FORMULA del cambiamento di BASE

Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineare

$\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$ BASE CANONICA

$\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ NUOVA BASE

Consideriamo :

A = matrice associata ad f rispetto BASE CANONICA $\mathcal{E}$ in partenza e arrivo

A' = matrice associata ad f rispetto BASE $\mathcal{B}$ in partenza e arrivo

Pb. A e A' come sono correlate?

N.B.

A e A' rappresentano la stessa f, ma rispetto a basi differenti

Risposta:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^n_{\mathcal{E}} \arrow[r, "A"] & \mathbb{R}^n_{\mathcal{E}} \arrow[d, "M^{-1}"] \\
\mathbb{R}^n_{\mathcal{B}} \arrow[r, "A'"] \arrow[u, "M"] & \mathbb{R}^n_{\mathcal{B}}
\end{tikzcd}$$

Poniamo $M = (v_1 \ldots v_n)$

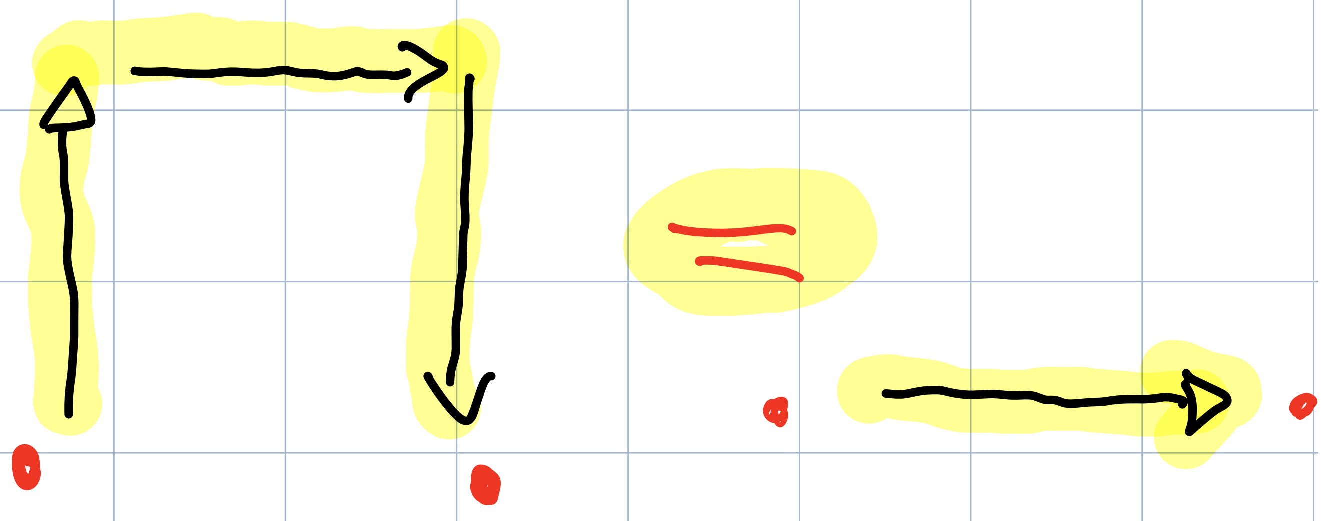
matrice dei vettori di $\mathcal{B}$

M rappresenta l'appl. identità rispetto alla BASE $\mathcal{B}$ in partenza e $\mathcal{E}$ in arrivo

