AUTOVALORI & AUTOVETTORI

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineare

(ENDOMORFISMO)

$$f(v) = \lambda_0 \cdot v \qquad v \neq 0_V$$

AUTOVALORE

AUTOVETTORE relativo all'autovalore λ_0

ESEMPI

① $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineare

$\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ è autovettore relativo all' autovalore $\lambda_0 = 3$

SE

$$\underbrace{f\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}}_{\text{autovettore}} = \underbrace{3}_{\text{autovalore}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}}_{\text{autovettore}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \\ -6 \end{pmatrix}$$

(2) $f = d_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lineare

A matrice 2×2

$\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ è autovettore relativo all'autovalore $\lambda_0 = -1$

SE

$$A \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}}_{\text{autovettore}} = \underbrace{-1}_{\text{autovalore}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}}_{\text{autovettore}} = \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \end{pmatrix}$$

③ $f = \mathcal{L}_A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$

$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ è autovettore relativo all'autovalore $\lambda_0 = 0$

SE

$$A \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\text{autovettore}} = \underbrace{0}_{\text{autovalore}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\text{autovettore}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

OSS. 1 Identifichiamo f con la matrice A t.c. $f = L_A$

$$f(v) = A \cdot v$$

OSS. 2 Gli autovalori e gli autovettori sono intrinsechi per f (non dipendono dalla BASE)

Come trovare gli autovalori?

Teorema. $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ autovalore per A

$$\Updownarrow$$

λ_0 RADICE di $p_A(\lambda)$

DOVE $p_A(\lambda)$ = polinomio caratteristico di A

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_d)$$

polinomio nella variabile λ di grado n

$$P_A(\lambda) = (-1)^n \cdot \lambda^n + (-1)^{n-1} \cdot tr(A) \cdot \lambda^{n-1} + \dots + \det A$$

dove $tr(A) = a_{11} + a_{22} + \_ + a_{nn}$

somma elementi sulla diagonale

Esempi

① A matrice 4x4

$$P_A(\lambda) = \lambda^4 + \_\_ + \det(A)$$

(2) A matrice 3×3

$$P_A(\lambda) = -\lambda^3 + \_\_ + \det(A)$$

(3) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

$$\det(A) = 4-6 = -2$$

$$\mathrm{tr}(A) = 1+4 = 5$$

$$\Rightarrow \quad P_A(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda - 2$$

④ $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad p_{A'}(\lambda) = p_A(\lambda)$$

ACHTUNG!

Se facciamo operazioni elementari su righe o colonne (GAUSS) pol. CAR. CAMBIA.

strategia utile per calcolare $p_A(\lambda)$ & trovare le radici:

cercare di fattorizzare il polinomio

ESEMPIO

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$p_A(\lambda) = \det\left(A - \lambda\, \mathrm{Id}\right)$$

$$= \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

sviluppo rispetto colonne 2

$$p_A(\lambda) = (3-\lambda)\cdot \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (3-\lambda)\cdot\left(\lambda^2 - 2\lambda + 1 - 1\right)$$

$$= (3-\lambda) \cdot \lambda \cdot (\lambda - 2)$$

RADICI: $3, 0, 2$

AUTOVALORI di A: $3, 0, 2$

PROP. pol. caratteristico

è INVARIANTE

per cambiamento di BASE

CIOE' :

$$\boxed{\begin{gathered} A' = M^{-1} \cdot A \cdot M \\ \Downarrow \\ p_{A'}(\lambda) = p_A(\lambda) \end{gathered}}$$

Come trovare gli AUTOVETTORI?

v autovettore relativo a λ_0

$$\Updownarrow$$

$$A \cdot v = \lambda_0 \cdot v$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{v \in \operatorname{Ker}(A - \lambda_0 \mathrm{Id})}$$

dove A = matrice associata a f

DEF. AUTOSPAZIO relativo all'autovalore λ_0: $\overset{\text{def}}{=} \boxed{\operatorname{Ker}(A - \lambda_0 \mathrm{Id})}$

