

Prova scritta del 9/1/2026
TEMPO A DISPOSIZIONE: 120 minuti

MARCO		
(Cognome)	(Nome)	(Numero di matricola)

PRIMA PARTE

PUNTEGGIO : risposta mancante = 0 ; risposta esatta = +1 risposta sbagliata = -1
calcoli e spiegazioni non sono richiesti

• $i^{124} =$

1

• $z = 1 + i\sqrt{3} \Rightarrow z^6 =$

64

- Dati W e Z i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^3$:

$W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x_1 - 2x_2 - x_3 = 0 \right\}, Z = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$ Allora $\mathbb{R}^3 = W \oplus Z$ vero falso

- Determinare una base di W

$\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

• $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 4 & 8 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\dim(\text{Ker}(\mathcal{L}_A)) =$

2

$\text{rg}(A) =$

2

• $\det \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$

-1

• $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow m.g.(4) =$

3

• $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

- Il vettore $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ è autovettore dell'applicazione lineare associata alla matrice (barrare la matrice giusta)

$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$

$A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

~~$A_4 = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$~~

- Sia $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ lineare. Sapendo che $f \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, f \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$, allora $f \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

9-1-2026

⑦

$$\textcircled{1} \begin{cases} z^3 = -2\bar{z} \\ |z+2i| \leq 2 \end{cases}$$

$$(i) \quad z = \rho \cdot e^{i\varphi} \Rightarrow z^3 = \rho^3 \cdot e^{i3\varphi} ; \bar{z} = \rho \cdot e^{-i\varphi}$$

$$-2 = 2 \cdot e^{i\pi}$$

$$\text{eq} \Rightarrow \rho^3 \cdot e^{i3\varphi} = 2 \cdot \rho \cdot e^{i\pi} \cdot e^{-i\varphi}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \rho^3 = 2\rho, \quad \rho \in \mathbb{R}^+ \\ 3\varphi = \pi - \varphi + 2K\pi, \quad K \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

SOL. DISTINTE

$$\rho = 0 ; \quad \begin{cases} \rho = \sqrt{2} \\ \varphi = \frac{\pi}{4} + \frac{2K\pi}{4} \end{cases} \quad K=0,1,2,3$$

$$z_0 = 1+i$$

$$z_1 = -1+i$$

$$z_2 = -1-i$$

$$z_3 = 1-i$$

$$z_4 = 0$$

(ii)

(2)

