{L}_{\widetilde{A}} = n - q \ , \\ & \ker \mathscr{L}_A = \ker \mathscr{L}_{\widetilde{A}} \ ; \end{aligned}$$
- essendo
  $$Ax = b, \quad \widetilde{A}x = \widetilde{b}$$
  risolubili, esistono
  $$s \in S = \left\{ x \in K^n : Ax = b \right\}, \quad \widetilde{s} \in \widetilde{S} = \left\{ x \in K^n : \widetilde{A}x = \widetilde{b} \right\} \ ;$$
  allora per il Teorema 3.1.3 si ha
  $$S = s + \ker \mathscr{L}_A, \quad \widetilde{S} = \widetilde{s} + \ker \mathscr{L}_{\widetilde{A}}$$
- essendo
  $$S \subset \widetilde{S} \ ,$$
  esiste $\xi \in \ker \mathscr{L}_{\widetilde{A}}$ tale che
  $$s = \widetilde{s} + \xi \ ;$$

tenuto conto che

$$\ker\mathscr{L}_A = \ker\mathscr{L}_{\widetilde{A}} \ ,$$

si ha

$$S = s + \ker\mathscr{L}_A = (\widetilde{s} + \xi) + \ker\mathscr{L}_{\widetilde{A}} = \\ \widetilde{s} + \big(\xi + \ker\mathscr{L}_{\widetilde{A}}\big) = \widetilde{s} + \ker\mathscr{L}_{\widetilde{A}} = \widetilde{S} \ ;$$

- dai risultati precedenti segue quindi che si ha

$$S = \widetilde{S} = \widetilde{s} + \ker\mathscr{L}_{\widetilde{A}} \ , \\ \dim\ker\mathscr{L}_{\widetilde{A}} = n - q \ ;$$

per determinare S è quindi sufficiente

  - determinare una soluzione $\widetilde{s}$ del sistema $\widetilde{A}x = \widetilde{b}$,
  - determinare una base di $\ker\mathscr{L}_{\widetilde{A}}$, ossia una famiglia linearmente indipendente costituita da $n - q$ soluzioni

$$\xi_1, \ldots, \xi_{n-q}$$

del sistema omogeneo $\widetilde{A}x = 0$;

con tali informazioni si ottengono le seguenti descrizioni di S:

  - $S = \widetilde{s} + \langle \xi_1, \ldots, \xi_{n-q} \rangle$
  - S è l'insieme degli elementi $x \in K^n$ descritti parametricamente da

$$x = \widetilde{s} + \lambda_1\xi_1 + \cdots + \lambda_{n-q}\xi_{n-q} \qquad \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-q} \in K \ ;$$

- quanto alla determinazione di

$$\widetilde{s}, \xi_1, \ldots, \xi_{n-q} \ ,$$

si può procedere come segue:

  - si indichino con

$$l_1 < \ \cdots \ < l_{n-q}$$

gli elementi dell'insieme

$$\big\{1, \ldots, n\big\} \setminus \big\{j_1, \ldots, j_q\big\} \ ;$$

  - si determini l'unica soluzione $\widetilde{s}$ di

$$\widetilde{A}x = \widetilde{b}$$

tale che

$$\begin{pmatrix} \widetilde{s}_{l_1} \\ \vdots \\ \widetilde{s}_{l_{n-q}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} ;$$

(si osservi che

$$\begin{pmatrix} \widetilde{s}_{j_1} \\ \vdots \\ \widetilde{s}_{j_q} \end{pmatrix}$$

si ottiene risolvendo, ad esempio con il Torema di Cramer, il sistema

$$B \begin{pmatrix} x_{j_1} \\ \vdots \\ x_{j_q} \end{pmatrix} = \widetilde{b} \text{);}$$

◦ si determinino le uniche soluzioni

$$\xi_1, \ldots, \xi_{n-q}$$

di

$$\widetilde{A}x = 0$$

tali che

$$\begin{pmatrix} \xi_{l_1 1} \\ \vdots \\ \xi_{l_{n-q} 1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \xi_{l_1 2} \\ \vdots \\ \xi_{l_{n-q} 2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots$$

$$\cdots, \begin{pmatrix} \xi_{l_1, n-q} \\ \vdots \\ \xi_{l_{n-q}, n-q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(si osservi che, per $\nu = 1, \ldots, n-q$,

$$\begin{pmatrix} \xi_{j_1 \nu} \\ \vdots \\ \xi_{j_q \nu} \end{pmatrix}$$

si ottiene risolvendo, ad esempio con il Teorema di Cramer, il sistema

$$B \begin{pmatrix} x_{j_1} \\ \vdots \\ x_{j_q} \end{pmatrix} = -\widetilde{a}_{l_\nu} \text{) .}$$

4.10 Elementi di $\mathrm{Hom}(K^n, K^m)$: dal comportamento su una base alla rappresentazione $\mathscr{L}_A$

Sia K un campo.

Sia
$$(v_1, \dots, v_n)$$
una base qualsiasi di K^n, e sia
$$(w_1, \dots, w_n)$$
una famiglia qualsiasi di elemeti di K^m.

Per il Teorema 3.2.3 esiste una ed una sola applicazione lineare
$$f : K^n \to K^m$$
tale che
$$f(v_1) = w_1, \dots, f(v_n) = w_n \ .$$

Per il Teorema 3.4.3 esiste una ed una sola matrice
$$A \in K^{m\times n}$$
tale che
$$f = \mathscr{L}_A \ ,$$
ossia tale che
$$f(x) = \mathscr{L}_A(x) = Ax \qquad \forall x \in K^n \ .$$

Il Teorema seguente indica come calcolare la matrice
$$A \in K^{m\times n} \ ,$$
tramite le matrici
$$(v_1, \dots, v_n) \in K^{n\times n}, \quad (w_1, \dots, w_n) \in K^{m\times n} \ .$$

4.10.1 Teorema: Sussistono gli asserti:

a) $(v_1, \dots, v_n)$ è una matrice invertibile in $K^{n\times n}$,

b) $A = (w_1, \dots, w_n)(v_1, \dots, v_n)^{-1}$.

Cenno. a). Essendo $(v_1, \dots, v_n)$ una base di K^n, per il Teorema 4.5.2 si ha
$$\det(v_1, \dots, v_n) \neq 0 \ ;$$
allora, per il Teorema 4.5.3
$$(v_1, \dots, v_n)$$

è una matrice invertibile in $K^{n\times n}$.

Per la Definizione 3.5.1 si ha:

$$A(v_1,\ldots,v_n) = (Av_1,\ldots,Av_1) = (w_1,\ldots,w_n) \ ;$$

ne segue

$$A(v_1,\ldots,v_n)(v_1,\ldots,v_n)^{-1} = (w_1,\ldots,w_n)(v_1,\ldots,v_n)^{-1} \ ,$$

e quindi, essendo

$$(v_1,\ldots,v_n)(v_1,\ldots,v_n)^{-1} = I \ ,$$

si ottiene

$$A = (w_1,\ldots,w_n)(v_1,\ldots,v_n)^{-1} \ .$$

■

Capitolo 5

Autospazi

5.1 Autovalori, autovettori e autospazi

Sia K un campo, V uno spazio vettoriale su K, e sia (vedi Definizione 3.3.4)

$$f \in \mathrm{End}(V) \ .$$

5.1.1 Definizione di autovalore: Sia $\lambda \in K$; se:

- $\exists v \in V$ tale che $v \neq 0, \ f(v) = \lambda v$,

allora:

- λ si dice um *autovalore* di f.

5.1.2 Definizione di autovettore: Sia $v \in V$; se:

- $v \neq 0$ ed $\exists \lambda \in K$ tale che $f(v) = \lambda v$,

allora:

- v si dice um *autovettore* di f.

5.1.3 Nota: Siano $v \in V, \ \lambda \in K$ tali che

$$v \neq 0, \quad f(v) = \lambda v \ ;$$

allora:

- λ è un autovalore di f,
- v è un autovettore di f,
- λ è univocamente determinato da v
  (se $f(v) = \mu v$, allora $(\lambda - \mu)v = 0$, ed essendo $v \neq 0$ si ha $\mu = \lambda$),

e si dice che:

- λ è **l'**autovalore di v,
- v è **un** autovettore di λ.

5.1.4 Definizione di autospazio: Sia $\lambda \in K$ un autovalore di f; sia

$$V_\lambda$$

il sottinsieme di V costituito da 0 e dagli autovettori di f di autovalore λ.

Si verifichi che:

- $V_\lambda = \{v \in V : f(v) = \lambda v\}$,
- $V_\lambda = \ker(f - \lambda \iota)$,
- V_λ è un sottospazio di V ,
- $V_\lambda \neq \{0\}$.

V_λ si dice *l'autospazio* di f di autovalore λ.

Il seguente Teorema prova che la somma di autospazi relativi ad autovalori a due a due diversi è diretta.

5.1.5 Teorema: Siano

$$\lambda_1, \ldots, \lambda_h \in K$$

autovalori di f a due a due diversi.

Allora la somma

$$V_{\lambda_1} + \cdots + V_{\lambda_h}$$

è diretta, e può quindi essere indicata con

$$V_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_h} \ .$$

Cenno. Tenuto conto del Teorema 2.14.2, è sufficiente dimostrare l'asserto:

$$\begin{cases} v_1 \in V_{\lambda_1}, \ldots, v_h \in V_{\lambda_h} \\ v_1 + \cdots + v_h = 0 \end{cases} \Rightarrow v_1 = \cdots = v_h = 0 \ .$$

Se $h = 1$, l'asserto è ovvio.

Si supponga l'asserto già provato per $h = \nu$; le considerazioni seguenti provano cha allora l'asserto sussiste anche per $h = \nu + 1$.

Siano $v_1, \ldots, v_{\nu+1}$ tali che

$$\begin{cases} v_1 \in V_{\lambda_1}, \ldots, v_{\nu+1} \in V_{\lambda_{\nu+1}} \\ v_1 + \cdots + v_{\nu+1} = 0 \end{cases} \quad ;$$

allora:

$$\begin{gathered} f(v_1+\cdots+v_{\nu+1})=0 \\ \Downarrow \\ f(v_1)+\cdots+f(v_{\nu+1})=0 \\ \Downarrow \\ \lambda_1 v_1+\cdots+\lambda_{\nu+1}v_{\nu+1}=0\ . \end{gathered}$$

Ovviamente:

$$\lambda_{\nu+1}v_1+\cdots+\lambda_{\nu+1}v_{\nu+1}=0\ ,$$

allora

$$\underbrace{(\lambda_{\nu+1}-\lambda_1)v_1}_{\in V_{\lambda_1}}+\cdots+\underbrace{(\lambda_{\nu+1}-\lambda_\nu)v_\nu}_{\in V_{\lambda_\nu}}=0\ ,$$

e quindi, essendo l'asserto provato per $h=\nu$,

$$(\lambda_{\nu+1}-\lambda_1)v_1=0,\ldots,(\lambda_{\nu+1}-\lambda_\nu)v_\nu=0\ .$$

Essendo

$$\lambda_{\nu+1}-\lambda_1\neq 0,\ldots,\lambda_{\nu+1}-\lambda_\nu\neq 0\ ,$$

si ottiene

$$v_1=0,\ldots,v_\nu=0\ ;$$

essendo

$$v_1+\cdots+v_{\nu+1}=0\ ,$$

si ottiene anche $v_{\nu+1}=0$. ■

Per dare un esempio significativo occorrono le seguenti nozioni.

5.1.6 Nozioni sulle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{C}$: Si consideri una funzione

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}\ ;$$

per $\forall t\in\mathbb{R}$ si ponga

$$f(t)=a(t)+ib(t) \qquad\qquad a(t),b(t)\in\mathbb{R}\ ;$$

le conseguenti funzioni

$$a,b:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$$

si dicono rispettivamente la *parte reale* e la *parte immaginaria* di f.

La funzione f si dice:

- C^0, o *continua*, se $a,b\in C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$; lo spazio vettoriale su $\mathbb{C}$ delle funzioni continue
$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$$
si denota con $C^0(\mathbb{R},\mathbb{C})$

- C^h, o *h volte derivabile con continuità* ($1 \leqslant h \leqslant \infty$), se $a, b \in C^h(\mathbb{R}, \mathbb{R})$; lo spazio vettoriale su $\mathbb{C}$ delle funzioni C^h

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$$

si denota con $C^h(\mathbb{R}, \mathbb{C})$;

se $f = a + bi \in C^h(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, la *derivata h-esima* di f è definita da:

$$f^{(h)} := a^{(h)} + ib^{(h)}$$

siano $f, g \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, e sia $c \in \mathbb{C}$; si provi che

$$\begin{cases} (f+g)^{(1)} = f^{(1)} + g^{(1)} \\ (cf)^{(1)} = cf^{(1)} \\ (fg)^{(1)} = f^{(1)}g + fg^{(1)} \end{cases}$$

sia

$$s = \sigma + i\omega \in \mathbb{C} \qquad \sigma, \omega \in \mathbb{R} \ ,$$

si denota con e^{st} la funzione della variabile $t \in \mathbb{R}$ definita da

$$e^{st} := e^{\sigma t}(\cos \omega t + i \sin \omega t \ ;)$$

ovviamente si ha

$$e^{st} \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \ ;$$

si verifichi che

$$D\left(e^{st}\right) = se^{st}$$

siano $s_1 = \sigma_1 + i\omega_1, s_2 = \sigma_2 + i\omega_2 \in \mathbb{C}$; si verifichi che

$$e^{(s_1+s_2)t} = e^{s_1 t} e^{s_2 t} \ .$$

5.1.7 Esempio: Si consideri l'applicazione $\mathbb{C}$-lineare

$$D : C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \to C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \ ;$$

si verifichi che:

- $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ è un autovalore di D;
  Cenno. $e^{\lambda t} \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}), e^{\lambda t} \neq 0, D\left(e^{\lambda t}\right) = \lambda e^{\lambda t}$. ■
- per $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ si ha

$$V_\lambda = \left\{ f(t) \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}) : D(f(t)) = \lambda \cdot f(t) \right\} = \langle e^{\lambda t} \rangle_{\mathbb{C}} \ ;$$

Cenno. Ovviamente

$$V_\lambda \supset \langle e^{\lambda t} \rangle_{\mathbb{C}} \ .$$

Sia
$$f(t) \in V_\lambda \ ;$$
essendo
$$f^{(1)}(t) = \lambda \cdot f(t)$$
si ha
$$D\left(f(t)e^{-\lambda t}\right) = f^{(1)}(t)e^{-\lambda t} + f(t)\left(-\lambda e^{-\lambda t}\right) =$$
$$(\lambda \cdot f(t))e^{-\lambda t} + f(t)\left(-\lambda e^{-\lambda t}\right) = 0 \ ;$$
allora
$$f(t)e^{-\lambda t}$$
è costante, e quindi esiste $c \in \mathbb{C}$ tale che
$$f(t)e^{-\lambda t} = c, \quad f(t) = ce^{\lambda t} \ ;$$
ne segue
$$f(t) \in \langle e^{\lambda t} \rangle_{\mathbb{C}} \ .$$

■

- siano
$$\lambda_1, \ldots, \lambda_1 \in \mathbb{C}$$
a due a due diversi; allora la somma
$$\langle e^{\lambda_1 t} \rangle_{\mathbb{C}} + \cdots + \langle e^{\lambda_h t} \rangle_{\mathbb{C}}$$
è diretta (usare il Torema 5.1.5);
- siano
$$\lambda_1, \ldots, \lambda_1 \in \mathbb{C}$$
a due a due diversi; allora la famiglia
$$\left(e^{\lambda_1 t}, \ldots, e^{\lambda_h t}\right)$$
è linearmente indipendente su $\mathbb{C}$ (per il Torema 2.14.2 tale famiglia è una base di
$$\langle e^{\lambda_1 t} \rangle_{\mathbb{C}} \oplus \cdots \oplus \langle e^{\lambda_h t} \rangle_{\mathbb{C}} \ ).$$

5.2 Autovalori, autovettori e autospazi di matrici

Sia K un campo, e sia
$$A \in K^{n \times n} \ ;$$
si consideri l'applicazione K-lineare
$$\mathscr{L}_A : K^n \to K^n$$
associata alla matrice A (vedi Sezione 3.4), definita da
$$\mathscr{L}_A(x) = Ax \qquad \forall x \in K^n \ .$$

5.2.1 Convenzione: Siano

$$\lambda \in K,\ a \in K^n \ ;$$

- se λ è un autovalore di $\mathscr{L}_A$, si dice che λ è un *autovalore di* A;
- se a è un autovettore di $\mathscr{L}_A$, si dice che a è un *autovettore di* A;
- se λ è un autovalore di A (ossia di $\mathscr{L}_A$) e V_λ è l'autospazio di $\mathscr{L}_A$ di autovalore λ, si dice che V_λ è l'*autospazio di* A *di autovalore* λ.