AUTOSPAZIO relativo a λ_0 = $\{$ autovettori relativi a λ_0 $\} \cup \{0_V\}$

<u>N.B.</u> AUTOSPAZIO è sottospazio vettoriale

<u>PROP.</u> Se $\lambda_1 \neq \lambda_2$ sono autovalori di A

Posto V_1 = AUTOSPAZIO relativo a λ_1

V_2 = AUTOSPAZIO relativo a λ_2

ALLORA: $V_1 + V_2$ è somma diretta

TRIANGOLARIZZABILITÀ

DEF. A è triang.le $\Leftrightarrow$

$\exists$ M invertibile t.c. $M^{-1} \cdot A \cdot M = T$

dove T matrice triangolare

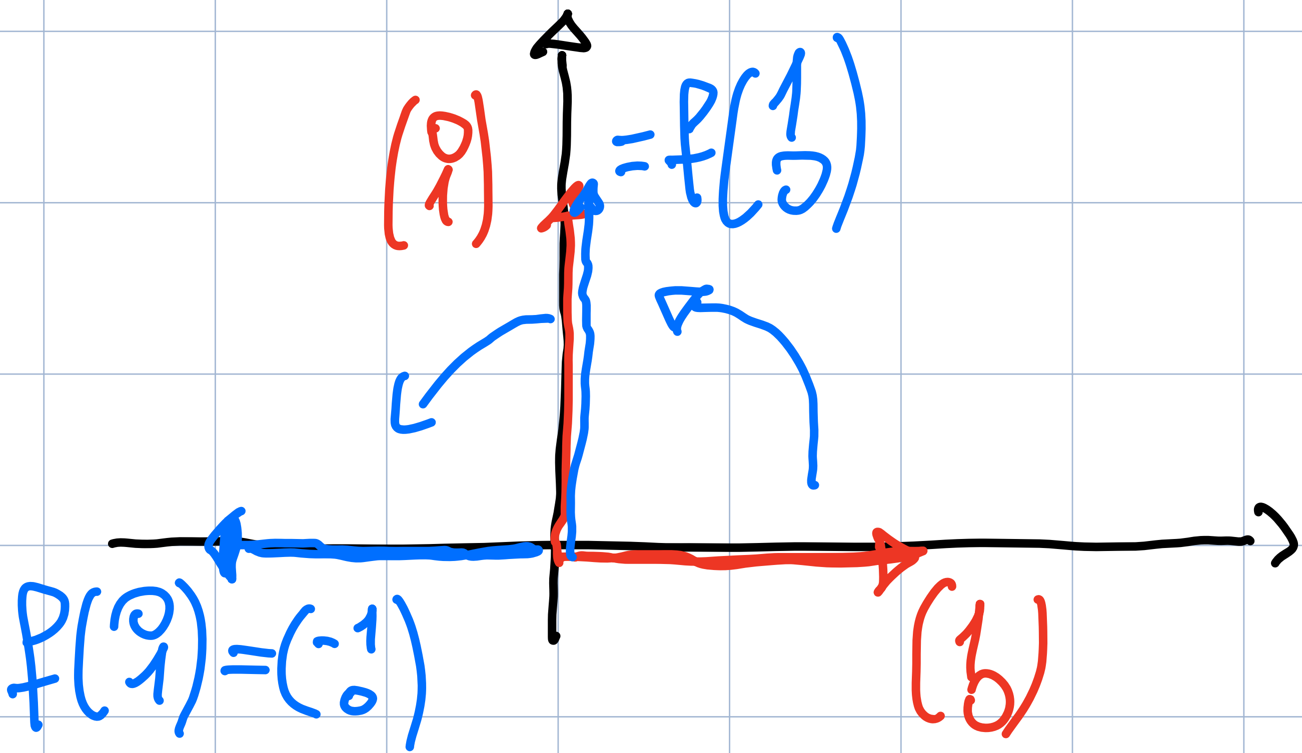
Teorema A A è triangolarizz. (su $\mathbb{R}$)

$\Updownarrow$

Tutte le RADICI di $p_A(\lambda)$ sono reali ($\in \mathbb{R}$)

Esempio di MATRICE non triangolarizzabile:

MATRICE ASSOCIATA ALLA ROTAZIONE di $\frac{\pi}{2}$ in $\mathbb{R}^2$



$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$f\binom{1}{0}$ $\qquad$ $f\binom{0}{1}$

$$P_A(\lambda) = \det\begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 1$$

$P_A(\lambda) = \lambda^2 + 1$ non ha radici $\in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ A non è triang.$^{\text{le}}$

DIAGONALIZZABILITA'

DEF. A $n \times n$ è diagonalizz.$^{\text{le}}$

$\Leftrightarrow$ $\exists$ M invertibile t.c.