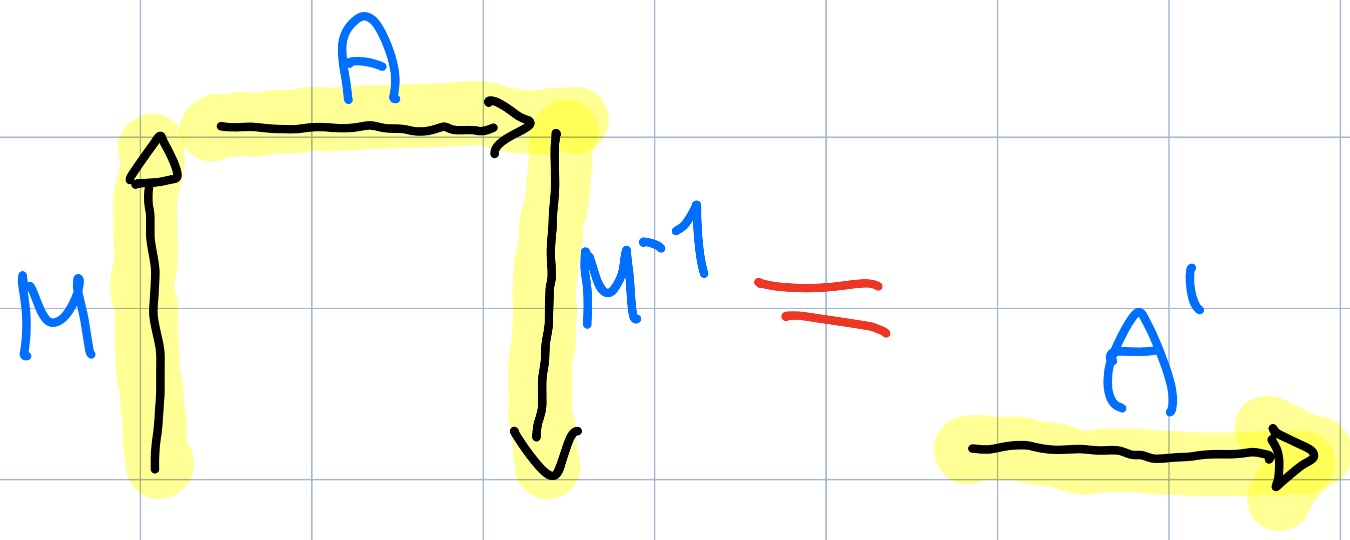
M^{-1} = matrice inversa di M

Il diagramma è commutativo

cioè:



QUINDI



CONCLUSIONE :

$$\boxed{A' = M^{-1} \cdot A \cdot M}$$

A e A' si dicono matrici SIMILI

DIAGONALIZZABILITÀ & TRIANGOLARIZZABILITÀ

Data A matrice $n \times n$

consideriamo

$$f = \mathcal{L}_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$
$$X \mapsto A \cdot X$$

appl. lineare associata

OVVERO:

$\boxed{A \text{ matrice associata a } f = \mathcal{L}_A \text{ rispetto base canonica } \mathcal{E}}$

Vogliamo cercare una nuova BASE $\mathcal{B}$ t.c.

$f = \mathcal{L}_A$ rispetto a $\mathcal{B}$ sia rappresentata da una matrice DIAGONALE o almeno TRIANGOLARE

DEF. 1 A matrice $n \times n$ si dice DIAGONALIZZABILE SE $\exists$ M matrice $n \times n$ invertibile t.c.

$M^{-1} \cdot A \cdot M = D$ diagonale

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & & & 0 \\ & d_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & d_{nn} \end{pmatrix}$$

DEF. 2 A matrice $n \times n$

si dice **TRIANGOLARIZZABILE** se

$\exists$ M matrice $n \times n$ invertibile

t.c. $$M^{-1} \cdot A \cdot M = T$$ triangolare superiore

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & * & * \\ & t_{22} & * \\ 0 & & \ddots \\ & & & t_{nn} \end{pmatrix}$$

OSS. 1 A diagonalizzabile

$\Downarrow$

A è triangolarizzabile

OSS. 2 $\exists$ matrici triangolarizzabili ma non diagonalizzabili

OSS. 3 (su $\mathbb{R}$) $\exists$ matrici non triang.ei (quindi nemmeno diag.li)

Cosa succede se A è DIAGONALE

Esempio.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}_{3\times 3}$$

Studiamo

$$f = L_A : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \longmapsto A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

cioè

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x_1 \\ 5x_2 \\ 6x_3 \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$f\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix} = 4\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$f\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\5\\0\end{pmatrix} = 5\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$f\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\6\end{pmatrix} = 6\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

In questo caso

A DIAGONALE $\Rightarrow$

ciascun vettore della BASE CANONICA viene trasformato attraverso $f = L_A$ in un multiplo di se stesso.

AUTOVETTORI & AUTOVALORI

Sia $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineare

DEF. 3 $v \in \mathbb{R}^n$ si dice **AUTOVETTORE** per f

SE

- $v \neq 0_V$
- $\exists\ \lambda_0 \in \mathbb{R}$ tale che

$$f(v) = \lambda_0 \cdot v$$

DEF. 4 $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ si dice **autovalore** per f

SE

$\exists\, v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq 0_V$, tale che

$$f(v) = \lambda_0 \cdot v$$

RIASSUMENDO:

$$f(v) = \lambda_0 \cdot v$$

AUTOVALORE

AUTOVETTORE

$\lambda_0 \in \mathbb{R}$
scalare

$v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_V\}$
vettore

Sia $f = \mathcal{L}_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineare

Sia v autovettore per f relativo all'autovalore $\lambda_0 \in \mathbb{R}$

CIOE' $f(v) = \lambda_0 \cdot v$

$f = \mathcal{L}_A \Rightarrow$

$$A \cdot v = \lambda_0 \cdot v$$

CIOE'

$$A \cdot v - \underbrace{\lambda_0 \cdot v}_{= [\lambda_0 Id] \cdot v} = 0_V$$

$\Leftrightarrow$

$$(A - \lambda_0 Id) \cdot v = 0_V$$

CONCLUSIONE : PROP.