5.2.2 Nota: Siano

$$\lambda \in K,\ a \in K^n \ ;$$

si verifichi che:

- λ è un autovalore autovalore di A se e solo se

$$\exists b \in K^n \text{ tale che } b \neq 0,\ Ab = \lambda b \ ;$$

- a è un autovettore di A se e solo se

$$a \neq 0 \text{ e } \exists \mu \in K \text{ tale che } Ab = \mu a \ .$$

Il Teorema seguente consente di decidere se un $\lambda \in K$ sia o meno un autovalore di A, e in caso affermativo dice come calcolare il corrispondente autospazio.

5.2.3 Teorema: Sia

$$\lambda \in K \ ;$$

si verifichi che:

- sono equivalenti gli asserti:
  - λ è un autovalore di A,
  - il sistema omogeneo

    $$(A - \lambda I)x = 0$$

    di n equazioni, nell'incognita $x \in K^n$, ha soluzioni *non nulle*,
  - $\det(A - \lambda I) = 0$;

e che:

- se λ è un autovalore di a, allora:
  - l'autospazio V_λ di A è l'insieme delle soluzioni in K^n del sistema

    $$(A - \lambda I)x = 0 \ ,$$
  - $\dim V_\lambda = n - \operatorname{rank}((A - \lambda I)) > 0$.

La Definizione e il Teorema seguenti, riconducono il calcolo degli autovalori di $A \in K^{n\times n}$ al calcolo delle radici in K di un opportuno polinomio di grado n.

5.2.4 Definizione: Si consideri l'anello $K[x]$ dei polinomi nell'indeterminata x, a coefficienti in K.

Il polinomio

$$\Gamma(x) = \det(A - xI) \in K[x]$$

si dice il *polinomio caratteristico* di A.

La seguente espressione mette in risalto tre coefficienti di tale polinomio (le espressioni per i rimanenti coefficienti sono più complesse):

$$\Gamma(x) = (-1)^n x^n + (-1)^{n-1}(\operatorname{Tr} A)x^{n-1} + \cdots + \det A$$

($\operatorname{Tr} A$ denota la somma

$$a_{11} + \cdots + a_{nn}$$

degli elementi della diagonale principale di A, e si dice la *traccia* di A).

5.2.5 Teorema: Sia $\lambda \in K$; sono equivalenti gli asserti:

a) λ è un autovalore di A,

b) $\Gamma(\lambda) = 0$, ossia λ è una radice del polinomio caratteristico $\Gamma(x)$ di A.

In particolare si ha:

c) il numero degli autovalori di $A \in K^{n\times n}$ è $\leqslant n$.

Cenno. Per l'equivalenza di a) e b), si osservi che per $\forall \lambda \in K$ si ha

$$\Gamma(\lambda) = \det(A - \lambda I) \ ,$$

e si applichi il Teorema 5.2.3.
Ovvia conseguenza del Teorema di Ruffini, tenuto conto che $\deg \Gamma(x) = n$.

■

Oseervazioni:

- considerando il campo $\mathbb{C}$ ed una matrice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, per il Teorema di Gauss il polinomio $\Gamma(x)$ ha radici in C; di conseguenza A ha autovalori, autovettori e autospazi;

- considerando il campo $\mathbb{R}$ ed una matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, A possiede autovalori, autovettori e autospazi se e solo se il polinomio $\Gamma(x)$ ha almeno una radice reale.

Esempi di applicazione dei risultati teorici al calcolo degli autovalori, autovettori e autospazi di una matrice:

-
-

Esempi di costruzione di matrici verificanti condizioni sugli autovalori, autovettori e autospazi:

-
-

5.3 Matrici diagonalizzabili e diagonalizzazione

Sia K un campo, e sia
$$A \in K^{n\times n} \ .$$

5.3.1 Definizione: *Diagonalizzare A in $K^{n\times n}$* significa *determinare*

- $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$,
- una matrice invertibile $H \in K^{n\times n}$,

tali che:
$$A = H \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} H^{-1} \ .$$

Se tale problema ha soluzione, allora A si dice una matrice *diagonalizzabile in $K^{n\times n}$*.

Le considerazioni che seguono forniscono una condizione necessaria e sufficiente di diagonalizzabilità di A in termini di autovettori di A.

Si verifichi che:

- se A è diagonalizzabile in $K^{n\times n}$ e
$$A = H \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} H^{-1}$$
è una *diagonalizzazione* di A in $K^{n\times n}$, allora posto
$$H = (h_1, \ldots, h_n)$$

si ha

$$AH = H \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$(Ah_1, \ldots, Ah_n) = (\lambda_1 h_1, \ldots, \lambda_n h_n) \ ;$$

pertanto:

- ◦ $(h_1, \ldots, h_n)$ è una base di K^n (perché?) costituita da autovettori di A;

- se viceversa esiste una base

$$(h_1, \ldots, h_n)$$

di K^n costituita da autovettori di A, detti

$$\lambda_1 \ldots, \lambda_n \in K$$

i corrispondenti autovalori, allora si ha

$$(Ah_1, \ldots, Ah_n) = (\lambda_1 h_1, \ldots, \lambda_n h_n)$$

$$A(h_1, \ldots, h_n) = (h_1, \ldots, h_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$A = (h_1, \ldots, h_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} (h_1, \ldots, h_n)^{-1} \ ;$$

pertanto, posto

$$H = (h_1, \ldots, h_n) \in K^{n\times n}$$

si ha:

- ◦ A è diagonalizzabile in $K^{n\times n}$,
- ◦ $$A = H \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} H^{-1}$$

  è una *diagonalizzazione* di A in $K^{n\times n}$.

Sussite pertanto il seguente Teorema (completare la dimostrazione per esercizio).

5.3.2 Teorema: Sono equivalenti gli asserti:

a) A è diagonalizzabile in $K^{n\times n}$,

b) esiste una base di K^n costituita da autovettori di A,

c) A ha autovalori, e detti

$$\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in K$$

gli autovalori di A, messi in lista senza ripetizioni, si ha

$$K^n = V_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_r} \ ,$$

d) A ha autovalori, e detti

$$\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in K$$

gli autovalori di A, messi in lista senza ripetizioni, si ha

$$\dim V_{\lambda_1} + \cdots + \dim V_{\lambda_r} = n \ .$$

Esercizi: $\cdots\cdots$
Il seguente Teorema fornisce un condizione necessaria per la diagonalizzabilità di A.

5.3.3 Teorema: Se:

- A è diagonalizzabile in $K^{n\times n}$,

allora:

- il polinimio caratteristico

$$\Gamma(x) = \det(A - xI) \in K[x]$$

di A è fattorizzabile in $K[x]$ in fattori di primo grado.

Cenno. Sia

$$A = H \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} H^{-1}$$

una *diagonalizzazione* di A in $K^{n\times n}$.

Si ha:

$$\Gamma(x) = \det(A - xI) =$$

$$\det\left(H\begin{pmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{pmatrix}H^{-1} - xI\right) =$$

$$\det\left(H\begin{pmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{pmatrix}H^{-1} - H(xI)H^{-1}\right) =$$

$$\det\left(H\begin{pmatrix}\lambda_1 - x & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n - x\end{pmatrix}H^{-1}\right) =$$

$$(\det H)\det\begin{pmatrix}\lambda_1 - x & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n - x\end{pmatrix}\det(H^{-1}) =$$

$$(\lambda_1 - x)\cdots(\lambda_n - x)\ .$$

■

Esempio: Applicando il Teorema precedente, si calcoli il polinomio caratterristico della matrice

$$A = () \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

e se ne deduca che tale matrice non è diagonalizzabile in $\mathbb{R}^{3\times 3}$.

5.4 Endomorfismi di spazi di tipo finito: calcolo autovalori, autovettori, autospazi

Le considerazioni che seguono, provano che il calcolo degli autovalori, autovettori e autospazi di un endomorfismo di un qualsiasi spazio vettoriale di tipo finito è riconducibile al calcolo degli autovalori, autovettori e autospazi di una sua qualsiasi matrice associata.

Sia V uno spazio di tipo finito sul campo K, e sia $\dim V = n$. Sia

$$f : V \to V$$

una applicazione lineare.
Sia

$$\mathscr{V} = (v_1, \ldots, v_m)$$

una base di V. Sia
$$A \in K^{n\times n}$$
la matrice *associata ad f rispetto alla base $\mathscr{V}$*, ossia rispetto alla base $\mathscr{V}$ usata sia in V come dominio di f, sia in V come codominio di f (vedi Definizione 3.10.1).

5.4.1 Teorema: Siano
$$\lambda \in K, \quad c_1, \ldots, c_n \in K \ ;$$
sono equivalenti gli asserti:

a) $f(c_1v_1 + \cdots + c_nv_n) = c_1v_1 + \cdots + c_nv_n$

b) $A \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$.

(verificare per esercizio).

Esercizi:

- sia $\lambda \in K$; si provi che sono equivalenti gli asserti:
  - λ è un autovalore di f,
  - λ è un autovalore di A,
- sia $v \in V$ tale che
$$v \equiv c \in K^n \ ,$$
  e sia $\lambda \in K$; si provi che sono equivalenti gli asserti:
  - v è un autovettore di f di autovalore λ,
  - c è un autovettore di A di autovalore λ;
- sia $\lambda \in K$ un autovalore di f, e quindi anche di A; sia
$$V_\lambda \subset K^n$$
  l'autospazio di A di autovalore λ, e sia
$$V_{f,\lambda} \subset V$$
  l'autospazio di f di autovalore λ;
  come utilizzare una base di
$$V_\lambda \subset K^n$$
  per ottenere una base di
$$V_{f,\lambda} \subset V \ ?$$

Capitolo 6

Spazi con prodotto scalare e hermitiano

6.1 Spazi reali con prodotto scalare

Sia V uno spazio vettoriale sul campo reale $\mathbb{R}$.

Un *prodotto scalare* in V è una applicazione

$$\begin{array}{rccc} \bullet: & V \times V & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (v, w) & \longrightarrow & v \bullet w \end{array}$$

- *bilineare*, ossia: per $\forall v, w, z \in V$ e per $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ si ha

$$\left\{ \begin{array}{l} (v+w) \bullet z = v \bullet z + w \bullet z \\ (\lambda v) \bullet z = \lambda(v \bullet z) \end{array} \right. \quad \textit{(linearità a sinistra)}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} z \bullet (v+w) = z \bullet v + z \bullet w \\ z \bullet (\lambda v) = \lambda(z \bullet v) \end{array} \right. \quad \textit{(linearità a destra)}$$

- *simmetrica*, ossia: per $\forall v, w \in V$ si ha

$$w \bullet v = v \bullet w$$

6.1.1 Definizioni: Siano $v, w \in V$:

- il numero
$$v \bullet w \in \mathbb{R}$$
si dice il *prodotto scalare* di v e w;
- se
$$v \bullet w = 0 \ ,$$
allora v e w si dicono *ortogonali* e si scrive
$$v \perp w \ ;$$

- ◦ se
$$v \bullet v = 0 \ ,$$
allora v si dice un vettore *isotropo*.

6.1.2 Definizioni: Siano W un sottospazio di V e $v \in V$:

- se per $\forall w \in W$ si ha
$$v \perp w, \text{ ossia } v \bullet w = 0 \ ,$$
allora si dice che v *è ortogonale a* W, e si scrive
$$v \perp W \ ;$$
- se
$$W = \langle w_1, \ldots, w_h \rangle \ ,$$
si verifichi che
$$v \perp W \Leftrightarrow v \perp w_1, \ldots, v \perp w_h \ ;$$
- si pone
$$W^{\perp} = \big\{ v \in V : v \perp W \big\} \ ;$$
si verifichi che $W^{\perp}$ è un sottospazio di V.

Per indicare il comportamento di $v \bullet v$ rispetto "al segno", si usa la terminologia seguente.

6.1.3 Definizioni:

a) se
$$v \bullet v > 0 \quad \forall v \in V, v \neq 0$$
allora si dice che il prodotto scalare è *definito positivo*;

b) se
$$v \bullet v \geqslant 0 \quad \forall v \in V$$
allora si dice che il prodotto scalare è *semidefinito positivo*;

c) se
$$v \bullet v < 0 \quad \forall v \in V, v \neq 0$$
allora si dice che il prodotto scalare è *definito negativo*;

d) se
$$v \bullet v \leqslant 0 \quad \forall v \in V$$
allora si dice che il prodotto scalare è *semidefinito negativo*;

e) se

$$\exists v, w \in V \quad v \bullet v > 0, w \bullet w < 0$$

allora si dice che il prodotto scalare è *di tipo indefinito*.

Conto tipico: Il prodotto scalare di due combinazioni lineari di una data famiglia finita di vettori si esegue come indicato dal seguente esempio:

$$\begin{aligned}(a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3) \bullet (b_1v_1 + b_2v_2 + b_3v_3) = \\ &(a_1v_1) \bullet (b_1v_1 + b_2v_2 + b_3v_3)+ \\ &(a_2v_2) \bullet (b_1v_1 + b_2v_2 + b_3v_3)+ \\ &(a_3v_3) \bullet (b_1v_1 + b_2v_2 + b_3v_3) = \\ &(a_1v_1) \bullet (b_1v_1) + (a_1v_1) \bullet (b_2v_2) + (a_1v_1) \bullet (b_3v_3)+ \\ &(a_2v_2) \bullet (b_1v_1) + (a_2v_2) \bullet (b_2v_2) + (a_2v_2) \bullet (b_3v_3)+ \\ &(a_3v_3) \bullet (b_1v_1) + (a_3v_3) \bullet (b_2v_2) + (a_3v_3) \bullet (b_3v_3) = \\ &\qquad a_1b_1(v_1 \bullet v_1) + a_1b_2(v_1 \bullet v_2) + a_1b_3(v_1 \bullet v_3)+ \\ &\qquad a_2b_1(v_2 \bullet v_1) + a_2b_2(v_2 \bullet v_2) + a_2b_3(v_2 \bullet v_3)+ \\ &\qquad a_3b_1(v_3 \bullet v_1) + a_3b_2(v_3 \bullet v_2) + a_3b_3(v_3 \bullet v_3) = \ldots\end{aligned}$$

il conto può essere proseguito osservando che

$$v_2 \bullet v_1 = v_1 \bullet v_2, \quad v_3 \bullet v_1 = v_1 \bullet v_3, \quad v_3 \bullet v_2 = v_2 \bullet v_3 \; .$$

6.1.4 Esempi: Si consideri lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$. Si verifichi che:

▼ data una matrice simmetrica

$$A \in \mathbb{R}^{n \times n} \; ,$$

l'applicazione

$$\bullet : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

definita da

$$x \bullet y = x^T A y$$

è un prodotto scalare in $\mathbb{R}^n$;

(*Cenno:* si ha

$$\begin{aligned}\mathbb{R} \ni y \bullet x = y^T A x = \left(y^T A x\right)^T = \\ x^T A^T y = x^T A y = x \bullet y \; .)\end{aligned}$$

tale prodotto scalare si dice il *prodotto scalare associato alla matrice simmetrica* A;

♦ sia

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

una matrice simmetrica e sia

$$\bullet : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$

il prodotto scalare associato alla matrice A; si verifichi che:

∘ si ha

$$x \bullet y = (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij} x_i y_j \ ;$$

∘ $e_i \bullet e_j = a_{ij}$ (si ricordi che $a_{ij} = a_{ji}$)

♦ sia

$$\bullet : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

un prodotto scalare in $\mathbb{R}^n$;

si consideri la matrice simmetrica

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} e_1 \bullet e_1 & e_1 \bullet e_2 & \cdots & e_1 \bullet e_n \\ e_2 \bullet e_1 & e_2 \bullet e_2 & \cdots & e_2 \bullet e_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ e_n \bullet e_1 & e_n \bullet e_2 & \cdots & e_n \bullet e_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n} \ ,$$

e si provi che

$$x \bullet y = x^T A y \ ;$$

▲ dagli item precedenti si deduca che i prodotti scalari in $\mathbb{R}^n$ sono tutti e soli i prodotti scalari

$$\bullet : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

associati alle matrici simmetriche $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

Tenuto conto che che i prodotti scalari in $\mathbb{R}^n$ sono tuti e soli i prodotti scalari associati alle matrici simmetriche di $\mathbb{R}^{n\times n}$, a tali matrici si applica la terminologia seguente.