$M^{-1} \cdot A \cdot M = D$ diagonale

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & d_2 & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & d_n \end{pmatrix}$$

Sia λ_0 AUTOVALORE per A

def. La molteplicità ALGEBRICA di λ_0

(NOTAZIONE: $m.a.(\lambda_0)$)

è la molteplicità di λ_0 come RADICE di $p_A(\lambda)$

molteplicità algebrica di λ_0

$\Updownarrow$

"quante volte si ripete λ_0 come radice"

PIÙ PRECISAMENTE:

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Teorema (Ruffini):} \\ \qquad \lambda_0 \text{ RADICE di } P(\lambda) \\ \qquad\qquad \Updownarrow \\ (\lambda-\lambda_0) \text{ DIVIDE } P(\lambda)\end{array}}$$

Esempio: 5 è RADICE di $P(\lambda)$

$$\Updownarrow$$

$(\lambda-5)$ divide $P(\lambda)$

molteplicità di λ_0 =

"numero di volte che $(\lambda-\lambda_0)$ divide $p(\lambda)$"

CIOE'

m.a. (λ_0) = numero intero m t.c.

$(\lambda-\lambda_0)^m$ divide $p(\lambda)$

&

$(\lambda-\lambda_0)^{m+1}$ non divide $p(\lambda)$

ESEMPI

- $p_A(\lambda) = (\lambda - 3)^4$ $\lambda_1 = 3$ autovalore con molt. alg. $= 4$

- $p_A(\lambda) = \lambda^2 \cdot (\lambda+1)^3 \cdot (\lambda - 5)$

autovalori:

0 m.a. $= 2$

-1 m.a. $= 3$

5 m.a. $= 1$

OSS. Nel caso A matrice 2×2

$p_A(\lambda)$ ha grado 2

allora:

- se $\Delta = 0$

ho 1 radice con molt. $= 2$

- se $\Delta > 0$ ho 2 radici con molt. $= 1$

Esempio. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

$$p_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (1-\lambda)\cdot(3-\lambda) + 1$$

$$= \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2$$

$\Delta = 0$ $\qquad$ 2 radice con molt. $=2$

---

def. La molteplicità GEOMETRICA di λ_0

(NOTAZIONE: $m.g.(\lambda_0)$)

è

$$= \dim(\operatorname{Ker}(A - \lambda_0 I_d))$$

MOLT. GEOMETRICA di λ_0 $\longleftrightarrow$ numero max di autovettori relativi a λ_0 lin. IND

PROP. Sia $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ AUTOVALORE

ALLORA:

$$1 \leq m.g.(\lambda_0) \leq m.a.(\lambda_0)$$

In particolare:

$$m.a.(\lambda_0) = 1 \Rightarrow m.g.(\lambda_0) = m.a.(\lambda_0) = 1$$

Teorema B. A matrice $n \times n$ è diagonalizzabile

$\Updownarrow$

- A è triangolarizzabile
  &
- $\forall$ autovalore λ_i si ha $m.g.(\lambda_i) = m.a.(\lambda_i)$

$\Updownarrow$

$\exists$ BASE $\{v_1, \ldots, v_n\}$ di $\mathbb{R}^n$ costituita da autovettori di $f = d_A$

Se $\{v_1, \ldots, v_n\}$ BASE di autovettori per A

Poniamo $M = (v_1 \ldots v_n)$

ALLORA:

$$M^{-1} \cdot A \cdot M = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

matrice diagonale con gli autovalori sulla diagonale (contati con molteplicità)

N. B.

- $1 \leq m.g.(\lambda_i)$

$\Updownarrow$

se $\exists$ autovalore λ_i allora deve esistere almeno $\underline{1}$ autovettore relativo

- $m.g.(\lambda_i) \leq m.a.(\lambda_i)$

$\Updownarrow$

numero di autovettori lin. IND. $\leq$ numero di volte che si ripete l'AUTOVALORE

$$1 \le m.g.(\lambda_i) \le m.a.(\lambda_i)$$

COR.

$$\boxed{\begin{array}{c} m.a.(\lambda_i) = 1 \\ \Downarrow \\ m.g.(\lambda_i) = 1 \end{array}}$$

In particolare:

A $n \times n$ ha

<u>n</u> autovalori reali

<u>DISTINTI</u>

(cioè $\forall \lambda_i \quad m.a.(\lambda_i) = 1$)

$\Rightarrow$ A è <u>DIAGONALIZZABILE</u>

Esempi.

