Esame di Geometria e Algebra
Ingegneria Informatica
prova scritta del 16-2-1999

Esercizio 1. Si determini il numero degli interi positivi $x \leq 3003$ che verificano il sistema

$$\begin{cases} (x, 143) = 13 \\ x^2 - 3x + 2 \equiv 0 \quad (mod\ 77) \end{cases}$$

Esercizio 2. Si risolva nel campo complesso il sistema

$$\begin{cases} (\overline{z} + 2i)^6 = 64 \\ i(z - \overline{z}) \geq z + \overline{z} \end{cases}$$

Esercizio 3. Determinare il numero delle funzioni

$$f : \{1, \dots, 10\} \to \{1, \dots, 100\} \text{ tali che}$$
$$x \neq y \implies f(x) \not\equiv f(y) \quad (mod\ 10)$$

Esercizio 4. Sia $W \subset \mathbf{R}[x]$ il sottospazio vettoriale (su $\mathbf{R}$) generato dai polinomi

$$(x-1)^2,\ (x+1)^2,\ x-1,\ x+1,\ 1,$$

e sia $\varphi : W \to W$ l'applicazione lineare definita da $\varphi(f) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$.

(i) Determinare $\dim(W)$, $\dim(Im(\varphi))$, $\dim(Ker(\varphi))$.
(ii) Determinare gli autovalori di φ e dire se φ è triangolarizzabile e/o diagonalizzabile.

Esercizio 5. Al variare di $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ sia $\mathbf{f}_{\alpha,\beta} : \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ la forma bilineare

$$\mathbf{f}_{\alpha,\beta}\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right) = \beta \cdot x_1 y_1 + \alpha \cdot x_1 y_2 + \alpha^2 \cdot x_2 y_1 + \beta \cdot x_2 y_2$$

Determinare i valori di $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ per cui
(i) $f_{\alpha,\beta}$ è una forma bilineare simmetrica;
(ii) $f_{\alpha,\beta}$ è una forma bilineare antisimmetrica;
(iii) $f_{\alpha,\beta}$ è un prodotto scalare non degenere.