6.1.5 Definizioni: Sia

$$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

una matrice simmetrica.

La matrice A si dice

definita positiva	*semidefinita positiva*
definita negativa	*semidefinita negativa* ,
di tipo indefinito	

a seconda che il prodotto scalare associato ad A è rispettivamente

definito positivo	*semidefinito positivo*
definito negativo	*semidefinito negativo*
di tipo indefinito	

6.2 Spazi complessi con prodotto hermitiano

Sia V uno spazio vettoriale sul campo complesso $\mathbb{C}$.

Un *prodotto hermitiano* in V è una applicazione

$$\begin{array}{rccc} \bullet : & V \times V & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & (v, w) & \longrightarrow & v \bullet w \end{array}$$

- *bilineare hermitiana*, ossia: per $\forall v, w, z \in V$ e per $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ si ha

$$\begin{cases} (v + w) \bullet z = v \bullet z + w \bullet z \\ (\lambda v) \bullet z = \lambda (v \bullet z) \end{cases} \qquad \textit{(linearità a sinistra)}$$

$$\begin{cases} z \bullet (v + w) = z \bullet v + z \bullet w \\ z \bullet (\lambda v) = \overline{\lambda} (z \bullet v) \end{cases} \qquad \textit{(linearità hermitiana a destra)}$$

- *simmetrica hermitiana*, ossia: per $\forall v, w \in V$ si ha

$$w \bullet v = \overline{v \bullet w}$$

6.2.1 Nota: come conseguenza della simmetria hermitiana, per

$$\forall v \in V$$

si ha

$$v \bullet v = \overline{v \bullet v} \ ,$$

e quindi

$$v \bullet v \in \mathbb{R} \ .$$

6.2.2 Definizioni: Siano $v, w \in V$:

- il numero

$$v \bullet w \in \mathbb{C}$$

si dice il *prodotto hermitiano* di v e w;

- se

$$v \bullet w = 0 \ ,$$

allora:

- ∘ per la simmetria hermitiana si ha anche

$$w \bullet v = 0$$

- ∘ v e w si dicono *ortogonali* e si scive

$$v \perp w \ ;$$

∘ se $v \bullet v = 0$, allora v si dice un vettore *isotropo.*

6.2.3 Definizioni: Siano W un sottospazio di V e $v \in V$:

- se per $\forall w \in W$ si ha

$$v \perp w, \text{ ossia } v \bullet w = 0 \ ,$$

allora si dice che v *è ortogonale a* W, e si scrive

$$v \perp W \ ;$$

- se

$$W = \langle w_1, \ldots, w_h \rangle \ ,$$

si verifichi che

$$v \perp W \Leftrightarrow v \perp w_1, \ldots, v \perp w_h \ ;$$

- si pone

$$W^{\perp} = \left\{ v \in V : v \perp W \right\} \ ;$$

si verifichi che $W^{\perp}$ è un sottospazio di V.

Tenuto conto di 6.2.1, per $\forall v \in V$ si ha

$$v \bullet v \in \mathbb{R} \ .$$

Per indicare il comportamento di $v \bullet v$ rispetto "al segno", si usa la terminologia seguente.

6.2.4 Definizione:

a) se

$$v \bullet v > 0 \quad \forall v \in V, v \neq 0$$

allora si dice che il prodotto hermitiano è *definito positivo*;

b) se

$$v \bullet v \geqslant 0 \quad \forall v \in V$$

allora si dice che il prodotto hermitiano è *semidefinito positivo*;

c) se
$$v \bullet v < 0 \quad \forall v \in V, v \neq 0$$
allora si dice che il prodotto hermitiano è *definito negativo*;

d) se
$$v \bullet v \leqslant 0 \quad \forall v \in V$$
allora si dice che il prodotto hermitiano è *semidefinito negativo*;

e) se
$$\exists v, w \in V \quad v \bullet v > 0, w \bullet w < 0$$
allora si dice che il prodotto hermitiano è *di tipo indefinito*.

Conto tipico: Il prodotto hermitiano di due combinazioni lineari di una data famiglia finita di vettori si esegue come indicato dal seguente esempio:

$$\begin{aligned}
&(c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3) \bullet (d_1v_1 + d_2v_2 + d_3v_3) = \\
&\qquad (c_1v_1) \bullet (d_1v_1 + d_2v_2 + d_3v_3) + \\
&\qquad (c_2v_2) \bullet (d_1v_1 + d_2v_2 + d_3v_3) + \\
&\qquad (c_3v_3) \bullet (d_1v_1 + d_2v_2 + d_3v_3) = \\
&\qquad (c_1v_1) \bullet (d_1v_1) + (c_1v_1) \bullet (d_2v_2) + (c_1v_1) \bullet (d_3v_3) + \\
&\qquad (c_2v_2) \bullet (d_1v_1) + (c_2v_2) \bullet (d_2v_2) + (c_2v_2) \bullet (d_3v_3) + \\
&\qquad (c_3v_3) \bullet (d_1v_1) + (c_3v_3) \bullet (d_2v_2) + (c_3v_3) \bullet (d_3v_3) = \\
&\qquad\qquad c_1\overline{d_1}(v_1 \bullet v_1) + c_1\overline{d_2}(v_1 \bullet v_2) + c_1\overline{d_3}(v_1 \bullet v_3) + \\
&\qquad\qquad c_2\overline{d_1}(v_2 \bullet v_1) + c_2\overline{d_2}(v_2 \bullet v_2) + c_2\overline{d_3}(v_2 \bullet v_3) + \\
&\qquad\qquad c_3\overline{d_1}(v_3 \bullet v_1) + c_3\overline{d_2}(v_3 \bullet v_2) + c_3\overline{d_3}(v_3 \bullet v_3) = \ldots
\end{aligned}$$

il conto può essere proseguito osservando che

$$v_2 \bullet v_1 = \overline{v_1 \bullet v_2}, \qquad v_3 \bullet v_1 = \overline{v_1 \bullet v_3}, \qquad v_3 \bullet v_2 = \overline{v_2 \bullet v_3}\ .$$

6.2.5 Esempi: Si consideri lo spazio vettoriale $\mathbb{C}^n$. Si verifichi che:

▼ data una matrice hermitiana
$$A \in \mathbb{C}^{n \times n}\ ,$$
l'applicazione
$$\bullet : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$$
definita da
$$x \bullet y = x^T A \overline{y}\ ;$$

è un prodotto hermitiano in $\mathbb{C}^n$;

(*Cenno:* si ha

$$\begin{aligned}&\mathbb{C} \ni y \bullet x = y^T A\overline{x} = \left(y^T A\overline{x}\right)^T = \\ &\overline{x}^T A^T y = \overline{x^T A^* \overline{y}} = \overline{x^T A \overline{y}} = \overline{x \bullet y}.\ )\end{aligned}$$

tale prodotto hermitiano si dice il *prodotto hermitiano associato alla matrice hermitiana* A;

♦ sia

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}$$

una matrice hermitiana e sia

$$\bullet : \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}$$

il prodotto scalare associato alla matrice A; si verifichi che:

- si ha

$$x \bullet y = (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{y}_1 \\ \overline{y}_2 \\ \overline{y}_3 \end{pmatrix} = \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij} x_i \overline{y}_j\ ;$$

- $e_i \bullet e_j = a_{ij}$ (si ricordi che $a_{ij} = \overline{a}_{ji}$)

♦ sia

$$\bullet : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$$

un prodotto hermitiano in $\mathbb{C}^n$;

si consideri la matrice hermitiana

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} e_1 \bullet e_1 & e_1 \bullet e_2 & \cdots & e_1 \bullet e_n \\ e_2 \bullet e_1 & e_2 \bullet e_2 & \cdots & e_2 \bullet e_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ e_n \bullet e_1 & e_n \bullet e_2 & \cdots & e_n \bullet e_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{n\times n}\ ,$$

e si provi che

$$x \bullet y = x^T A \overline{y}\ ;$$

▲ dagli item precedenti si deduca che i prodotti hermitiani in $\mathbb{C}^n$ sono tuti e soli i prodotti hermitiani

$$\bullet : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$$

associati alle matrici hermitiane $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$.

Tenuto conto che che i prodotti hermitiani in $\mathbb{C}^n$ sono tuti e soli i prodotti hermitiani associati alle matrici hermitiane di $\mathbb{C}^{n\times n}$, a tali matrici si applica la terminologia seguente.

6.2.6 Definizioni: Sia
$$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$$
una matrice hermitiana.

La matrice A si dice

definita positiva	*semidefinita positiva*
definita negativa	*semidefinita negativa* ,
di tipo indefinito	

a seconda che il prodotto hermitiano associato ad A è rispettivamente

definito positivo	*semidefinito positivo*
definito negativo	*semidefinito negativo*
di tipo indefinito	

6.3 Spazi di tipo finito con ps e ph: esistenza basi ortogonali

Considerazioni e definizioni verranno date esplicitamente solo per uno spazio complesso con prodotto hermitiano. Nel leggerle, si osservi che tali considerazioni e definizioni sussistono anche per uno spazio reale con prodotto scalare, semplicemente sostituendo $\mathbb{R}$ al posto di $\mathbb{C}$, sostituendo l'aggettivo "scalare" al posto dell'aggettivo "hermitiano", ignorando gli eventuali simboli di coniugio in quanto operanti su numeri reali, consentendo lo scambio dei termini di un prodotto scalare in quanto operazione simmetrica.

Sia V un spazio vettoriale di tipo finito su $\mathbb{C}$, sia
$$\dim V = n \ ,$$
e sia
$$\bullet : V \times V \to \mathbb{C}$$
un prodotto hermitiano in V.

6.3.1 Teorema: Sia W un sottospazio di V. Sono equivalenti gli asserti:

a) per $\forall w \in W$ si ha $w \bullet w = 0$,
b) per $\forall w, z \in W$ si ha $w \bullet z = 0$,

c) esiste una base
$$(w_1, \dots, w_m)$$
di W tale che per $\forall i, j \in \{1, \dots, m\}$ (**attenzione:** anche quando $i = j$) si ha
$$w_i \bullet w_j = 0 \ .$$

Cenno. a)$\Rightarrow$b). Per $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}$ si ha:

$$0 = (\lambda w + \mu z) \bullet (\lambda w + \mu z) =$$
$$\lambda\overline{\mu}(w \bullet z) + \mu\overline{\lambda}(z \bullet w) = 2\text{Re}(\lambda\overline{\mu}(w \bullet z)) \ ;$$

ponendo $\lambda = \mu = 1$, si ottiene $\text{Re}(w \bullet z) = 0$;
ponendo $\lambda = -i, \mu = 1$, si ottine $\text{Re}(-i(w \bullet z)) = 0$, ossia $\text{Im}(w \bullet z) = 0$;
ne segue $w \bullet z = 0$.

b)$\Rightarrow$c). Ovviamente ogni base di W verifica la condizione c).

c)$\Rightarrow$a). Si ponga $w = c_1 w_1 + \dots + c_m w_m$, e se ne deduca che $w \bullet w = 0$.
■

6.3.2 Definizione: Sia
$$(v_1, \dots, v_r)$$
una famiglia finita di elementi di V. Se:

▼ per $\forall i, j = 1, \dots, r$ con $i \neq j$ si ha
$$v_i \bullet v_j = 0 \ ,$$

allora:

▲ $(v_1, \dots, v_r)$ si dice un *famiglia ortogonale.*

6.3.3 Teorema: Sia
$$(v_1, \dots, v_r)$$
una famiglia finita ortogonale di elementi di V tale che
$$v_i \bullet v_i \neq 0 \qquad \forall i = 1, \dots, r \ .$$

Sussistono gli asserti:

a) la famiglia $(v_1, \dots, v_r)$ è linearmente indipendente;

b) per $\forall w \in V$ i vettori
$$\begin{cases} w' = \dfrac{w \bullet v_1}{v_1 \bullet v_1} v_1 + \dots + \dfrac{w \bullet v_r}{v_r \bullet v_r} v_r \\[2ex] h = w - \left(\dfrac{w \bullet v_1}{v_1 \bullet v_1} v_1 + \dots + \dfrac{w \bullet v_r}{v_r \bullet v_r} v_r \right) \end{cases} ,$$

sono gli unici vettori verificanti le condizioni:

$$\begin{cases} w' \in \langle v_1, \ldots, v_r \rangle \\ h \in \langle v_1, \ldots, v_r \rangle^{\perp} \\ w = w' + h \end{cases} ;$$

c) $V = \langle v_1, \ldots, v_r \rangle \oplus \langle v_1, \ldots, v_r \rangle^{\perp}$;

d) si ha

$$\dim \langle v_1, \ldots, v_r \rangle = r$$
$$\dim \langle v_1, \ldots, v_r \rangle^{\perp} = \dim V - r = n - r$$

Cenno. a). Sia

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_r v_r = 0 ;$$

per $\forall i = 1, \ldots, r$ si ha

$$(\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_r v_r) \bullet v_i = 0 \bullet v_i ;$$

per l'ortogonalità di $(v_1, \ldots, v_r)$ si ottiene

$$\lambda_i (v_i \bullet v_i) = 0 ;$$

essendo $v_i \bullet v_i \neq 0$ si ottiene $\lambda_i = 0$.

b). Si verifichi direttamente che

$$\begin{cases} w' \in \langle v_1, \ldots, v_r \rangle \\ h \in \langle v_1, \ldots, v_r \rangle^{\perp} \\ w = w' + h \end{cases} .$$

Per provare l'unicità dei vettori verificanti tali proprietà, si consideri una qualsiasi coppia di vettori $\widetilde{w}', \widetilde{h}$ tali che

$$\begin{cases} \widetilde{w}' \in \langle v_1, \ldots, v_r \rangle \\ \widetilde{h} \in \langle v_1, \ldots, v_r \rangle^{\perp} \\ w = \widetilde{w}' + \widetilde{h} \end{cases} ;$$

si ponga

$$\widetilde{w}' = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_r v_r ,$$

si osservi che

$$\widetilde{h} = w - (\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_r v_r) ;$$

per $\forall i = 1, \ldots, r$ si ha allora

$$0 = \widetilde{h} \bullet v_i = (w - (\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_r v_r)) \bullet v_i = (w \bullet v_i) - \lambda_i (v_i \bullet v_i) ;$$

essendo $v_i \bullet v_i$, ne segue
$$\lambda_i = \frac{w \bullet v_i}{v_i \bullet v_i} \ ;$$
pertanto si ha $\widetilde{w}' = w'$, e di conseguenza $\widetilde{h} = h$.

Ovviamente b).⇒c).⇒d).

La Procedura seguente indica come costruire concretamente una base ortogonale di V.

6.3.4 Procedura(per costruire basi ortogonali di V)**:**

Step 1. se
$$v \bullet v = 0 \quad \forall v \in V \ ,$$
si scelga una qualsiasi base
$$(v_1, \ldots, v_n)$$
di V; per il Teorema 6.3.1, tale base è ortogonale; **Stop.**

altrimenti si scelga $v_1 \in V$ tale che $v_1 \bullet v_1 \neq 0$, e si passi a Step 2. .

Step 2. Si consideri la famiglia banalmente ortogonale
$$(v_1)$$
tale che
$$v_1 \bullet v_1 \neq 0 \ ,$$
e si determini
$$\langle v_1 \rangle^{\perp} \ ;$$
per il Teorema 6.3.3 si ha
$$V = \langle v_1 \rangle \oplus \langle v_1 \rangle^{\perp}$$

se
$$v \bullet v = 0 \quad \forall v \in \langle v_1 \rangle^{\perp} \ ,$$
si scelga una qualsiasi base
$$(v_2, \ldots, v_n)$$
di $\langle v_1 \rangle^{\perp}$; per il Teorema 6.3.1,
$$(v_1, v_2, \ldots, v_n)$$
è una base ortogonale di V; **Stop.**

altrimenti si scelga $v_2 \in \langle v_1 \rangle^{\perp}$ tale che $v_2 \bullet v_2 \neq 0$, e si passi a Step 3. .

Step 3. Si consideri la famiglia ortogonale

$$(v_1, v_2)$$

tale che

$$v_1 \bullet v_1 \neq 0 \ , v_2 \bullet v_2 \neq 0 \ ,$$

e si determini

$$\langle v_1, v_2 \rangle^{\perp} \ ;$$

per il Teorema 6.3.3 si ha

$$V = \langle v_1, v_2 \rangle \oplus \langle v_1, v_2 \rangle^{\perp}$$

se

$$v \bullet v = 0 \qquad \forall v \in \langle v_1, v_2 \rangle^{\perp} \ ,$$

si scelga una qualsiasi base

$$(v_3, \ldots, v_n)$$

di $\langle v_1, v_2 \rangle^{\perp}$; per il Teorema 6.3.1,

$$(v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n)$$

è una base ortogonale di V; **Stop.**

altrimenti si scelga $v_3 \in \langle v_1, v_2 \rangle^{\perp}$ tale che $v_3 \bullet v_3 \neq 0$, e si passi a Step 4. .