① $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda\, Id) =$$

$$= \det\begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 1$$

RADICI: $+1, -1$

entrambe con molt. $= 1$

CIOE'

AUTOVALORI: $\lambda_1 = 1$ con m.a. $= 1$

Quindi per Cor. $\Rightarrow$ m.g. $= 1$

$\lambda_2 = -1$ con m.a. $= 1$ $\Rightarrow$ m.g. $= 1$

Più velocemente:

$$p_A(\lambda) = \lambda^2 - 1$$ polinomio di grado 2

ha 2 radici distinte quindi con molt. = 1

$\Downarrow$

A è diag.le

In questo caso A è DIAGONALIZZABILE

AUTOVETTORI relativi a $\lambda_1 = 1$

$$\operatorname{Ker}(A - Id) = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

AUTOVETTORI relativi a $\lambda_2 = -1$

$$\operatorname{Ker}(A + Id) = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Posto $M = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

allora

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

matrice costituita da autovettori

autovalori

2

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad 4 \times 4$$

$$P_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 4-\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (4-\lambda)^4$$

matrice triangolare

RADICI di $P_A(\lambda)$: $\lambda_1 = 4$ con m.a. $= 4$

AUTOVALORI:

$\lambda_1 = 4$ $\quad$ m.a.$(4) = 4$

MOLTEPLICITÀ GEOMETRICA di $\lambda_1 = 4$

$= \dim(\operatorname{Ker}(A - 4\,Id))$

$$A - 4\,Id = \begin{pmatrix} 4-4 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4-4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4-4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4-4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{rg}(A - 4\,Id) = 2$$

(righe 3, 4 = 0 ; righe 1, 2 lin. IND.)

$$\Rightarrow \dim(\mathrm{Ker}(A - 4\,Id)) = 4 - 2 = 2$$

$$\Rightarrow \boxed{m.g.(4) = 2}$$

CONCLUSIONE:

$$m.g.(4) = 2 < 4 = m.a.(4)$$

$$\Downarrow$$

- A non è DIAGONALIZZABILE

- A è TRIANGOLARIZZABILE
  poiché 4 unica radice
  $4 \in \mathbb{R}$

(In effetti A era già in forma TRIANGOLARE)

3

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad 4 \times 4$$

Triangolare

$$P_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2-\lambda & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3-\lambda & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda)(4-\lambda)$$

RADICI : 1, 2, 3, 4

TUTTE con molt. = 1

AUTOVALORI :

$\lambda_1 = 1$ m.a. = 1 QUINDI m.g. = 1

$\lambda_2 = 2$ m.a. = 1 QUINDI m.g. = 1

$\lambda_3 = 3$ m.a. = 1 QUINDI m.g. = 1

$\lambda_4 = 4$ m.a. = 1 QUINDI m.g. = 1

$\boxed{\text{CONCLUSIONE:}}$ • Tutte le radici $\in \mathbb{R}$

• $\forall \lambda_i \quad m.a. = 1 = m.g.$

$\Rightarrow$ A è DIAGONALIZZABILE

$\boxed{\text{n.b.}}$

Abbiamo usato PROP.

$$m.a.(\lambda_i) = 1 \Rightarrow m.g.(\lambda_i) = 1$$

Potevamo usare Teo.

A $n \times n$ con n autovalori distinti $\Rightarrow$ A è diag.le

In generale:

N.B. Se $\exists$ un autovalore λ_5

t.e. $m.g.(\lambda_5) < m.a.(\lambda_5)$

ALLORA A non è diag.^{le}

Esercizi compito

1

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- autovalori m.a., m.g.
- autovettori
- A è diag.le / triang.le ?

sol.

$$A - \lambda Id = \begin{pmatrix} -2-\lambda & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 \\ 5 & -1 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_d) =$$

$$\det\begin{pmatrix} -2-\lambda & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 \\ 5 & -1 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} =$$

sviluppo rispetto colonna 3

$$(-\lambda)\cdot\det\begin{pmatrix} -2-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 5 & -1 & 2-\lambda \end{pmatrix} =$$

sviluppo rispetto riga 2

$$= (-\lambda)^2\cdot\det\begin{pmatrix} -2-\lambda & 1 \\ 5 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (-\lambda)^2 \cdot (\lambda^2 - 4 - 5) = (-\lambda)^2 \cdot (\lambda^2 - 9)$$

