

Esame di ALGEBRA LINEARE - anno accademico 2019/2020
 Corso di laurea in Ingegneria Gestionale
 Prova scritta del 19/12/2019
 TEMPO A DISPOSIZIONE: 120 minuti

(Cognome)	MARCO (Nome)	(Numero di matricola)
---	--	---

PRIMA PARTE

PUNTEGGIO : risposta mancante = 0 ; risposta esatta = +1 risposta sbagliata = -1
 calcoli e spiegazioni non sono richiesti

• Sia $z = 1 + i\sqrt{3}$. Scrivere z nella rappresentazione trigonometrica $z = \rho \cdot e^{i\vartheta}$: $z =$ $2 \cdot e^{i\frac{\pi}{3}}$

• $z = 1 + i\sqrt{3}$. Scrivere z^3 nella rappresentazione cartesiana: $z^3 =$ -8

• Dati W e Z i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^3$:

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 0 \right\}, \quad Z = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Determinare una base di $W \cap Z$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

• $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{rg}(A) =$ 2 $\dim(\operatorname{Ker}(\mathcal{L}_A)) =$ 4

• $\det \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & 3 \end{pmatrix} =$ 2

• $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A$ è diagonalizzabile ~~vero~~ falso

• Le soluzioni del sistema $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ costituiscono uno spazio affine di dimensione = 2

• Data $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ determinare il coefficiente di posto (2,3) della matrice A^{-1} : $-\frac{1}{2}$

• Sia $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ lineare. Sapendo che $f \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$, $f \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}$, allora $f \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

19-12-2019

(1)

Treccia soluzioni:

$$1. \quad \begin{cases} (z-4)^3 = 32(\bar{z}-4) \\ e^{(\frac{\pi}{2}z)} = -e^{4\pi} \end{cases}$$

$$1. eq. \quad z-4 = w \quad z = w+4$$

$$w^3 = 32 \cdot e^{i\pi} \cdot \bar{w}$$

$$\rho^3 \cdot e^{i3\varphi} = 32 \cdot \rho \cdot e^{i\pi - i\varphi}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \rho^3 = 32\rho \\ 3\varphi = \pi - \varphi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

sol. distinte

$$\rho = 0$$

↓

$$w_0 = 0$$

↓

$$z_0 = 4$$

$$\rho = 4\sqrt{2}$$

$$\varphi = \frac{\pi + 2k\pi}{4}$$

$$k = 0, 1, 2, 3$$

$$w_0 = 4 + 4i$$

$$w_1 = -4 + 4i$$

$$w_2 = -4 - 4i$$

$$w_3 = 4 - 4i$$

→

$$z_0 = 8 + 4i$$

$$z_1 = 4i$$

$$z_2 = -4i$$

$$z_3 = 8 - 4i$$

(2)

2. eq.

$$e^{\frac{\pi}{2}z} = e^{4\pi + i\pi}$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{2}z = 4\pi + i\pi + i2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow z = 8 + i(2 + 4k), \quad k \in \mathbb{Z}$$

SOL. SISTEMA: $8 + i4$
 $8 - i4$

(3)

(2)

$$A_t = \begin{pmatrix} 2 & t & t \\ t & 5 & -4 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$i) \det(A_t) = 2t^2 - 18t + 16$$

$$\det(A_t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = 1, 8$$

$$t \neq 1, 8 \quad \begin{array}{l} \text{rg} = 3 \\ \dim(\text{Ker}) = 0 \end{array}$$

$$t = 1, 8 \quad M = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \det(M) \neq 0$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} \text{rg} = 2 \\ \dim(\text{Ker}) = 3 - 2 = 1 \end{array}$$

$$ii) \quad t \neq 1, 8 \quad \exists! \text{ SOL.}$$

$$t = 1 \quad \text{rg}(A|b) = 3 > 2 = \text{rg}(A)$$

$$\Rightarrow \text{non } \exists \text{ SOL.}$$

$$t=8 \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$\Rightarrow \operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(A|b) = 2$$

$$\Rightarrow \exists \infty \text{ sol.}$$

$$\text{iii)} \quad \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 5 \\ 2x_1 + 2x_2 = 2 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 - t \\ x_2 = t \\ x_3 = -1 + t \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{sol.} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(5)

$$(3) \quad f = f_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\begin{aligned} \text{Im}(f) &= \{x_1 - x_2 - x_3 = 0\} \\ &= \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \end{aligned}$$

Posso scegliere $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & c \end{pmatrix}$

$$\text{Ker}(f) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \Rightarrow A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 + 3 + a = 0 \\ 1 + b = 0 \\ 3 + c = 0 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

④

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -3 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

⑥

$$P_A(\lambda) = \lambda^2 \cdot (\lambda - 2)^2$$

AUTOREVALORI:

0

m.a. = 2

m.g. = 1

2

m.a. = 2

m.g. = 2

$$\text{AUTOSPAZIO } V_0 = \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\text{AUTOSPAZIO } V_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

A è triang. le

A non è diag. le