Step 4. Si consideri la famiglia ortogonale

$$(v_1, v_2, v_3)$$

tale che

$$v_1 \bullet v_1 \neq 0 \ , v_2 \bullet v_2 \neq 0 \ , v_3 \bullet v_3 \neq 0 \ ,$$

e si determini

$$\langle v_1, v_2, v_3 \rangle^{\perp} \ ;$$

per il Teorema 6.3.3 si ha

$$V = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle \oplus \langle v_1, v_2, v_3 \rangle^{\perp} \ ;$$

se etc.

La Procedura 6.3.4 dimostra in particolare il seguente Teorema.

6.3.5 Teorema: Esistono basi ortogonali di V.

Esercizi:

▼ Si consideri lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^5$. Sia "$\bullet$" il prodotto scalare associato alla matrice simmetrica

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{5\times 5} \ .$$

Dati $x, y \in \mathbb{R}^5$, si calcolino

$$x \bullet y, \quad x \bullet x \ .$$

Applicando la Procedura 6.3.4, si costruisca una base ortogonale di $\mathbb{R}^5$.

▲ Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n su $\mathbb{C}$. Sia

$$(v_1, \ldots, v_n)$$

una base di V.

a) Sia "$\bullet$" un prodotto hermitiano in V rispetto al quale la base

$$\mathscr{V} = (v_1, \ldots, v_n)$$

è ortogonale; siano inoltre (si ricordi 6.2.1)

$$\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$$

tali che

$$v_1 \bullet v_1 = \lambda_1, \ldots, v_n \bullet v_n = \lambda_n \ .$$

Si considerino $v, w \in V$ tali che

$$v \equiv_{\mathscr{V}} x \in \mathbb{R}^n, \quad w \equiv_{\mathscr{V}} y \in \mathbb{R}^n \ ,$$

e si calcolino

$$v \bullet w, \quad v \bullet v \ .$$

b) **6.3.6** Siano

$$\mu_1, \ldots, \mu_n \in \mathbb{R} \ .$$

Si provi che esiste uno ed un solo prodotto hermitiano "$\bullet$" in V rispetto al quale la base

$$(v_1, \ldots, v_n)$$

è ortogonale, e si ha

$$v_1 \bullet v_1 = \mu_1, \ldots, v_n \bullet v_n = \mu_n \ .$$

6.4 Spazi di tipo finito con ps e ph: il Teorema di Sylvester

Considerazioni e definizioni verranno date esplicitamente solo per uno spazio complesso con prodotto hermitiano. Nel leggerle, si osservi che tali considerazioni e definizioni sussistono anche per uno spazio reale con prodotto scalare, semplicemente sostituendo $\mathbb{R}$ al posto di $\mathbb{C}$, sostituendo l'aggettivo "scalare" al posto dell'aggettivo "hermitiano", ignorando gli eventuali simboli di coniugio in quanto operanti su numeri reali, consentendo lo scambio dei termini di un prodotto scalare in quanto operazione simmetrica.

Sia V un spazio vettoriale di tipo finito su $\mathbb{C}$, sia

$$\dim V = n \ ,$$

e sia

$$\bullet : V \times V \to \mathbb{C}$$

un prodotto hermitiano in V.

Per il Teorema 6.3.5 esistono basi ortogonali di V.

Sia

$$(v_1, \ldots, v_n)$$

una base ortogonale di V con i membri ordinati in modo tale che (si ricordi 6.2.1)

$$v_1 \bullet v_1 > 0, \ldots, v_r \bullet v_r > 0$$
$$v_{r+1} \bullet v_{r+1} < 0, \ldots, v_{r+s} \bullet v_{r+s} < 0$$
$$v_{r+s+1} \bullet v_{r+s+1} = 0, \ldots, v_n \bullet v_n = 0$$

(ovviamente qualcuna delle tre sottofamigle può essere vuota, ossia può essere: $r = 0,\ s = 0,\ r + s = n$).

Il Teorema seguente prova che gli interi r, s non cambiano cambiando la base ortogonale, ossia prova che tali interi sono numeri caratteristici del particolare prodotto hermitiano considerato.

6.4.1 Teorema(di Sylvester)**:** Sia

$$(v'_1, \ldots, v'_n)$$

una qualsiasi base ortogonale di V con i membri ordinati in modo tale che (si ricordi 6.2.1)

$$v'_1 \bullet v'_1 > 0, \ldots, v'_{r'} \bullet v'_{r'} > 0$$
$$v'_{r'+1} \bullet v'_{r'+1} < 0, \ldots, v'_{r'+s'} \bullet v'_{r'+s'} < 0$$
$$v'_{r'+s'+1} \bullet v'_{r'+s'+1} = 0, \ldots, v'_n \bullet v'_n = 0$$

Allora si ha:

$$r' = r, \quad s' = s \ .$$

Cenno. Si consideri la famiglia

$$(v_1, \ldots, v_r; v'_{r'+1}, \ldots, v'_{r'+s'}, v'_{r'+s'+1}, \ldots, v'_n) \ ;$$

siano

$$\lambda_1, \ldots, \lambda_r; \lambda'_{r'+1}, \ldots, \lambda'_{r'+s'}, \lambda'_{r'+s'+1}, \ldots, \lambda'_n \in \mathbb{C}$$

tali che

$$\begin{aligned} &\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_r v_r + \\ &\qquad \lambda'_{r'+1} v'_{r'+1} + \cdots + \lambda'_{r'+s'} v'_{r'+s'} + \lambda'_{r'+s'+1} v'_{r'+s'+1} + \cdots + \lambda'_n v'_n = 0 \ ; \end{aligned}$$

si ponga

$$\begin{aligned} &v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_r v_r \\ &v' = -\left(\lambda'_{r'+1} v'_{r'+1} + \cdots + \lambda'_{r'+s'} v'_{r'+s'} + \lambda'_{r'+s'+1} v'_{r'+s'+1} + \cdots + \lambda'_n v'_n\right) \ ; \end{aligned}$$

ovviamente si ha

$$v = v'$$

e quindi

$$v \bullet v = v' \bullet v' \ ;$$

si ha

$$\begin{aligned} &v \bullet v = |\lambda_1|^2 (v_1 \bullet v_1) + \cdots + |\lambda_r|^2 (v_r \bullet v_r) \geqslant 0 \\ &v' \bullet v' = |\lambda'_{r'+1}|^2 (v'_{r'+1} \bullet v'_{r'+1}) + \cdots + |\lambda'_{r'+s'}|^2 (v'_{r'+s'} \bullet v'_{r'+s'}) \leqslant 0 \end{aligned}$$

e quindi

$$v \bullet v = 0, \quad v' \bullet v' = 0 \ ;$$

ne segue

$$\begin{aligned} &\lambda_1 = \cdots = \lambda_r = 0 \\ &\lambda'_{r'+1} = \cdots = \lambda'_{r'+s'} = 0 \ ; \end{aligned}$$

tenuto conto che dalle precedenti unguaglianze segue

$$\lambda'_{r'+s'+1} v'_{r'+s'+1} + \cdots + \lambda'_n v'_n = 0 \ ,$$

si ottiene anche che

$$\lambda'_{r'+s'+1} = \cdots = \lambda'_n = 0 \ .$$

Le considerazioni precedenti provano che la famiglia

$$(v_1, \ldots, v_r; v'_{r'+1}, \ldots, v'_{r'+s'}, v'_{r'+s'+1}, \ldots, v'_n)$$

è linearmente indipendente; si ha quindi

$$r + (n - r') \leqslant n \ ,$$

ossia

$$r \leqslant r' \ ;$$

scambiando i ruoli delle due basi si ottiene $r' \leqslant r$, e quindi si conclude che

$$r' = r \ .$$

Analogamente si prova che $s' = s$. ■

I sottospazi

$$\langle v_1, \ldots, v_r \rangle, \quad \langle v_{r+1}, \ldots, v_{r+s} \rangle$$

possono variare al variare della base ortogonale scelta. Il Teorema seguente prova che il sottospazio

$$\langle v_{r+s+1}, \ldots, v_n \rangle$$

non varia cambiando la base ortogonale, ed è quindi uno spazio caratteristico del particolare prodotto hermitiano considerato.

6.4.2 Teorema: Si ha:

$$\langle v_{r+s+1}, \ldots, v_n \rangle = \Big\{ v \in V : v \perp V \Big\} \ .$$

Cenno. Sia $v \in V$; si ponga

$$v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_r v_r + \lambda_{r+1} v_{r+1} + \cdots + \lambda_{r+s} v_{r+s} + \\ \lambda_{r+s+1} v_{r+s+1} + \cdots + \lambda_n v_n \ .$$

Ovviamente si ha

$$v \perp V$$

se e solo se

$$v \bullet v_1 = 0, \ldots, v \bullet v_q = 0 \ ,$$

se e solo se (perché?)

$$\lambda_1 = \cdots = \lambda_{r+s} = 0 \ .$$

■

6.4.3 Definizione: Gli interi $r, s, n - (r + s)$ si dicono rispettivamente gli *indici di positività, negatività, nullità* del prodotto hermitiano.

Ovviamente si ha:

a) il prodotto hermitiano è definito positivo se e solo se $s = n$;

b) il prodotto hermitiano è semidefinito positivo se e solo se $r = 0$;

c) il prodotto hermitiano è definito negativo se e solo se $r = n$;

d) il prodotto hermitiano è semidefinito negativo se e solo se $s = 0$;

e) il prodotto hermitiano è indefinito se e solo se $r \neq 0, s \neq 0$.

Esercizio: Si consideri la matrice simmetrica reale

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{5\times 5} .$$

Si dica se tale matrice sia definita positiva, semidefinita positiva, definita negativa, semidefinita negativa, o di tipo indefinito.

Capitolo 7

Spazi con prodotto scalare e hermitiano definito positivo

7.1 Spazi con prodotto scalare ed hermitiano definito positivo: norma e metrica

Considerazioni e definizioni verranno date esplicitamente solo per uno spazio complesso con prodotto hermitiano definito positivo. Nel leggerle, si osservi che tali considerazioni e definizioni sussistono anche per uno spazio reale con prodotto scalare definito positivo, semplicemente sostituendo $\mathbb{R}$ al posto di $\mathbb{C}$, sostituendo l'aggettivo "scalare" al posto dell'aggettivo "hermitiano", ignorando gli eventuali simboli di coniugio in quanto operanti su numeri reali, consentendo lo scambio dei termini di un prodotto scalare in quanto operazione simmetrica.

Sia V un spazio vettoriale su $\mathbb{C}$, e sia

$$\bullet : V \times V \to \mathbb{C}$$

un prodotto hermitiano definito positivo.

7.1.1 Definizioni: Siano $v, w \in V$:

- il numero

  $$\sqrt{v \bullet v} \geqslant 0$$

  si dice la *norma* di v e si denota con $\|v\|$; si ha quindi:

  $$\textit{norma di } v = \|v\| = \sqrt{v \bullet v} \geqslant 0$$

- il numero

  $$\|w - v\| \geqslant 0$$

si dice la *distanza* di w da v e si denota con $\mathrm{d}(v,w)$; si ha quindi:

$$\textit{distanza di } w \textit{ da } v = \|w-v\| = \sqrt{(w-v)\bullet(w-v)} \geqslant 0 \ .$$

Esempio di spazio reale con prodotto scalare definito positivo: Sia $T>0$, e sia

$$C^0([0,T],\mathbb{R})$$

lo spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ i cui elementi sono le funzioni continue

$$f:[0,T]\to\mathbb{R}$$

Per ogni coppia

$$(f,g)$$

di elementi di $C^0([0,T],\mathbb{R})$ si ponga:

$$f\bullet g = \int_0^T f(t)g(t)\mathrm{d}t$$

Si verifichi che l'operazione $\bullet$ è un prodotto scalare definito positivo in $C^0([0,T],\mathbb{R})$.

Si calcolino:

- $(1+t)\bullet(1-t)$
- $\|1+t\|, \|1-t\|$
- $\mathrm{d}(1+t,1-t)$

Si considerino le funzioni

$$1,\ \sin\frac{2\pi}{T}t,\ \cos\frac{2\pi}{T}t,\ \sin 2\frac{2\pi}{T}t\ ,\cos 2\frac{2\pi}{T}t,\ \sin 3\frac{2\pi}{T}t,\ \cos 3\frac{2\pi}{T}t,\ \ldots$$

si provi che sono a due a due ortogonali, e se ne calcolino le norme.

Per dare un esempio significativo di spazio vettoriale con prodotto hermitiano definito positivo occorrono le seguenti nozioni.

Integrali e primitive per funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{C}$: Sia (vedi Nozioni 5.1.6)

$$f = a+ib \in C^0(\mathbb{R},\mathbb{C})\ ;$$

dati $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ si pone per definizione:

$$\int_\alpha^\beta f(t)\mathrm{d}t := \int_\alpha^\beta a(t)\mathrm{d}t + i\int_\alpha^\beta b(t)\mathrm{d}t;$$

si verifichi che:

- se $F(t) \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ è una *primitiva* di $f(t)$, ossia se
$$F^{(1)}(t) = f(t) \ ,$$
allora si ha
$$\int_\alpha^\beta f(t)\mathrm{d}t = \big[F(t)\big]_\alpha^\beta = F(\beta) - F(\alpha)$$

- se $s = \sigma + i\omega \neq 0$, allora
$$\frac{1}{s}e^{st}$$
è una primitiva di e^{st};

- se $s = \sigma + i\omega \neq 0$, allora si ha
$$\int_\alpha^\beta e^{st}\mathrm{d}t = \big[\frac{1}{s}e^{st}\big]_\alpha^\beta = \frac{e^{\beta t} - e^{\alpha t}}{s} \ .$$

Siamo ora in grado di fornire un esempio significativo di spazio vettoriale con prodotto hermitiano definito positivo.

Esempio di spazio vettoriale complesso con prodotto hermitiano definito positivo: Sia $T > 0$, e sia
$$C^0([0, T], \mathbb{C})$$
lo spazio vettoriale su $\mathbb{C}$ i cui elementi sono le funzioni continue
$$f : [0, T] \to \mathbb{C}$$

Per ogni coppia
$$(f, g)$$
di elementi di $C^0([0, T], \mathbb{C})$ si ponga:
$$f \bullet g = \int_0^T f(t)\overline{g(t)}\mathrm{d}t$$

Si verifichi che l'operazione $\bullet$ è un prodotto hermitiano definito positivo in $C^0([0, T], \mathbb{C})$.

Si calcolino:

- $(1 + it) \bullet (1 - it)$
- $\|1 + it\|, \|1 - it\|$
- $\mathrm{d}(1 + it, 1 - it)$

Si consideri la famiglia di funzioni
$$e^{ik(2\pi/T)t}, \qquad k \in \mathbb{Z} \ ;$$
si provi che gli elementi di tale famiglia sono a due a due ortogonali, e se ne calcolino le norme.

7.2 Prodotto scalare canonico in V_L

Sia

una unità di misura per i segmenti.

Dato un segmento RH, con il simbolo $\overline{RH}$ si indica la misura di RH rispetto ad U.

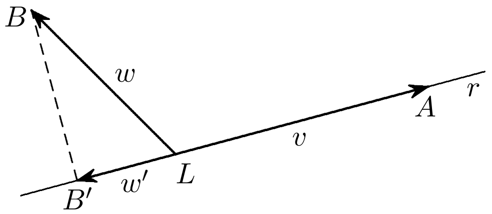
Siano $v = \overrightarrow{LA}, w = \overrightarrow{LB} \in V_L$; indichiamo con

$$v \bullet w$$

l'elemento di $\mathbb{R}$ definito da

▼ se $v = 0$, allora $v \bullet w = 0$

▲ se $v \neq 0$, detta r la retta passante per v, e detta $w' = \overrightarrow{LB'}$ la proiezione ortogonale di w su r, allora



$$v \bullet w = \overline{LA} \cdot \overline{LB'} \cdot \delta$$

ove

$$\delta = \begin{cases} 1 & \text{se } B' \in \text{semiretta di } r\text{, di origine } L\text{, che} \ni A \\ -1 & \text{se } B' \in \text{semiretta di } r\text{, di origine } L\text{, che} \not\ni A \end{cases}$$

Si dimostri che l'applicazione

$$\begin{array}{rccc} \bullet : & V_L \times V_L & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (v, w) & \longrightarrow & v \bullet w \end{array}$$

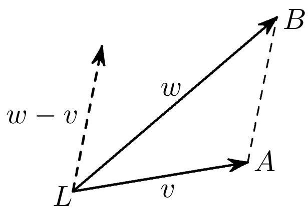
è un prodotto scalare definito positivo in V_L. Tale applicazione si dice il prodotto scalare *canonico* di V_L.