RADICI: $(-\lambda)^2 = 0 \quad \cup \quad (\lambda^2 - 9) = 0$

$\downarrow$

0 con molt. alg. = 2

$\downarrow$

3, −3

con molt. = 1

AVTOVALORI:

- 3 m.a. = 1 QUINDI m.g. = 1
- −3 m.a. = 1 QUINDI m.g. = 1
- 0 m.a. = 2

m.g.(0) deve essere calcolata

$$m.g.(0) = \dim(\mathrm{Ker}(A - 0\,\mathrm{Id}))$$

$$= \dim(\mathrm{Ker}(A))$$

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

riga 2 $= 0 =$ riga 3

righe 1, 4 sono lin. ind.

$$\Downarrow$$

$$rg(A) = 2$$

$\Rightarrow \dim \operatorname{Ker}(A) = 4-2 = 2$

CIOÈ: $m.g.(0) = 2$

conclusione:

AUTOVALORI →

- 3 $\quad m.a. = 1 = m.g.$
- -3 $\quad m.a. = 1 = m.g.$
- 0 $\quad m.a. = 2 = m.g.$

Tutte le radici di $P_A(\lambda)$ sono REALI

&

$\forall \lambda_i \quad m.a.(\lambda_i) = m.g.(\lambda_i)$

$\Rightarrow$ A è diag.le

AUTOVETTORI :

- Autospazio relativo a $\lambda_1 = 3$

$$Ker\left(A - 3\,Id\right)$$

$$A - 3\,Id = \begin{pmatrix} -2-3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 5 & -1 & 0 & 2-3 \end{pmatrix}$$

n.b. : $m.a.(3) = 1 \Rightarrow m.g.(3) = 1$

$\Rightarrow$ Ker sarà descritto da 1 parametro

Ker $(A - 3\,Id)$:

$$\begin{cases} -5x_1 + x_2 + x_4 = 0 \\ -3x_2 = 0 \\ -3x_3 = 0 \\ 5x_1 - x_2 - x_4 = 0 \end{cases}$$

eq(2): $x_2 = 0$

eq(3): $x_3 = 0$

eq(4) $= -$ eq(1) quando $x_2 = 0$, $x_3 = 0$

SISTEMA $\Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ -5x_1 + x_4 = 0 \end{cases}$

$x_1 = t$ $\quad x_4 = 5t$

AUTOSPAZIO relativo a $\lambda_1 = 3$

$$V_1 = \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \right\rangle$$

autovettori relativi a $\lambda_1 = 3$

$$V_1 \setminus \{0_V\} = \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} : t \neq 0 \right\}$$

- Autospazio relativo a $\lambda_2 = -3$

$$\mathrm{Ker}\,(A + 3\,\mathrm{Id})$$

$$A+3\,Id = \begin{pmatrix} -2+3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & +3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +3 & 0 \\ 5 & -1 & 0 & 2+3 \end{pmatrix}$$

$Ker(A+3\,Id)$:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_4 = 0 \\ 3x_2 = 0 \\ 3x_3 = 0 \\ 5x_1 - x_2 + 5x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_1 + x_4 = 0 \\ 5x_1 + 5x_4 = 0 \end{cases}$$ ← inutile

Sol: $x_1 = t$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = -t$

AUTOSPAZIO relativo a $\lambda_2 = -3$

$$V_2 = \left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

- AUTOSPAZIO relativo a $\lambda_3 = 0$

$$\mathrm{Ker}(A - 0\,\mathrm{Id})$$
$$\shortparallel$$
$$\mathrm{Ker}(A)$$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_4 = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \\ 5x_1 - x_2 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

n.b. In questo x_3 non compare nel sistema lineare

$\Leftrightarrow$ in ogni equazione il coeff. di x_3 è nullo

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + 0 \cdot x_3 + x_4 = 0 \\ + 0 \cdot x_3 \quad 0 = 0 \\ + 0 \cdot x_3 \quad 0 = 0 \\ 5x_1 - x_2 + 0 \cdot x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ devo tenere conto di x_3 come param.