$$|z + 2i| \leq 2$$



posto

$$z = x + iy$$

$$\sqrt{x^2 + (y+2)^2} \leq 2$$

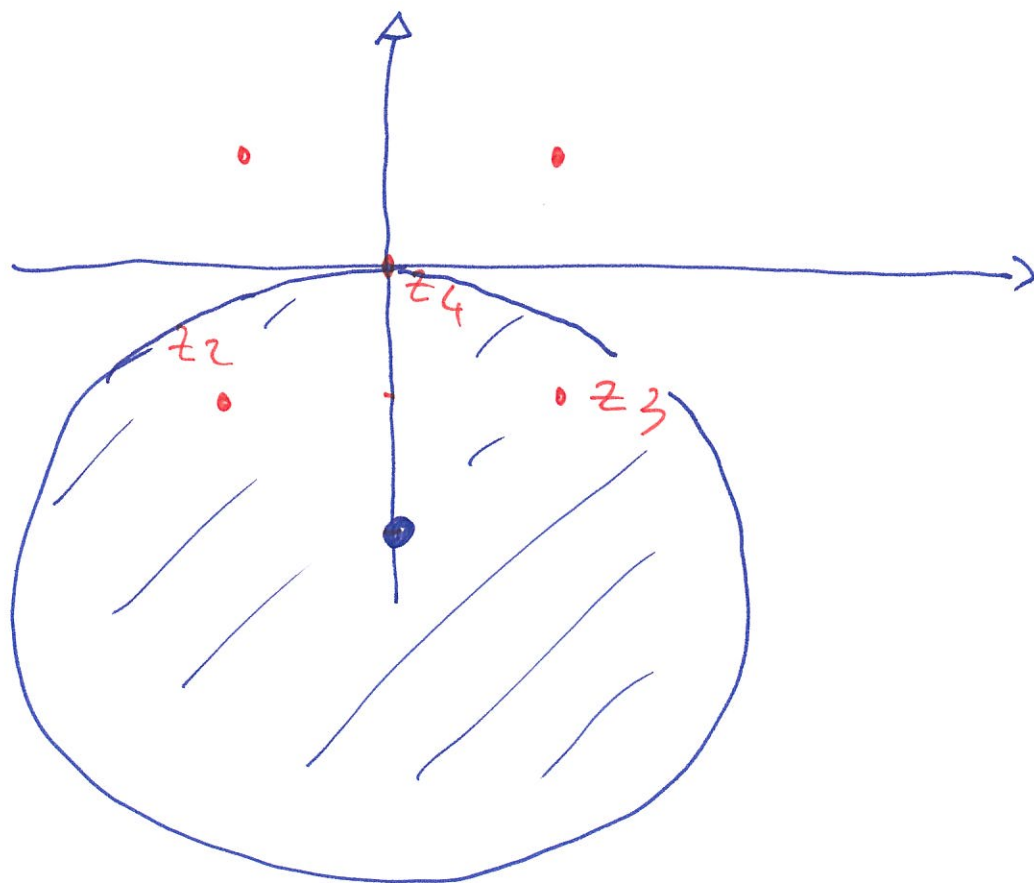
 $\Leftrightarrow$

$$x^2 + (y+2)^2 \leq 4$$

$\hookrightarrow$ cerchio raggio 2 centro $(0, -2)$

Le soluzioni che verificano la condizione $x^2 + (y+2)^2 \leq 4$

sono z_1, z_3, z_4



(2) $A_t = \begin{pmatrix} t & 0 & -3 \\ 4 & t & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

i) $\det(A_t) = t^2 + 2t - 24$

$\det(A_t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = 3, -4$

$M = \begin{pmatrix} 4 & t \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{ha} \quad \det \neq 0 \quad \forall t$

Quindi:

$t \neq 3, -4 \quad \begin{cases} \text{rg} = 3 \\ \dim(\text{ker}) = 0 \end{cases}$

$t = 3, -4 \quad \begin{cases} \text{rg} = 2 \\ \dim(\text{ker}) = 1 \end{cases}$

(ii) $t \neq 3, -4$

$3 = \text{rg}(A_t) \leq \text{rg}(A_t|b) \leq 3$

Quindi $\text{rg}(A_t) = 3 = \text{rg}(A_t|b)$

Per il teo. di R.C. $\exists !$ Soluzione

(4)

$$t=3:$$

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & -3 & -2 \\ 4 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \end{array} \right)$$

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -2 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{he } \det t \neq 0$$

$$\Rightarrow \operatorname{rg}(A|b) = 3$$

$$\text{Quindi} \quad \operatorname{rg}(A|b) = 3 > 2 = \operatorname{rg}(A)$$

$$\Rightarrow \text{non } \exists \text{ sol.}$$

$$t = -4:$$

$$b = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

"colonne 1"

$$\Rightarrow \operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(A|b) = 2$$

$$\Rightarrow \exists \infty \text{ soluzioni}$$

(iii) $t=3$ $rg=2$

(4)

$$\dim(\text{Im}) = 2$$

Le colonne 1, 2 sono l.i.n.d.

$$\Rightarrow \text{Im}(P_{A_t}) = \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\text{Eq: } Q_1 X_1 + Q_2 X_2 + Q_3 X_3 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \in \text{Im} \Rightarrow 3Q_1 + 4Q_2 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \in \text{Im} \Rightarrow 3Q_2 + 2Q_3 = 0$$

$$\Rightarrow \cancel{Q_3 = t}, \cancel{Q_2 = -\frac{2}{3}t}, \cancel{Q_1 = -\frac{4}{3}t}$$

$$Q_2 = t$$

$$Q_3 = -\frac{3}{2}t$$

$$Q_1 = -\frac{4}{3}t$$

posto $t=6$:

$$\boxed{-8X_1 + 6X_2 - 9X_3 = 0}$$

(5)

(3) $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ surjective
 t.c. $\text{Ker}(f) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle$

f surjective $\Leftrightarrow \text{rg}(f) = 2$

$\Leftrightarrow \text{span}(\text{colonne di } A) = \mathbb{R}^2$

$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad \hookrightarrow \quad A \quad 2 \times 3$

$\text{span}(\text{colonne di } A) = \mathbb{R}^2 \Rightarrow$ possiamo porre

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & \beta \end{pmatrix}$

con α, β da determinare.

$\text{Ker} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle \Leftrightarrow A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & \beta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\hookrightarrow \begin{cases} 1 + 3\alpha = 0 \\ 1 + 3\beta = 0 \end{cases}$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$

$$(4) A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

(6)

$$P_A(\lambda) = \lambda^2 \cdot (-\lambda - 2)^2$$

AUTOREALORI: $\lambda_0 = 0$ m.q. = 2 m.p. = 2

$\lambda_1 = -2$ m.q. = 2 m.p. = 2

A è triangolarizzabile poiché tutte le radici di $P_A(\lambda)$ sono REALI

A è diag.^{le} poiché $\forall \lambda_i$ si ha
m.q. $(\lambda_i) = m.p.(\lambda_i)$

AUTOSPAZI

$$V_0 = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$V_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$