Tenuto conto delle Definizioni 7.1.1, il prodotto scalare canonico "$\bullet$" induce in V_L le seguenti definizioni:

▼ sia $v = \overrightarrow{LA} \in V_L$; il numero reale $\geqslant 0$

$$\sqrt{v \bullet v} \begin{cases} \text{si denota con } \|v\| \\ \text{si dice la } \textit{norma} \text{ di } v \\ \text{è } = \overline{LA} \end{cases}$$

♦ siano $v = \overrightarrow{LA}, w = \overrightarrow{LB} \in V_L$; il numero reale $\geqslant 0$



$$\|w - v\| \begin{cases} \text{si denota con } \mathrm{d}(v, w) \\ \text{si dice la } \textit{distanza} \text{ di } w \text{ da } v \\ \text{è } = \overline{AB} \end{cases}$$

▲ siano $v, w \in V_L$

▽ se $v \bullet w = 0$

△ allora $\begin{cases} v \text{ e } w \text{ si dicono } \textit{ortogonali} \\ \text{si scrive } v \perp w \end{cases}$

sono equivalenti gli asserti

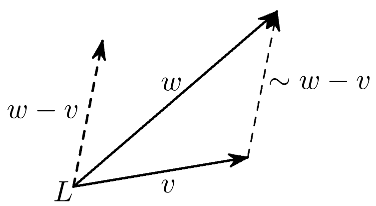
▽ $v \perp w$

△ sussiste una delle seguenti tre condizioni

a) $v = 0$
b) $w = 0$
c) $v \neq 0, w \neq 0$, e v, w sono ortogonali in senso usuale

Sussistono i seguenti teoremi.

7.2.1 Teorema(di Carnot)**.** Siano $v, w \in V_L$; si ha



$$\|w - v\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2 - 2(v \bullet w)$$

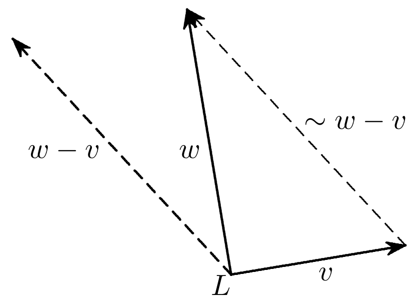
Cenno. $\|w - v\|^2 = (w - v) \bullet (w - v) =$

$w \bullet w + w \bullet (-v) + (-v) \bullet w + (-v) \bullet (-v) =$

$w \bullet w - (w \bullet v) - (v \bullet w) + v \bullet v$

■

7.2.2 Teorema(di Pitagora)**.** Siano $v, w \in V_L$; si ha

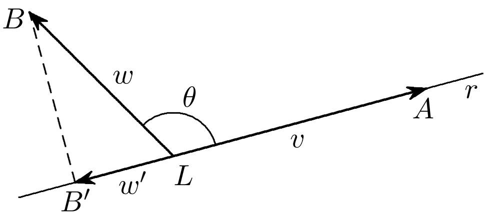


$$\|w - v\|^2 \; = \; \|v\|^2 + \|w\|^2$$
$$\Updownarrow$$
$$v \perp w$$

Cenno. Segue dal Teorema 7.2.1. ■

ESERCIZI

▼ Siano $v, w \in V_L$ tali che $v \neq 0, w \neq 0$, e sia $\theta = \overset{\frown}{vw} \in [0, \pi]$ la misura (in radianti) dell'angolo convesso formato da v e w. Si provi che



$$v \bullet w = \|v\| \cdot \|w\| \cdot \cos\theta$$

Cenno. Si ricordi che $v \bullet w = \overline{LA} \cdot \overline{LB'} \cdot \delta$ (per il significato della figura e dei simboli, vedi la definizione di $v \bullet w$), e si osservi che

$$\overline{LA} = \|v\|, \;\; \overline{LB'} \cdot \delta = \|w\| \cdot \cos\theta$$

■

♦ Siano $v, w \in V_L$ tali che

$$\|v\| = 2, \;\; \|w\| = 3, \;\; \overset{\frown}{vw} = \pi/3$$

si calcolino

▽ $v \bullet v, \;\; w \bullet w, \;\; v \bullet w$

◊ $(v + w) \bullet v, \;\; (v + w) \bullet w$

◊ $\|v + w\|, \;\; \|3v - 5w\|$

△ $(\alpha v + \beta w) \bullet (\lambda v + \mu w)$

♦ Siano $v_1, v_2, v_3 \in V_L$ tali che

$$\|v_1\| = \sqrt{3},\ \|v_2\| = 2,\ \|v_3\| = \sqrt{2}$$
$$\widehat{v_1 v_2} = \widehat{v_1 v_3} = \widehat{v_2 v_3} = \pi/6$$

si calcolino

▽ $v_1 \bullet v_1,\ v_1 \bullet v_2,\ v_1 \bullet v_3,\ v_2 \bullet v_2,\ v_2 \bullet v_3,\ v_3 \bullet v_3$

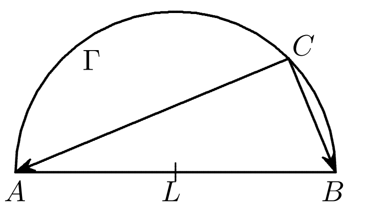
◊ $\left(2v_1 + \sqrt{3}v_2 - 5v_3\right) \bullet \left(-3v_1 - 8v_2 + \sqrt{3}v_3\right)$

◊ $\|v_1 - 5v_2 + 4v_3\|$

△ $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$, non tutti nulli, tali che

$$(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_2 v_2) \perp v_1$$

▲ Sia Γ una semicirconferenza di centro L; siano A, B gli estremi del diametro, e sia $C \in \Gamma$. Si verifichi che



in V_C si ha $\overrightarrow{CA} \perp \overrightarrow{CB}$

Cenno. Si ha

$$\overrightarrow{CA} \sim \overrightarrow{LA} - \overrightarrow{LC},\ \overrightarrow{CB} \sim \overrightarrow{LB} - \overrightarrow{LC}$$
$$\left(\overrightarrow{LA} - \overrightarrow{LC}\right) \bullet \left(\overrightarrow{LB} - \overrightarrow{LC}\right) = \cdots = 0$$

■

7.3 Prodotto scalare canonico in $\mathbb{R}^n$

Si consideri $\mathbb{R}^4$ come spazio vettoriale su $\mathbb{R}$.

Dati

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

si pone

$$a \bullet b = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + a_4 b_4 \in \mathbb{R}$$

Si dimostri che l'applicazione

$$\begin{array}{rccc} \bullet: & \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (a,b) & \longrightarrow & a \bullet b \end{array}$$

è un prodotto scalare definito positivo in $\mathbb{R}^4$. Tale applicazione si dice il prodotto scalare *canonico* di R^4.

Si determini la matrice simmetrica $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ avente come prodotto scalare associato, il prodotto scalare canonico di $\mathbb{R}^4$.

Tenuto conto delle Definizioni 7.1.1, il prodotto scalare canonico "$\bullet$" induce in $\mathbb{R}^4$ le seguenti definizioni:

▼ sia $a \in \mathbb{R}^4$; il numero reale $\geqslant 0$

$$\sqrt{a \bullet a} \begin{cases} \text{si denota con } \|a\| \\ \text{si dice la } \textit{norma} \text{ di } a \end{cases}$$

si ha

$$\|a\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2}$$

♦ siano $a, b \in \mathbb{R}^4$; il numero reale $\geqslant 0$

$$\|b - a\| \begin{cases} \text{si denota con } \mathrm{d}(a,b) \\ \text{si dice la } \textit{distanza} \text{ di } b \text{ da } a \end{cases}$$

si ha

$$\mathrm{d}(a,b) = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2 + (b_4 - a_4)^2}$$

▲ siano $a, b \in \mathbb{R}^4$

▽ se $a \bullet b = 0$

△ allora $\begin{cases} a \text{ e } b \text{ si dicono } \textit{ortogonali} \\ \text{si scrive } a \perp b \end{cases}$

si ha

$$a \perp b \iff a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + a_4 b_4 = 0$$

Sussistono i seguenti teoremi.

7.3.1 Teorema(di Carnot, in $\mathbb{R}^4$)**.** Siano $a, b \in \mathbb{R}^4$; si ha

$$\|b - a\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2 - 2(a \bullet b)$$

Cenno. $\|b - a\|^2 = (b - a) \bullet (b - a) =$

$$b \bullet b + b \bullet (-a) + (-a) \bullet b + (-a) \bullet (-a) =$$

$$b \bullet b - (b \bullet a) - (a \bullet b) + a \bullet a$$

■

7.3.2 Teorema(di Pitagora, in $\mathbb{R}^4$)**.** Siano $a, b \in \mathbb{R}^4$; si ha

$$\|b-a\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2 \iff a \perp b$$

Cenno. Segue dal Teorema 7.3.1. ■

Le definizioni e le osservazioni date per $\mathbb{R}^4$ sussistono per $\forall \mathbb{R}^n$.

- L'operazione
$$a \bullet b = a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n$$
si dice il *prodotto scalare canonico* in $\mathbb{R}^n$.

ESERCIZI

Si consideri $\mathbb{R}^4$ con il prodotto scalare canonico

▼ calcolare $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\| \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ \sqrt{5} \\ 1 \end{pmatrix} \|$, $\mathrm{d}\Big(\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ 3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \Big)$

♦ indicare vari $x \in \mathbb{R}^4$ tali che $x \perp \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

▲ determinare tutti gli $x \in \mathbb{R}^4$ tali che $x \perp x$

Si consideri $\mathbb{R}^4$ con l'operazione

$$\odot : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$$

definita da

$$a \odot b = 2a_1 b_1 + 3a_2 b_2 + 5a_3 b_3 + 7a_4 b_4$$

▼ si verifichi che "$\odot$" è un prodotto scalare definito positivo in $\mathbb{R}^4$

♦ si determini la matrice simmetrica $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ avente come prodotto scalare associato, il prodotto scalare "$\odot$"

♦ calcolare $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\| \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ \sqrt{5} \\ 1 \end{pmatrix} \|$, $\mathrm{d}\Big(\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ 3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \Big)$

♦ indicare vari $x \in \mathbb{R}^4$ tali che $x \perp \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

▲ determinare tutti gli $x \in \mathbb{R}^4$ tali che $x \perp x$

Si consideri $\mathbb{R}^4$ con l'operazione

$$\diamond : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$$

definita da

$$a \diamond b = 2a_1b_1 + 3a_2b_2 + 5a_3b_3 - 7a_4b_4$$

si verifiche che

- "$\diamond$" è un prodotto scalare in $\mathbb{R}^4$ di tipo non definito
- si determini la matrice simmetrica $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ avente come prodotto scalare associato, il prodotto scalare "$\diamond$"

7.4 Prodotto hermitiano canonico in $\mathbb{C}^n$

Si consideri $\mathbb{C}^4$ come spazio vettoriale su $\mathbb{C}$.

Dati

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix}, \ b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b4 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^4$$

si pone

$$a \bullet b = a_1\overline{b_1} + a_2\overline{b_2} + a_3\overline{b_3} + a_4\overline{b_4} \in \mathbb{C}$$

(si osservi che, se $a, b \in \mathbb{R}^4$, tale definizione di $a \bullet b$ è coerente con quella data nella Sezione 7.3).

Si dimostri che l'applicazione

$$\begin{array}{rccc} \bullet : & \mathbb{C}^4 \times \mathbb{C}^4 & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & (a,b) & \longrightarrow & a \bullet b \end{array}$$

è un prodotto hermitiano definito positivo in $\mathbb{C}^4$.

Tenuto conto delle Definizioni 7.1.1, il prodotto hermitiano canonico "$\bullet$" induce in $\mathbb{C}^4$ le seguenti definizioni:

▼ sia $a \in \mathbb{C}^4$; il numero reale $\geqslant 0$

$$\sqrt{a \bullet a} \begin{cases} \text{si denota con } \ \|a\| \\ \text{si dice la } \textit{norma} \text{ di } a \end{cases}$$

si ha

$$\|a\| = \sqrt{|a_1|^2 + |a_2|^2 + |a_3|^2 + |a_4|^2}$$

♦ siano $a, b \in \mathbb{C}^4$; il numero reale $\geqslant 0$

$$\|b - a\| \begin{cases} \text{si denota con } \ \mathrm{d}(a, b) \\ \text{si dice la } \textit{distanza} \text{ di } b \text{ da } a \end{cases}$$

si ha

$$\mathrm{d}(a, b) = \sqrt{|b_1 - a_1|^2 + |b_2 - a_2|^2 + |b_3 - a_3|^2 + |b_4 - a_4|^2}$$

▲ siano $a, b \in \mathbb{C}^4$

- ▽ se $a \bullet b = 0$
- △ allora $\begin{cases} a \text{ e } b \text{ si dicono } \textit{ortogonali} \\ \text{si scrive } \ a \perp b \end{cases}$

sono equivalenti gli asserti

- ▽ $a \perp b$ (ossia $a \bullet b = 0$)
- ◊ $b \perp a$ (ossia $b \bullet a = 0$)
- ◊ $a_1\overline{b_1} + a_2\overline{b_2} + a_3\overline{b_3} + a_4\overline{b_4} = 0$
- △ $\overline{b_1}a_1 + \overline{b_2}a_2 + \overline{b_3}a_3 + \overline{b_4}a_4$

Sussistono i seguenti teoremi.

7.4.1 Teorema(di Carnot, in $\mathbb{C}^4$)**.** Siano $a, b \in \mathbb{C}^4$; si ha

$$\|b - a\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2 - 2\mathrm{Re}(a \bullet b)$$

Cenno.
$$\begin{aligned} \|b - a\|^2 &= (b - a) \bullet (b - a) = \\ & b \bullet b + b \bullet (-a) + (-a) \bullet b + (-a) \bullet (-a) = \\ & b \bullet b - (b \bullet a) - (a \bullet b) + a \bullet a = \\ & b \bullet b - \overline{(a \bullet b)} - (a \bullet b) + a \bullet a \end{aligned}$$

■

7.4.2 Teorema(di Pitagora, in $\mathbb{C}^4$)**.** Siano $a, b \in \mathbb{C}^4$; si ha

$$\begin{aligned} \|b-a\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2 &\iff \operatorname{Re}(a \bullet b) = 0 \\ \|b-a\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2 &\impliedby a \perp b \end{aligned}$$

Cenno. Segue dal Teorema 7.4.1. ■

Le definizioni e le osservazioni date per $\mathbb{C}^4$ sussistono per $\forall \mathbb{C}^n$.

- L'operazione
$$a \bullet b = a_1\overline{b_1} + \cdots + a_n\overline{b_n}$$
si dice il *prodotto hermitiano canonico* in $\mathbb{C}^n$.