Algoritmo di Gauss:

$$eq(4) \leftrightarrow eq(4) + \frac{5}{2} eq(1)$$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_4 = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \\ \frac{3}{2}x_2 + \frac{9}{2}x_4 = 0 \end{cases}$$

- $x_4 = t$ parametro

(4): $x_2 = -\frac{9}{3}x_4 = -3t$

(1): $x_1 = \frac{1}{2}(x_2 + x_4) = -t$

- $x_3 = s$ parametro

poiché nel sistema avevamo $0 \cdot x_3$ in ogni riga

AUTOSPAZIO relativo a $\lambda_3 = 0$

$$V_3 = \left\{ s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

AUTOVETTORI relativi a $\lambda_3 = 0$

$$V_3 \setminus \{0_V\} = \left\{ s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : (s,t) \neq (0,0) \right\}$$

$$D = \begin{pmatrix} 3 & & & 0 \\ & -3 & & \\ & & 0 & \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$$

matrice con gli autovalori sulla diagonale

M = matrice autovettori corrispondenti :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ALLORA :

$$M^{-1} \cdot A \cdot M = \begin{pmatrix} 3 & & 0 & \\ & -3 & & \\ & 0 & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix} = D$$

Esercizio 2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- autovalori con m.a., m.g.
- Triang.^{le}? diag.^{le}?

Sol. $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_4) =$

$$= \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1-\lambda \end{pmatrix}$$

svieuppo rispetto colonne 3

$$= (-\lambda) \cdot \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 & -1 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 1 & -1 & -1-\lambda \end{pmatrix}$$

svieuppo rispetto rige 2

$$= (-\lambda)^2 \cdot \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & -1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (-\lambda)^2 \cdot \left(\lambda^2 - 1 + 1 \right)$$

$$= \lambda^4$$

RADICI: 0 con molt. $= 4$

AUTOVALORI: 0 con m. a. $= 4$

$$m.g.(0) = \dim(\operatorname{Ker}(A - 0 I_4))$$
$$= \dim(\operatorname{Ker}(A))$$
$$= 4 - rg(A)$$

$$rg(A) = 2$$

poiché $\text{riga}(1) = \text{riga}(4)$; $\text{riga}(2) = 0$

$$\begin{array}{l} \\ \text{lin} \\ \text{IND.} \\ \\ \end{array}
\begin{array}{c} \to \\ \\ \to \\ \\ \end{array}
\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$\text{riga}(1)$
$\text{riga}(3)$ IND.

eq$^{\text{nte}}$ colonne 2 = − colonne 1

colonne 3 = 0

colonne 1, 4 lin. IND.

CONCLUSIONE:

0 autovalore di A

$$m.a.(0) = 4$$

$$m.g.(0) = 2$$

$$m.g. \neq m.a. \implies$$

A non è diag.^le

$$p_A(\lambda) = \lambda^4$$ ha le radici REALI

(λ è l'unica radice)

Quindi A è triang.^{le}

La matrice di questo esercizio è

Esempio di matrice NILPOTENTE

Def. A nilpotente se $\exists\, k$ t.c. $A^k = 0$

Teorema. A nilpotente

$$\Updownarrow$$

$$p_A(\lambda) = \lambda^n$$

(λ è autovalore con m.a. $= n$)

ESERCIZIO. Sia A nilpotente.

Allora A è diag.le $\Updownarrow$ A è la matrice nulla.

SOL

A nilpotente $\Leftrightarrow p_A(\lambda) = \lambda^n$

$\Leftrightarrow 0$ autovalore con $m.a. = n$

A diag.le $\Leftrightarrow m.g.(0) = n$

$\Leftrightarrow \dim \operatorname{Ker}(A) = n$

$\iff \quad A = 0$

PROP. pol. caratteristico è INVARIANTE per cambiamento di BASE

cioè:

$$\boxed{\begin{gathered} A' = M^{-1} \cdot A \cdot M \\ \Downarrow \\ P_{A'}(\lambda) = P_A(\lambda) \end{gathered}}$$

ALTRI ESERCIZI

i

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$m.g.(6) = ?$$

Sol. $m.g.(6) = \dim(\ker(A - 6\,Id))$

$$(A - 6\,Id) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$

$rg = 2$

poiché riga 1 $= 0$

riga 3 $= 0$

righe 2, 4 ind.

$\Rightarrow \dim(\ker(A - 6\,Id)) = 4 - 2 = 2$

$\Rightarrow m.g.(6) = 2$

ii

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

è diag.^{le} ?