ESERCIZI

Si consideri $\mathbb{C}^3$ con il prodotto hermitiano canonico

▼ calcolare $\begin{pmatrix} 2+i \\ 3-2i \\ 1-i \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1-i \\ 2+2i \\ 3+2i \end{pmatrix}$, $\| \begin{pmatrix} 3-2i \\ 2+i \\ 1+3i \end{pmatrix} \|$

$$\mathrm{d}\Big(\begin{pmatrix} 1+i \\ 1-i \\ 2+3i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3-2i \\ 2+5i \\ 1-i \end{pmatrix} \Big)$$

⧫ indicare vari $x \in \mathbb{C}^3$ tali che $x \perp \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 1+i \end{pmatrix}$

▲ determinare tutti gli $x \in \mathbb{C}^3$ tali che $x \perp x$

Si consideri $\mathbb{C}^3$ con l'operazione

$$\odot : \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}$$

definita da

$$a \odot b = 2a_1\overline{b_1} + 3a_2\overline{b_2} + 5a_3\overline{b_3}$$

▼ si verifichi che "$\odot$" è un prodotto hermitiano definito positivo in $\mathbb{C}^3$

♦ calcolare $\begin{pmatrix} 2+i \\ 3-2i \\ 1-i \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 1-i \\ 2+2i \\ 3+2i \end{pmatrix}$, $\| \begin{pmatrix} 3-2i \\ 2+i \\ 1+3i \end{pmatrix} \|$

$$\mathrm{d}\Big(\begin{pmatrix} 1+i \\ 1-i \\ 2+3i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3-2i \\ 2+5i \\ 1-i \end{pmatrix} \Big)$$

♦ indicare vari $x \in \mathbb{C}^3$ tali che $x \perp \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 1+i \end{pmatrix}$

▲ determinare tutti gli $x \in \mathbb{C}^3$ tali che $x \perp x$

Si consideri $\mathbb{C}^3$ con l'operazione

$$\diamond : \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}$$

definita da

$$a \diamond b = 2a_1\overline{b_1} - 3a_2\overline{b_2} + 5a_3\overline{b_3}$$

si verifiche che

- "$\diamond$" è un prodotto hermitiano in $\mathbb{C}^3$ di tipo non definito

Si consideri $\mathbb{C}^2$ con il prodotto hermitiano canonico; siano $c \in \mathbb{C}, \beta \in \mathbb{R}$; si ponga

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ c \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -\overline{c} - \beta i \\ 1 \end{pmatrix}$$

si verifichi che, per $\forall c$ e $\forall \beta \neq 0$

▼ a, b verificano la relazione di Pitagora $\|b - a\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2$

▲ a, b non sono ortogonali

7.5 Spazi con prodotto scalare ed hermitiano definito positivo: proprietà della norma e della metrica

Considerazioni e definizioni verranno date esplicitamente solo per uno spazio complesso con prodotto hermitiano. Nel leggerle, si osservi che tali considerazioni e definizioni sussistono anche per uno spazio reale con prodotto scalare, semplicemente sostituendo $\mathbb{R}$ al posto di $\mathbb{C}$, sostituendo l'aggettivo "scalare" al posto dell'aggettivo "hermitiano", ignorando gli eventuali simboli di coniugio in quanto operanti su numeri reali, consentendo lo scambio dei termini di un prodotto scalare in quanto operazione simmetrica.

Sia V un spazio vettoriale su C, e sia " $\bullet$" un prodotto hermitiano definito positivo in V.

Si verifichi che

- per $\forall v \in V$ e per $\forall c \in \mathbb{C}$ si ha

$$\|cv\| = |c| \cdot \|v\|$$

Cenno. $\|cv\| = \sqrt{(cv) \bullet (cv)} = \sqrt{c(v \bullet (cv))} =$

$$\sqrt{c(\bar{c}(v \bullet v))} = \sqrt{|c|^2 \|v\|^2} = |c| \cdot \|v\| \quad \blacksquare$$

7.5.1 Proiezione ortogonale e componente normale. Problema: sia $v \in V$, tale che $v \neq 0$. Dato $w \in V$, trovare

$$w', \ h \in V$$

tali che

▼ w' sia un multiplo di v (ossia un elemento del tipo $w' = cv$, con $c \in \mathbb{C}$)

♦ $h \perp v$

▲ $w = w' + h$

Risposta: esiste una ed una sola soluzione

▼ si ha

$$w' = \frac{w \bullet v}{\|v\|^2} v, \ h = w - \frac{w \bullet v}{\|v\|^2} v$$

♦ w' si dice la *proiezione ortogonale* di w su v

▲ h si dice la *componente normale* di w rispetto a v

Cenno. Sia $w' = cv, h$ una eventuale soluzione. Siccome

$$h = w - cv, \ h \perp v, \ v \neq 0$$

si ha

$$(w - cv) \bullet v = 0, \quad w \bullet v - c(v \bullet v) = 0, \quad c = \frac{w \bullet v}{\|v\|^2}$$

ne segue che

$$w' = \frac{w \bullet v}{\|v\|^2} v, \ h = w - \frac{w \bullet v}{\|v\|^2} v$$

Allora: o tali w', h sono la sola soluzione, o il problema non ha soluzioni. Per decidere quale delle due situazioni sussista, occorre controllare se la coppia w', h proposta risolva o meno il problema.

1° controllo: $w' = \dfrac{w \bullet v}{\|v\|^2} v$

e quindi w' è un multiplo di v

2° controllo: $h \bullet v = \left(w - \dfrac{w \bullet v}{\|v\|^2} v \right) \bullet v = w \bullet v - \left(\dfrac{w \bullet v}{\|v\|^2} v \right) \bullet v =$

$$w \bullet v - \left(\frac{w \bullet v}{\|v\|^2} \right) (v \bullet v) = 0$$

e quindi $h \perp v$

3° controllo: $w' + h = \dfrac{w \bullet v}{\|v\|^2} v + \left(w - \dfrac{w \bullet v}{\|v\|^2} v \right) = w$

e quindi $w = w' + h$

■

7.5.2 Disuguaglianza di Schwarz. Siano $v, w \in V$; si ha

$$|v \bullet w| \leqslant \|v\| \cdot \|w\|$$

Cenno. Se $v = 0$, l'asserto è ovvio. Supponiamo quindi $v \neq 0$, e siano w', h la proiezione ortogonale e la componente normale di w rispetto a v. Si ha

$$\begin{aligned} \|w\| = \|w' + h\| = \sqrt{(w' + h) \bullet (w' + h)} &= \\ \sqrt{w' \bullet w' + w' \bullet h + h \bullet w' + h \bullet h} &= \\ \sqrt{w' \bullet w' + h \bullet h} \geqslant \|w'\| = \left\| \frac{w \bullet v}{\|v\|^2} v \right\| &= \\ \left| \frac{w \bullet v}{\|v\|^2} \right| \cdot \|v\| = \frac{|w \bullet v|}{\|v\|^2} \|v\| &= \frac{|w \bullet v|}{\|v\|} \end{aligned}$$

da cui segue $\|w\| \cdot \|v\| \geqslant |w \bullet v|$ ■

7.5.3 Proprietà della norma. Per $\forall v, w \in V$ e per $\forall c \in \mathbb{C}$ si ha

- ▼ $\|v\| \geqslant 0$
- ♦ $\|v\| = 0 \Longleftrightarrow v = 0$
- ♦ $\|cv\| = |c| \cdot \|v\|$
- ▲ $\|v + w\| \leqslant \|v\| + \|w\|$

Cenno. Primo, secondo e terzo asserto sono noti. Si osservi che per $\forall a, b \in \mathbb{R}$ si ha

$$\text{Re } (a + bi) = a \leqslant |a| \leqslant \sqrt{a^2 + b^2} = |a + bi|$$

Usando tale relazione si ottiene

$$\|v+w\|^2 = (v+w)\bullet(v+w) = \|v\|^2 + \|w\|^2 + v\bullet w + w\bullet v =$$
$$\|v\|^2 + \|w\|^2 + 2\mathrm{Re}\,(v\bullet w) \leqslant \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2|v\bullet w| \leqslant$$
$$\text{per la Disuguaglianza di Schwarz}$$
$$\|v\|^2 + \|w\|^2 + 2\|v\|\cdot\|w\| = (\|v\| + \|w\|)^2$$

ossia il quarto asserto. ■

7.5.4 Proprietà della distanza. Per $\forall v, w, z \in V$ si ha

- ▼ $\mathrm{d}(v,w) \geqslant 0$
- ⧫ $\mathrm{d}(v,w) = 0 \Longleftrightarrow v = w$
- ⧫ $\mathrm{d}(w,v) = \mathrm{d}(w,v)$
- ▲ $\mathrm{d}(v,w) \leqslant \mathrm{d}(v,z) + \mathrm{d}(z,w)$ (*disuguaglianza triangolare*)

Cenno. Solo la quarta relazione non è ovvia. Si ha

$$\mathrm{d}(v,w) = \|w-v\| = \|(w-z)+(z-v)\| \leqslant$$
$$\text{per le proprietà della norma}$$
$$\|w-z\| + \|z-v\| = d(v,z) + d(z,w)$$

■

I risultati 7.5.2 e 7.5.3

- ▼ applicati allo spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^n$ con il prodotto scalare canonico, provano che per $\forall a, b \in \mathbb{R}^n$ si ha

  ▽ $$\left|\sum_{j=1}^{n} a_j b_j\right| \leqslant \sqrt{\sum_{j=1}^{n} a_j^2}\cdot\sqrt{\sum_{j=1}^{n} b_j^2}$$

  △ $$\sqrt{\sum_{j=1}^{n} (a_j+b_j)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{j=1}^{n} a_j^2} + \sqrt{\sum_{j=1}^{n} b_j^2}$$

- ⧫ applicati allo spazio vettoriale complesso $\mathbb{C}^n$ con il prodotto hermitiano canonico, provano che per $\forall a, b \in \mathbb{C}^n$ si ha

  ▽ $$\left|\sum_{j=1}^{n} a_j \overline{b_j}\right| \leqslant \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |a_j|^2}\cdot\sqrt{\sum_{j=1}^{n} |b_j|^2}$$

$$\triangle \quad \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |a_j + b_j|^2} \leqslant \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |a_j|^2} + \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |b_j|^2}$$

♦ applicati allo spazio vettoriale reale $C^0([0,T],\mathbb{R})$ con il prodotto scalare "•" descritto nella Sezione 7.1, provano che per

$$\forall f(t), g(t) \in C^0([0,T],\mathbb{R})$$

si ha

$$\triangledown \quad \left| \int_0^T f(t)g(t)\mathrm{d}t \right| \leqslant \sqrt{\int_0^T f(t)^2 \mathrm{d}t} \cdot \sqrt{\int_0^T g(t)^2 \mathrm{d}t}$$

$$\triangle \quad \sqrt{\int_0^T (f(t)+g(t))^2 \mathrm{d}t} \leqslant \sqrt{\int_0^T f(t)^2 \mathrm{d}t} + \sqrt{\int_0^T g(t)^2 \mathrm{d}t}$$

▲ applicati allo spazio vettoriale complesso $C^0([0,T],\mathbb{C})$ con il prodotto scalare "•" descritto nella Sezione 7.1, provano che per

$$\forall f(t), g(t) \in C^0([0,T],\mathbb{C})$$

si ha

$$\triangledown \quad \left| \int_0^T f(t)\overline{g(t)}\mathrm{d}t \right| \leqslant \sqrt{\int_0^T |f(t)|^2 \mathrm{d}t} \cdot \sqrt{\int_0^T |g(t)|^2 \mathrm{d}t}$$

$$\triangle \quad \sqrt{\int_0^T |f(t)+g(t)|^2 \mathrm{d}t} \leqslant \sqrt{\int_0^T |f(t)|^2 \mathrm{d}t} + \sqrt{\int_0^T |g(t)|^2 \mathrm{d}t}$$

ESERCIZI

▼ In $\mathbb{R}^4$ con il prodotto scalare canonico si calcolino la proiezione ortogonale e la componente normale di $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ rispetto a $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

♦ In $\mathbb{R}^4$ con il prodotto scalare canonico sia $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\triangledown$ si provi che $\dfrac{1}{\|a\|}a$ ha norma 1

$\Diamond$ si provi che $\dfrac{1}{\|a\|}a, \ \dfrac{-1}{\|a\|}a$ sono tutti e soli i multipli di a che hanno norma 1

$\Diamond$ si determinino i multipli di a che hanno norma 7

$\Diamond$ si indichi un $b \in \mathbb{R}^4$ tale che

$$b \perp a, \quad b \neq 0$$

$\Diamond$ sia b come nel precedente item e sia

$$c = 7a - 5b$$

si provi che

"proiezione ortogonale di c su a"	$=$	$7a$
"componente normale di c rispetto ad a"	$=$	$-5b$

$\Diamond$ si indichi un $c \in \mathbb{R}^4$ tale che

"la proiezione ortogonale di c su a"	abbia norma 3
"la componente normale di c rispetto ad a"	abbia norma 4

si provi che $\|c\| = 5$

$\triangle$ si indichi un $c \in \mathbb{R}^4$ tale che

$$\|c\| = 10$$
$$\|\text{proiezione ortogonale di } c \text{ su } a\| = 5$$

♦ In $\mathbb{C}^3$ con il prodotto hermitiano canonico si calcolino la proiezione ortogonale e la componente normale di $\begin{pmatrix} 2+i \\ 2-i \\ i \end{pmatrix}$ rispetto a $\begin{pmatrix} i \\ i \\ 1 \end{pmatrix}$

♦ In $\mathbb{C}^3$ con il prodotto hermitiano canonico sia $a = \begin{pmatrix} 1+i \\ 1 \\ 1-i \end{pmatrix}$

$\triangledown$ si provi che $\dfrac{1}{\|a\|}a$ ha norma 1

$\Diamond$ si provi che

$$\frac{c}{\|a\|}a, \qquad c \begin{cases} \in \mathbb{C} \\ |c| = 1 \end{cases}$$

è una rappresentazione parametrica dell'insieme dei multipli di a che hanno norma 1

◊ si determinino i multipli di a che hanno norma 7

◊ si indichi un $b \in \mathbb{C}^3$ tale che

$$b \perp a, \quad b \neq 0$$

◊ sia b come nel precedente item e sia

$$c = (2+3i)a + (7 - i\sqrt{3})b$$

si provi che

$$\begin{array}{lcr} \text{“proiezione ortogonale di } c \text{ su } a\text{”} & = & (2+3i)a \\ \text{“componente normale di } c \text{ rispetto ad } a\text{”} & = & (7-i\sqrt{3})b \end{array}$$

◊ si indichi un $c \in \mathbb{C}^3$ tale che

“la proiezione ortogonale di c su a” abbia norma 3

“la componente normale di c rispetto ad a” abbia norma 4

si provi che $\|c\| = 5$

△ si indichi un $c \in \mathbb{C}^3$ tale che

$$\|c\| = 10$$
$$\|\text{proiezione ortogonale di } c \text{ su } a\| = 5$$

▲ In $\mathbb{C}^3$ con il prodotto hermitiano definito positvo “$\diamond$”, definito da

$$a \diamond b = 5a_1\overline{b_1} + 3a_2\overline{b_2} + 2a_3\overline{b_3}$$

si verifichino direttamente le seguenti disuguaglianze (che tali disuguaglianze sussistano è conseguenza dei risultati teorici già dimostrati):

$$\left| \begin{pmatrix} 2-i \\ 2+i \\ 2+i \end{pmatrix} \diamond \begin{pmatrix} 1-2i \\ 1-2i \\ 1+2i \end{pmatrix} \right| \leqslant \left\| \begin{pmatrix} 2-i \\ 2+i \\ 2+i \end{pmatrix} \right\| \cdot \left\| \begin{pmatrix} 1-2i \\ 1-2i \\ 1+2i \end{pmatrix} \right\|$$

$$\left\| \begin{pmatrix} 2-i \\ 2+i \\ 2+i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1-2i \\ 1-2i \\ 1+2i \end{pmatrix} \right\| \leqslant \left\| \begin{pmatrix} 2-i \\ 2+i \\ 2+i \end{pmatrix} \right\| + \left\| \begin{pmatrix} 1-2i \\ 1-2i \\ 1+2i \end{pmatrix} \right\|$$

$$\mathrm{d}\Big(\begin{pmatrix} 2-i \\ 2+i \\ 2+i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1-2i \\ 1-2i \\ 1+2i \end{pmatrix} \Big) \leqslant$$
$$\mathrm{d}\Big(\begin{pmatrix} 2-i \\ 2+i \\ 2+i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3+i \\ 3+i \\ 3+i \end{pmatrix} \Big) + \mathrm{d}\Big(\begin{pmatrix} 3+i \\ 3+i \\ 3+i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1-2i \\ 1-2i \\ 1+2i \end{pmatrix} \Big)$$

7.6 Spazi con prodotto scalare ed hermitiano definito positivo: proiezione su sottospazi

Considerazioni e definizioni verranno date esplicitamente solo per uno spazio complesso con prodotto hermitiano. Nel leggerle, si osservi che tali considerazioni e definizioni sussistono anche per uno spazio reale con prodotto scalare, semplicemente sostituendo $\mathbb{R}$ al posto di $\mathbb{C}$, sostituendo l'aggettivo "scalare" al posto dell'aggettivo "hermitiano", ignorando gli eventuali simboli di coniugio in quanto operanti su numeri reali, consentendo lo scambio dei termini di un prodotto scalare in quanto operazione simmetrica.

Sia V un spazio vettoriale su $\mathbb{C}$, e sia

$$\bullet : V \times V \to \mathbb{C}$$

un prodotto hermitiano definito positivo in V.

Per la definizione di " vettore ortogonale a un sottospazio", si vedano le Definizioni 6.1.2 .

La seguente definizione dice cosa si intenda per un vettore che ammette proiezione ortogonale su un sottospazio, e cosa in tal caso si intenda per sua proiezione ortogonale e sua componente normale.

7.6.1 Definizione: Sia W un sottospazio di V, e sia $v \in V$. Si considerino le coppie $v', h \in V$ tali che:

$$v' \in W, \quad h \begin{cases} \in V \\ \perp W \end{cases}$$

tali che

$$v = v' + h \ ,$$

allora:

- se esiste una tale coppia v', h, non ne esistono altre;

  Cenno. Sia $\widetilde{v}', \widetilde{h}$ una seconda tale coppia. Si ha $v' - \widetilde{v}' = \widetilde{h} - h$; si ponga
  $$z = v' - \widetilde{v}' = \widetilde{h} - h \ ;$$
  - essendo $z = v' - \widetilde{v}'$, si ha $z \in W$;
  - essendo $z = \widetilde{h} - h$, per $\forall w \in W$ si ha
    $$z \bullet w = \widetilde{h} \bullet w - h \bullet w = 0 \ ;$$
    quindi $z \perp W$;

  - ◦ essendo $z \in W$, $z \perp W$, si ha $z \perp z$, ossia

$$z \bullet z = 0 \ ;$$

    ne segue $z = 0$;
  - ◦ essendo $0 = z = v' - \widetilde{v}' = \widetilde{h} - h$, si ottiene $\widetilde{v}' = v', \widetilde{h} = h$. ■

- in tal caso si dice che:
  - ◦ v *ammette* proiezione ortogonale su W,
  - ◦ v' è la *proiezione ortogonale* di v su W,
  - ◦ h è la *componente normale* di v rispetto a W.

Nota: Non è detto che un vettore ammetta proiezione ortogonale su un sottospazio. Ad esempio, nello spazio vettoriale $C^0([0,T],\mathbb{R})$, il vettorre

$$f(t) = t$$

non ammette proiezione ortogonale sul sottospazio

$$\langle 1,\ \sin\frac{2\pi}{T}t,\ \cos\frac{2\pi}{T}t,\ \sin 2\frac{2\pi}{T}t\ ,\cos 2\frac{2\pi}{T}t,\ \sin 3\frac{2\pi}{T}t,\ \cos 3\frac{2\pi}{T}t,\ \dots\rangle$$

(la dimostrazione non è banale, e viene omessa).

Il seguente Teorema dice quale sia la principale proprietà della proiezione ortogonale e della componente normale.

7.6.2 Teorema: Sia W un sottospazio di V, e sia $v \in V$ un vettore che ammette proiezione ortogonale su W. Siano v', h rispettivamente la proiezione ortogonale di v su W e la componente normale di v rispetto a W. Sussistono gli asserti:

- per $\forall w \in W$ tale che $w \neq v$ si ha

$$\mathrm{d}(v, w) > \mathrm{d}(v, v') \ ;$$

  Cenno. Si ha

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(v,w) = \|v - w\| = \\ &\|(v - v') + (v' - w)\| = \|h + (v' - w)\| = \\ &\sqrt{(h + (v' - w)) \bullet (h + (v' - w))} = \cdots = \\ &\sqrt{\|h\|^2 + \|v' - w\|^2} > \|h\| = \mathrm{d}(v, v') \end{aligned}$$

■

- v' è l'elemento di W avente minima distanza da v;
- $\mathrm{d}(v, v') = \|h\|$.

La Definizione seguente introduce la nozione di *famiglia ortonormale* di elementi di V.

7.6.3 Definizione: Sia
$$(v_1, \ldots, v_r)$$
una famiglia di elementi di V. Se:

▼ per $\forall i, j = 1, \ldots, r$ si ha
$$v_i \bullet v_j = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ 1 & \text{se } i = j \end{cases} \quad ,$$

allora:

▲ $(v_1, \ldots, v_r)$ si dice una *famiglia ortonormale.*

Il Teorema seguente prova che se W è un sottospazio di tipo finito, allora W ha basi ortonormali.

7.6.4 Teorema: Sia W un sottospazio di tipo finito di V, e sia
$$\dim W = r$$
. Allora esistono basi ortonormali di W.

Infatti:

a) l'applicazione "$\bullet$" ristretta a W è ovviamente un prodotto hermitiano in W;

b) per il Teorema 6.3.5 esiste una base ortogonale
$$(v_1, \ldots, v_r)$$
di W (ottenibile ad esempio applicando a W la Procedura 6.3.4);

c) per la definizione positiva di $\bullet$, si ha
$$v_1 \bullet v_1 > 0, \ldots, v_r \bullet v_r > 0 \ ;$$

d) si ponga
$$u_1 = \frac{1}{\|v_1\|} v_1, \ldots, u_r = \frac{1}{\|v_r\|} v_r \ ;$$
e si verifichi che la famiglia
$$(u_1, \ldots, u_r)$$
è una base *ortonormale* di W.

■

Il Teorema seguente prova che se W è un sottospazio di tipo finito, allora $\forall v \in V$ ha proiezione ortogonale su W, ed indica un modo per calcolarla tramite una base ortonormale di W.

7.6.5 Teorema: Sia W un sottospazio di tipo finito di V, sia

$$\dim W = r \ ,$$

e sia

$$(u_1, \ldots, u_r)$$

una base ortonormale di W (certamente esistente per il Teorema 7.6.4).

Sia v un qualsiasi elemeto di V.

Si verifichi che i vettori

$$\begin{cases} v' = (v \bullet u_1)u_1 + \cdots + (v \bullet u_r)u_r \\ h = v - ((v \bullet u_1)u_1 + \cdots + (v \bullet u_r)u_r) \end{cases}$$

sono tali che:

$$\begin{cases} v' \in W \\ h \perp W \\ v = v' + h \end{cases} ,$$

e sono pertanto la proiezione ortogonale e la componente normale di v su W.

I numeri

$$v \bullet u_1, \ldots, v \bullet u_r \in \mathbb{C} \ ,$$

si dicono i *coefficienti di Fourier* di v rispetto alla base ortonormale

$$(u_1, \ldots, u_r) \ .$$

In generale però, dato un sottospazio W di tipo finito e dimensione r, è disponibile solo una base

$$(v_1, \ldots, v_r)$$

di W, senza che essa sia a priori ortonormale.

Volendo applicare il Teorema 7.6.5 per calcolare proiezioni ortogonali e componenti normali di vettori rispetto a W, occorre calcolare preventivamente un base ortonormale di W. Ciò può essere fatto:

- sia applicando a W la Procedura 6.3.4 che fornisce una base ortogonale di W, e successivamente normalizzando tale base come fatto nel Teorema 7.6.4,

- sia considerando una qualsiasi base

$$(v_1, \dots, v_r)$$

di W ed applicando ad essa la Procedura seguente (resa operativa solo dai risultati del Teorema 7.6.5).

7.6.6 Procedura di Ortonormalizzazione di Gram-Schmidt: Sia

$$(v_1, \dots, v_r)$$

una famiglia *linearmente indipendente* di elementi di V; la Procedura seguente costruisce una famiglia *ortonormale*

$$(u_1, \dots, u_r)$$

di elementi di V tale che:

$$\begin{aligned} \langle v_1 \rangle &= \langle u_1 \rangle \\ \langle v_1, v_2 \rangle &= \langle u_1, u_2 \rangle \\ \langle v_1, v_2, v_3 \rangle &= \langle u_1, u_2, u_3 \rangle \\ &\vdots \\ \langle v_1, \dots, v_r \rangle &= \langle u_1, \dots, u_r \rangle \ . \end{aligned}$$

Step 1. essendo $v_1 \neq 0$, si ha $\|v_1\| \neq 0$; si ponga

$$u_1 = \frac{1}{\|v_1\|} v_1 \ ;$$

si ha:

$$\langle v_1 \rangle = \langle u_1 \rangle \ ;$$

ovviamente (u_1) è una famiglia ortonormale;

Step 2. il Teorema 7.6.5 consente di calcolare la proiezione ortogonale v_2' e la componente normale h_2 di v_2 rispetto $\langle u_1 \rangle$; essendo $v_2 \notin \langle v_1 \rangle$, si ha $h_2 \neq 0$, e quindi $\|h_2\| \neq 0$; si ponga

$$u_2 = \frac{1}{\|h_2\|} h_2 \ ;$$

si ha:

$$\langle v_1, v_2 \rangle = \langle u_1, v_2 \rangle = \langle u_1, v_2' + h_2 \rangle = \langle u_1, h_2 \rangle = \langle u_1, u_2 \rangle \ ;$$

ovviamente (u_1, u_2) è una famiglia ortonormale;

Step 3. il Teorema 7.6.5 consente di calcolare la proiezione ortogonale v_3' e la componente normale h_3 di v_3 rispetto $\langle u_1, u_2 \rangle$; essendo $v_3 \notin \langle v_1, v_2 \rangle$, si ha $h_3 \neq 0$, e quindi $\|h_3\| \neq 0$; si ponga

$$u_3 = \frac{1}{\|h_3\|} h_3 \ ;$$

si ha:

$$\langle v_1, v_2, v_3 \rangle = \langle u_1, u_2, v_3 \rangle = \\ \langle u_1, u_2, v_3' + h_3 \rangle = \langle u_1, u_2, h_3 \rangle = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle \ ;$$

ovviamente (u_1, u_2, u_3) è una famiglia ortonormale;

etc.

Come detto, dato un sottospazio W di tipo finito e dimensione r, è disponibile solo una base

$$(v_1, \ldots, v_r)$$

di W, senza che essa sia a priori ortonormale.

Il Teorema seguente consente di calcolare proiezioni ortogonali e componenti normali di vettori rispetto a W, senza calcolare preventivamente una base ortonormale di W. Osserviamo che il metodo è giustificato dai Teoremi 7.6.5 e 7.6.1 che garantiscono rispettivamente l'esistenza e unicità della proiezione ortogonale e della componente normale di un vettore rispetto a W.

7.6.7 Teorema: Sia W un sottospazio di tipo finito di V, sia

$$\dim W = r \ ,$$

e sia

$$(v_1, \ldots, v_r)$$

una base di W.

Sia $v \in V$ e siano v', h rispettivamente la proiezione ortogonale e la componente normale di v rispetto a W (certamente esistenti ed univocamente determinate per i Teoremi 7.6.5 e 7.6.1).

Posto

$$v' = c_1 v_1 + \cdots + c_r v_r \ ,$$

i coefficienti

$$c_1, \ldots, c_r \in \mathbb{C}$$

sono univocamente determinati dalle relazioni

$$\begin{cases} (c_1v_1 + \cdots + c_rv_r - v) \bullet v_1 = 0 \\ \vdots \\ (c_1v_1 + \cdots + c_rv_r - v) \bullet v_r = 0 \end{cases},$$

e sono pertanto ottenibili risolvendo il sistema (che, per quanto detto è univocamente risolubile)

$$\begin{pmatrix} v_1 \bullet v_1 & \cdots & v_r \bullet v_1 \\ & \vdots & \\ v_1 \bullet v_r & \cdots & v_r \bullet v_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \bullet v_1 \\ \vdots \\ v \bullet v_r \end{pmatrix}$$

nelle incognite $x_1, \ldots, x_r \in \mathbb{C}$.

7.7 Diagonalizzazione di matrici complesse hermitiane

Si consideri il campo complesso $\mathbb{C}$, e sia

$$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$$

una matrice hermitiana.

Il Teorema seguente prova che tutte le radici del polinomio caratteristico di A sono reali.

7.7.1 Teorema: Sia $\Gamma(x) \in \mathbb{C}[x]$ il polinomio caratteristico di A. Siano

$$c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$$

tali che

$$\Gamma(x) = (-1)^n(x - c_1)\cdots(x - c_n) .$$

Si ha:

$$c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R} .$$

Cenno. Si consideri c_r. Essendo $\Gamma(c_r) = 0$, per il Teorema 5.2.5 c_r è un autovalore di A; esiste quindi $h \in \mathbb{C}^n$ tale che

$$h \neq 0, \quad Ah = c_rh .$$

Ovviamente si ha

$$\overline{h} \bullet \overline{h} \begin{cases} \in \mathbb{R} \\ \neq 0 \end{cases};$$

detto inoltre $\bullet_A$ il prodotto hermitiano associato alla matrice hermitiana A, ossia il prodotto hermitiano definito da

$$x \bullet_A y = x^T A\overline{y}, \qquad \forall x, y \in \mathbb{C}^n \ ,$$

si ha

$$\overline{h} \bullet_A \overline{h} \in \mathbb{R} \ .$$

Tenuto conto che

$$\overline{h} \bullet_A \overline{h} = \overline{h}^T Ah = \overline{h}^T c_r h = c_r \overline{h}^T h = c_r \overline{h} \bullet \overline{h} \ ,$$

si ottiene

$$c_r = \frac{\overline{h} \bullet_A \overline{h}}{\overline{h} \bullet \overline{h}} \in \mathbb{R} \ .$$

■

Il Lemma seguente prova che tutti i sottospazi di $\mathbb{C}^n$ *stabili rispetto a* $\mathscr{L}_A$, possiedono autovettori di A.

7.7.2 Lemma: Sia W un sottospazio di $\mathbb{C}^n$ tale che

$$\begin{cases} W \neq \{0\} \\ w \in W \Rightarrow Aw \in W \end{cases} .$$

Allora:

- ∘ esiste un autovettore $w \in \mathbb{C}^n$ di A, tale che $w \in W$.

(*Attenzione:* questo risultato e la dimostrazione che segue non utilizzano l'ipotesi che A sia hermitiana)

Cenno. Per l'ipotesi possiamo considerare l'applicazione lineare

$$f : W \to W$$

definita da

$$f(w) = Aw, \qquad \forall w \in W \ .$$

Sia

$$\mathscr{W} = (w_1, \ldots, w_m)$$

una base di W, e sia

$$B \in \mathbb{C}^{m \times m}$$

la matrice di f rispetto a $\mathscr{W}$. Il polinimio caratteristico

$$\det(B - xI) \in \mathbb{C}[x]$$

di B ha ovviamente radici in $\mathbb{C}$, e quindi B ha autovettori in $\mathbb{C}^m$; allora per il Teorema 5.4.1 anche f ha autovettori. Ovviamente, un autovettore w di f è un autovettore da A tale che $w \in W$. ■

Il seguente Teorema prova che gli autospazi di A sono a due a due ortogonali (rispetto al prodotto hermitiano canonico di $\mathbb{C}^n$), e che la loro somma è $\mathbb{C}^n$.

7.7.3 Teorema: Siano

$$\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{C}$$

gli autovalori di A scritti in una lista senza ripetizioni.

Sussistono gli asserti:

a) $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{R}$,

b) $\mathbb{C}^n = V_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_r}$,

c) per $\forall i \neq j$ si ha

$$V_{\lambda_i} \perp V_{\lambda_j} \ ,$$

ossia, per

$$\forall v \in V_{\lambda_i}, \forall w \in V_{\lambda_j}$$

si ha

$$v \perp w \ .$$

Cenno. a). Segue dala Teorema7.7.1.
b). La somma è diretta per il Teorema 5.1.5.
Supponiamo (per assurdo) che sia

$$V_{\lambda_1} + \cdots + V_{\lambda_r} \neq \mathbb{C}^n \ .$$

Si ponga

$$W = \left(V_{\lambda_1} + \cdots + V_{\lambda_r}\right)^{\perp} \ ;$$

per il Teorema 6.3.3 applicato a

$$V_{\lambda_1} + \cdots + V_{\lambda_r}$$

e al prodotto hermitiano canonico, si ha

$$W \neq \{0\} \ .$$

Sia $w \in W$; per

$$\forall \lambda_j, \ \forall v \in V_{\lambda_j}$$

si ha:

$$(Aw) \bullet v = (Aw)^T \overline{v} = w^T A^T \overline{v} = w^T \overline{A} \overline{v} =$$
$$w^T \overline{Av} = w^T \overline{\lambda_j v} = \overline{\lambda_j} w^T \overline{v} = \overline{\lambda_j}(w \bullet v) = 0 \ ;$$

ne segue

$$Aw \in W \ ;$$

per il Lemma 7.7.2 esiste un autovettore $\widetilde{w}$ di A tale che

$$\widetilde{w} \in W \ .$$

Essendo $\widetilde{w}$ ortogonale a tutti gli autovettori di A, ed essendo $\widetilde{w}$ stesso un autovettore di A, si ha allora

$$\widetilde{w} \bullet \widetilde{w} = 0 \ ,$$

assurdo, essendo $\widetilde{w} \neq 0$.

c). Siano $i \neq j$, e siano

$$v \in V_{\lambda_i}, \ w \in V_{\lambda_j} \ ;$$

tenuto conto che gli autovalori sono reali, si ha:

$$\lambda_i(v \bullet w) = (\lambda_i v) \bullet w = (Av) \bullet w = v^T A^T \overline{w} = \\ v^T \overline{Aw} = v^T \overline{\lambda_j w} = \lambda_j (v \bullet w) \ ;$$

allora si ha

$$(\lambda_i - \lambda_j)(v \bullet w) \ ,$$

ed essendo $\lambda_i - \lambda_j \neq 0$ si ottiene $v \bullet w = 0$. ■

La Definizione seguente introduce la nozione di *matrici unitarie*.