Risposta:

$$P_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 2 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= \lambda^2 - 2\lambda + 1 - 6$$

$$= \lambda^2 - 2\lambda - 5$$

RADICI: $\dfrac{2 \pm \sqrt{4+20}}{2}$

$\Delta = 24 > 0$

$\Downarrow$

$\exists$ 2 RADICI distinte

OVVERO con molt. $= 1$

$\Downarrow$

$\exists$ 2 autovalori distinti

con $m.a. = 1$

Per il COR. $m.a. = 1 \Rightarrow m.g. = 1$

Poiché A è matrice 2×2

allora ho 2

autovalori REALI

$m.a. = 1 = m.g.$

$\Rightarrow$ A è diag.^{le}

iii $\quad A = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

è diag.^{le} ?

$$P_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & -4 \\ 2 & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$= \lambda^2 + 8$$

$\Delta < 0 \quad \neg \Downarrow$

$\exists$ RADICI COMPLESSE non reali

$\Downarrow$

A non è triang.^{le} su $\mathbb{R}$

$\Downarrow$

A non è diag.^{le}

iv

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

è diag.^{le} ?

$$p_A(\lambda) = \det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 0 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (2-\lambda)^2 \qquad \Delta = 0$$

autovalori : 2 con $m.a. = 2$

dobbiamo controllare $m.g.(2)$

$$(A - 2\,I_d) = \begin{pmatrix} 2-2 & 3 \\ 0 & 2-2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$rg\,(A - 2\,I_d) = 1$$

$\Rightarrow \quad m.g.(2) = 2-1 = 1$

CONCLUSIONE:

$m.g.(2) = 1 < 2 = m.a.(2)$

$\Downarrow$

- A non è diag.le
- A è triang.le poiché $2 \in \mathbb{R}$

Esercizio

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ è autovettore per quale delle seguenti matrici ?

A) $= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$

B) $= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

C) $= \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

<u>SOL</u>. Per definizione:

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ è autovettore per la matrice A

$$\Updownarrow$$

$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda_0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

per λ_0 autovalore

Calcoliamo i prodotti

(matrice) · (vettore)

A) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 12 \end{pmatrix} \neq \lambda_0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

B) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \neq \lambda_0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

C) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} = 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Risposta: (C)

Esercizio di Teoria:

A diag.^{le}

$\Downarrow$

A^2 diag.^{le}

Suggerimento:

$$A^2 = A \cdot A$$

$$M^{-1} \cdot A \cdot M = D$$

$$\Updownarrow$$

$$A = M \cdot D \cdot M^{-1}$$

Quindi $A^2 = A \cdot A$

$$= (M \cdot D \cdot M^{-1}) \cdot (M \cdot D \cdot M^{-1})$$

prodotto tra matrici é associativo

$$= M \cdot D \cdot \cancel{(M^{-1} \cdot M)} \cdot D \cdot M^{-1}$$

$= M \cdot D \cdot D \cdot M^{-1} = M \cdot D^2 \cdot M^{-1}$

conclusione :

A^2 è diagonalizzabile

&

$\{$ autovettori di $A^2 \} = \{$ autovettori di $A \}$

Poiché $M = M$

λ_i autovalore di $A \Rightarrow (\lambda_i)^2$ autovalore di A^2

Usando la def.

λ_i autovalore relativo a v_i

$$A \cdot v_i = \lambda_i \cdot v_i$$

$$A^2 \cdot v_i = A \cdot (A \cdot v_i)$$

$$= A \cdot (\lambda_i \cdot v_i)$$

per linearità $= \lambda_i \cdot [A \cdot v_i]$

$$= \lambda_i \cdot (\lambda_i \cdot v_i)$$

$$= (\lambda_i')^2 \cdot v_i'$$

Come trovare M per A triang.le non diag.le

Esempio :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$p_A(\lambda) = -\lambda^3$$

autovalore 0 con m.e. $=3$

m.g. $=1$

$$\operatorname{Ker}(A) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Proprietà fondamentale di

A: $\quad A^3 = 0$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{A} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{A} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{A} 0_V$$

In generale: se λ_i ha molt. alg. $= m_i$

Costruisco matrice a blocchi

$$\left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix}\lambda_i & 1 & \\ & \ddots & \ddots \\ 0 & & \lambda_i\end{matrix} & \\ \hline & \end{array}\right.$$

I blocchi li costruisco considerando

$$\operatorname{Ker}\left((A - \lambda_i \, Id)^{e} \right)$$

con $\quad 1 \leq e \leq m_i$