7.7.4 Definizione: Una matrice

$$U = (u_1, \ldots, u_n) \in \mathbb{C}^{n \times n}$$

si dice *unitaria* se le sue colonne sono un base ortonormale di $\mathbb{C}^n$, ossia se

$$u_i \bullet u_j = \delta_{ij} \qquad \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

Si verifichi che sono equivalenti gli asserti:

a) U è unitaria,
b) $U^* U = I$ (vedi Sezione 3.7),
c) U è invertibile e $U^{-1} = U^*$.

La Procedura seguente dice come costruire una base ortonormale di $\mathbb{C}^n$ costituita da autovettori di A, e come diagonalizzare A tramite una matrice unitaria.

7.7.5 Procedura: Siano

$$\lambda_1, \ldots \lambda_r, \quad V_{\lambda_1}, \ldots, V_{\lambda_r}$$

come nel precedente Teorema 7.7.3:

a) si determinino:

$$\begin{array}{lll} \text{una base} & (v_{11}, \ldots, v_{1n_1}) & \text{di } V_{\lambda_1} \\ & \vdots & \\ \text{una base} & (v_{r1}, \ldots, v_{rn_r}) & \text{di } V_{\lambda_r} \end{array}$$

b) si ortonormalizzino tali basi tramite la Procedura 7.6.6, ottenendo

$$\begin{array}{lll} \text{una base ortonormale} & (u_{11}, \ldots, u_{1n_1}) & \text{di } V_{\lambda_1} \\ & \vdots & \\ \text{una base ortonormale} & (u_{r1}, \ldots, u_{rn_r}) & \text{di } V_{\lambda_r} \end{array}$$

c) si ponga

$$U = (u_1, \ldots, u_n) = (u_{11}, \ldots, u_{1n_1}; \ldots; u_{r1}, \ldots, u_{rn_r}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$$

d) tenuto conto di c) del Teorema 7.7.3, si verifichi che
- $(u_1, \ldots, u_n)$ è una base ortonormale di $\mathbb{C}^n$ costituita da autovettori di A,
- U è una matrice unitaria, e quindi $U^{-1} = U^*$,
- $A = U \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{n_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_r I_{n_r} \end{pmatrix} U^{-1}$ è una diagonalizzazione di A in $\mathbb{C}^{n \times n}$.

Nota(sul tipo di definizione di A)**:** Si ricordi che la matrice A si dice "definita positiva, semidefinita positiva, etc" se tale risulta il prodotto hermitiano associato alla matrice A, ossia il prodotto hermitiano definito da

$$x \bullet_A y = x^T A \overline{y} \qquad \forall x, y \in \mathbb{C}^n \ .$$

Tenuto conto della Definizione 6.4.3, per stabilire il tipo di definizione di A, è sufficiente conoscere gli indici

$$\widetilde{r}, \widetilde{s}, n - (\widetilde{r} + \widetilde{s})$$

di "positività, negatività e nullità" di "$\bullet_A$".

Il Teorema che segue consente di dedurre tali indici dai *segni* degli autovalori di A e dalle dimensioni dei relativi autospazi.

7.7.6 Teorema: Siano

$$\begin{array}{ccc} \lambda_1 & V_{\lambda_1} & (u_{11}, \ldots, u_{1n_1}) \\ & \vdots & \\ \lambda_r & V_{\lambda_r} & (u_{r1}, \ldots, u_{rn_r}) \end{array}$$

ed

$$U = (u_1, \ldots, u_n) = (u_{11}, \ldots, u_{1n_1}; \ldots; u_{r1}, \ldots, u_{rn_r}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$$

come nella Procedura 7.7.5.

Allora la base

$$(\overline{u}_1, \ldots, \overline{u}_n)$$

di $\mathbb{C}^n$ verifica le proprietà:

- per $\forall i \neq j$ si ha

$$\overline{u}_i \bullet_A \overline{u}_j = 0 \ ;$$

Cenno. Detto $\lambda \in \mathbb{R}$ l'autovalore di u_j, si ha:

$$\overline{u}_i \bullet_A \overline{u}_j = \overline{u}_i^T A u_j = \overline{u}_i^T \lambda u_j = \lambda u_j^T \overline{u}_i = \lambda u_j \bullet u_i = 0 \ .$$

■

- per $\forall \overline{u}_{ij}$ si ha:

$$\overline{u}_{ij} \bullet_A \overline{u}_{ij} = \lambda_i \ .$$

Cenno. $\overline{u}_{ij} \bullet_A \overline{u}_{ij} = \overline{u}_{ij}^T A u_{ij} = \overline{u}_{ij}^T \lambda_i u_{ij} = \lambda_i \left(\overline{u}_{ij}^T u_{ij} \right) = \lambda_i$. ■

Tenuto conto del Teorema di Sylvester 6.4.1, si ha allora:

- $\widetilde{r} = \sum_{\lambda_i > 0} \dim V_{\lambda_i}$,
- $\widetilde{s} = \sum_{\lambda_i < 0} \dim V_{\lambda_i}$;

si verifichi inoltre che:

- $n - (\widetilde{r} + \widetilde{s}) \neq 0 \Leftrightarrow$ 0 è un autovalore di A,
- e che in tal caso si ha:

$$n - (\widetilde{r} + \widetilde{s}) = \dim V_0 \ .$$

7.8 Diagonalizzazione di matrici reali simmetriche

Questa Sezione è una riscrittuta della Sezione precedente, a parte la dimostrazione del Lemma 7.8.2 sostanzialmente diversa da quella del Lemma 7.7.2, e poche ovvie modifiche consistenti nell'abolizzione del coniugio.

La compattazione di questa e della Sezione precedente è stata evitata per renderne piú agevoli le letture.

Si consideri il campo reale $\mathbb{R}$, e sia

$$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

una matrice simmetrica.

Il Teorema seguente prova che tutte le radici del polinomio caratteristico di A sono reali.

7.8.1 Teorema: Sia $\Gamma(x) \in \mathbb{R}[x]$ il polinomio caratteristico di A. Siano

$$c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$$

tali che

$$\Gamma(x) = (-1)^n (x - c_1) \cdots (x - c_n) \ .$$

Si ha:

$$c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R} \ .$$

Cenno. Tenuto conto che A è ovviamente una matrice complessa hermitiana, l'asserto segue dal Teorema 7.7.1. ■

Il Lemma seguente prova che tutti i sottospazi di $\mathbb{R}^n$ *stabili rispetto a* $\mathscr{L}_A$, possiedono autovettori di A.

7.8.2 Lemma: Sia W un sottospazio di $\mathbb{R}^n$ tale che

$$\begin{cases} W \neq \{0\} \\ w \in W \Rightarrow Aw \in W \end{cases} .$$

Allora:

- esiste un autovettore $w \in \mathbb{R}^n$ di A, tale che $w \in W$.

(*Attenzione:* questo risultato e la dimostrazione che segue utilizzano l'ipotesi che A sia simmetrica)

Cenno. Per l'ipotesi possiamo considerare l'applicazione lineare

$$f : W \to W$$

definita da

$$f(w) = Aw, \quad \forall w \in W \ .$$

Per il Teorema 7.6.4 esistono basi ortonormali di W. Sia quindi

$$\mathscr{W} = (w_1, \ldots, w_m)$$

una base ortonormale di W.

Sia

$$B \in \mathbb{R}^{m\times m}$$

la matrice di f rispetto a $\mathscr{W}$.

Per il Teorema 7.6.5, dato $w \in W$ si ha

$$w \equiv_{\mathscr{W}} \begin{pmatrix} w \bullet w_1 \\ \vdots \\ w \bullet w_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m \ ;$$

ne segue che

$$B = \begin{pmatrix} f(w_1) \bullet w_1 & \cdots & f(w_m) \bullet w_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ f(w_1) \bullet w_m & \cdots & f(w_m) \bullet w_m \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} (Aw_1) \bullet w_1 & \cdots & (Aw_m) \bullet w_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ (Aw_1) \bullet w_m & \cdots & (Aw_m) \bullet w_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1^T A^T w_1 & \cdots & w_m^T A^T w_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ w_1^T A^T w_m & \cdots & w_m^T A^T w_m \end{pmatrix} .$$

Tenuto conto che A è una matrice simmetrica, la rappresentazione di B precedentemente ottenuta consente di verificare banalmente che anche B è una matrice simmetrica. Allora per il Teorema 7.8.1 il polinomio caratteristico di B, ossia

$$\det(B - xI) \in \mathbb{R}[x]$$

ha radici $\in \mathbb{R}$ (anzi, tutte le sue radici sono reali), e quindi B ha autovettori in $\mathbb{R}^m$; allora per il Teorema 5.4.1 anche f ha autovettori. Ovviamente, un autovettore w di f è un autovettore da A tale che $w \in W$. ■

Il seguente Teorema prova che gli autospazi di A sono a due a due ortogonali (rispetto al prodotto scalare canonico di $\mathbb{R}^n$), e che la loro somma è $\mathbb{R}^n$.

7.8.3 Teorema: Siano

$$\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{R}$$

gli autovalori di A scritti in una lista senza ripetizioni.

Sussistono gli asserti:

a) $\mathbb{R}^n = V_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_r}$,

b) per $\forall i \neq j$ si ha
$$V_{\lambda_i} \perp V_{\lambda_j} \ ,$$
ossia, per
$$\forall v \in V_{\lambda_i}, \forall w \in V_{\lambda_j}$$
si ha
$$v \perp w \ .$$

Cenno. a). La somma è diretta per il Teorema 5.1.5.
Supponiamo (per assurdo) che sia
$$V_{\lambda_1} + \cdots + V_{\lambda_r} \neq \mathbb{R}^n \ .$$
Si ponga
$$W = \left(V_{\lambda_1} + \cdots + V_{\lambda_r}\right)^{\perp} \ ;$$
per il Teorema 6.3.3 applicato a
$$V_{\lambda_1} + \cdots + V_{\lambda_r}$$
e al prodotto scalare canonico, si ha
$$W \neq \left\{0\right\} \ .$$

Sia $w \in W$; per
$$\forall \lambda_j, \ \forall v \in V_{\lambda_j}$$
si ha:
$$(Aw) \bullet v = (Aw)^T v = w^T A^T v = w^T A v = \\ w^T \lambda_j v = \lambda_j w^T v = \lambda_j (w \bullet v) = 0 \ ;$$
ne segue
$$Aw \in W \ ;$$
per il Lemma 7.8.2 esiste un autovettore $\widetilde{w}$ di A tale che
$$\widetilde{w} \in W \ .$$

Essendo $\widetilde{w}$ ortogonale a tutti gli autovettori di A, ed essendo $\widetilde{w}$ stesso un autovettore di A, si ha allora
$$\widetilde{w} \bullet \widetilde{w} = 0 \ ,$$
assurdo, essendo $\widetilde{w} \neq 0$.

b). Siano $i \neq j$, e siano
$$v \in V_{\lambda_i}, \ w \in V_{\lambda_j} \ ;$$

si ha:

$$\lambda_i(v \bullet w) = (\lambda_i v) \bullet w = (Av) \bullet w = v^T A^T w =$$
$$v^T A w = v^T \lambda_j w = \lambda_j (v \bullet w) \ ;$$

allora si ha

$$(\lambda_i - \lambda_j)(v \bullet w) \ ,$$

ed essendo $\lambda_i - \lambda_j \neq 0$ si ottiene $v \bullet w = 0$. ■

La Definizione seguente introduce la nozione di *matrici ortogonali.*

7.8.4 Definizione: Una matrice

$$U = (u_1, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

si dice *ortogonale* se le sue colonne sono un base ortonormale di $\mathbb{R}^n$, ossia se

$$u_i \bullet u_j = \delta_{ij} \qquad \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

Si verifichi che sono equivalenti gli asserti:

a) U è ortogonale,
b) $U^T U = I$,
c) U è invertibile e $U^{-1} = U^T$.

La Procedura seguente dice come costruire una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$ costituita da autovettori di A, e come diagonalizzare A tramite una matrice ortogonale.

7.8.5 Procedura: Siano

$$\lambda_1, \ldots \lambda_r, \quad V_{\lambda_1}, \ldots, V_{\lambda_r}$$

come nel precedente Teorema 7.8.3:

a) si determinino:

$$\begin{array}{l} \text{una base} \quad (v_{11}, \ldots, v_{1n_1}) \quad \text{di } V_{\lambda_1} \\ \qquad\qquad \vdots \\ \text{una base} \quad (v_{r1}, \ldots, v_{rn_r}) \quad \text{di } V_{\lambda_r} \end{array}$$

b) si ortonormalizzino tali basi tramite la Procedura 7.6.6, ottenendo

$$\begin{array}{l} \text{una base ortonormale} \quad (u_{11}, \ldots, u_{1n_1}) \quad \text{di } V_{\lambda_1} \\ \qquad\qquad\qquad \vdots \\ \text{una base ortonormale} \quad (u_{r1}, \ldots, u_{rn_r}) \quad \text{di } V_{\lambda_r} \end{array}$$

c) si ponga

$$U = (u_1, \ldots, u_n) = (u_{11}, \ldots, u_{1n_1}; \ldots; u_{r1}, \ldots, u_{rn_r}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

c) tenuto conto di b) del Teorema 7.8.3, si verifichi che

- $(u_1, \ldots, u_n)$ è una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$ costituita da autovettori di A,
- U è una matrice ortogonale, e quindi $U^{-1} = U^T$,
- $A = U \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{n_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_r I_{n_r} \end{pmatrix} U^{-1}$ è una diagonalizzazione di A in $\mathbb{R}^{n\times n}$.

Nota(sul tipo di definizione di A)**:** Si ricordi che la matrice simmetrica A si dice "definita positiva, semidefinita positiva, etc" se tale risulta il prodotto scalare associato alla matrice A, ossia il prodotto scalare definito da

$$x \bullet_A y = x^T A y \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^n \ .$$

Tenuto conto della Definizione 6.4.3, per stabilire il tipo di definizione di A, è sufficiente conoscere gli indici

$$\widetilde{r}, \widetilde{s}, n - (\widetilde{r} + \widetilde{s})$$

di "positività, negatività e nullità" di "$\bullet_A$".

Il Teorema che segue consente di dedurre tali indici dai *segni* degli autovalori di A e dalle dimensioni dei relativi autospazi.

7.8.6 Teorema: Siano

$$\begin{array}{ccc} \lambda_1 & V_{\lambda_1} & (u_{11}, \ldots, u_{1n_1}) \\ & \vdots & \\ \lambda_r & V_{\lambda_r} & (u_{r1}, \ldots, u_{rn_r}) \end{array}$$

ed

$$U = (u_1, \ldots, u_n) = (u_{11}, \ldots, u_{1n_1}; \ldots; u_{r1}, \ldots, u_{rn_r}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

come nella Procedura 7.8.5.

Allora la base

$$(u_1, \ldots, u_n)$$

di $\mathbb{R}^n$ verifica le proprietà:

- per $\forall i \neq j$ si ha
$$u_i \bullet_A u_j = 0 \ ;$$

  Cenno. Detto $\lambda \in \mathbb{R}$ l'autovalore di u_j, si ha:
$$u_i \bullet_A u_j = u_i^T A u_j = u_i^T \lambda u_j = \lambda u_j^T u_i = \lambda u_j \bullet u_i = 0 \ .$$
  ■

- per $\forall u_{ij}$ si ha:
$$u_{ij} \bullet_A u_{ij} = \lambda_i \ .$$

  Cenno. $u_{ij} \bullet_A u_{ij} = u_{ij}^T A u_{ij} = u_{ij}^T \lambda_i u_{ij} = \lambda_i \left(u_{ij}^T u_{ij} \right) = \lambda_i \ .$ ■

Tenuto conto del Teorema di Sylvester 6.4.1, si ha allora:

- $\widetilde{r} = \sum\limits_{\lambda_i \, > \, 0} \dim V_{\lambda_i}$,
- $\widetilde{s} = \sum\limits_{\lambda_i \, < \, 0} \dim V_{\lambda_i}$;

si verifichi inoltre che:

- $n - (\widetilde{r} + \widetilde{s}) \neq 0 \Leftrightarrow$ 0 è un autovalore di A,
- e che in tal caso si ha:
$$n - (\widetilde{r} + \widetilde{s}) = \dim V_0 \ .$$