$\boxed{v \text{ è autovettore relativo all'autovalore } \lambda_0}$

$\Updownarrow$

$\boxed{v \in \operatorname{Ker}(A - \lambda_0 \, Id)}$

Esempio

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ autovalore

rispetto all'autovalore

$\lambda_0 = 4$

$$\iff A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\iff$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} (2-4) & 1 & 1 \\ 4 & (-4) & 0 \\ 1 & 2 & (1-4) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow (A - 4\,\mathrm{Id}) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

In particolare: $\begin{cases} v \text{ autovettore relativo all'autovalore } \lambda_0 \\ v \neq 0_V \end{cases}$

$$\Updownarrow$$

$$\mathrm{Ker}(A - \lambda_0 I_d) \neq \{0_V\}$$

contiene v

$$\Updownarrow$$

$$\mathrm{rg}(A - \lambda_0 I_d) < n$$

$$\Updownarrow$$

$$\det(A - \lambda_0 I_d) = 0$$

conclusione:

$$\boxed{\lambda_0 \text{ autovalore} \Rightarrow \det(A - \lambda_0 I_d) = 0}$$

Per determinare gli autovalori cerchiamo i numeri reali λ_0 t.c.

$$\det(A - \lambda_0 I_d) = 0$$

DEF 5 Data A matrice $n \times n$

Il polinomio caratteristico di A

(notazione: $P_A(\lambda)$ oppure $P_{CAR}(\lambda)$)

è:

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_d)$$

polinomio nella variabile λ di grado n

DISCUSSIONE PRECEDENTE

$\Downarrow$

TEOREMA 1 $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ è AUTOVALORE per $f = \mathcal{L}_A$

$\Updownarrow$

λ_0 è RADICE di $P_A(\lambda)$

TEOREMA 2 Dato $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ AUTOVALORE per A.

ALLORA

v è autovettore relativo a λ_0

$\Updownarrow$

$v \in \ker(A - \lambda_0 I_d)$

AUTOVALORI $\Leftrightarrow$ radici REALI di $p_A(\lambda)$

AUTOVETTORI relativi a λ_0 $\Leftrightarrow$ $(A - \lambda_0 I_d) \cdot X = 0$

Esempi

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ 2×2

$$A - \lambda Id = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$A - \lambda Id = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 3 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

Polinomio caratteristico di A

$p_A(\lambda) =$

$$= \det(A - \lambda Id) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 3 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

CIOÈ:

$$p_A(\lambda) = (1-\lambda)^2 - 9 =$$
$$= \lambda^2 - 2\lambda - 8$$

A 2×2 $\rightarrow$ $p_A(\lambda)$ ha grado $=2$

AUTOVALORI $\longleftrightarrow$ radici di $p_A(\lambda)$:

$$\frac{2 \pm \sqrt{4+32}}{2} = \frac{2 \pm 6}{2} = \begin{cases} 4 \\ -2 \end{cases}$$

AUTOVALORI: $\lambda_1 = 4$

$\lambda_2 = -2$

AUTOVETTORI relativi a $\lambda_1 = 4$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A - 4\,Id = \begin{pmatrix} 1-4 & 3 \\ 3 & 1-4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$$

AUTOVETTORI relativi a $\lambda_1 = 4$ $\longleftrightarrow$ $\boxed{\operatorname{Ker} \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}}$

$\updownarrow$

$$\boxed{\begin{cases} -3x_1 + 3x_2 = 0 \\ 3x_1 - 3x_2 = 0 \end{cases}}$$

SOL: $x_2 = t$

$x_1 = t$

AUTOVETTORI relativi a $\lambda_1 = 4$ $\leftrightarrow$ $t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$t \neq 0$

AUTOVETTORI relativi a $\lambda_2 = -2$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A - (-2 \, I_d) = \begin{pmatrix} 1+2 & 3 \\ 3 & 1+2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{AUTOVETTORI relativi a } \lambda_2=-2} \longleftrightarrow \boxed{Ker\begin{pmatrix}3 & 3\\ 3 & 3\end{pmatrix}}$

$$\boxed{\begin{cases}3x_1+3x_2=0\\ 3x_1+3x_2=0\end{cases}}$$

SOL: $x_2=t$, $x_1=-t$

AUTOVETTORI relativi a $\lambda_2=-2$ $\longleftrightarrow$ $t\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ $t\neq0$

OSSERVAZIONE:

$\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\right\}$ è una BASE di $\mathbb{R}^2$

costituita da 2 autovettori

RIPROVA:

$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} = 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left(A - 4\,Id \right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Prodotto matrice per vettore

4 autovalore

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ autovettore relativo a 4

Analogamente:

$$A \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 + 3 \\ -3 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} = (-2) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

autovalore

autovettore relativo a -2

In questo caso:

Se scegliamo $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Data $f = f_A : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 3x_2 \\ 3x_1 + x_2 \end{pmatrix}$$

La matrice A' associata ad f rispetto nuova base $\mathcal{B}$

si ottiene con le formule del cambiamento di BASE

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad A' = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

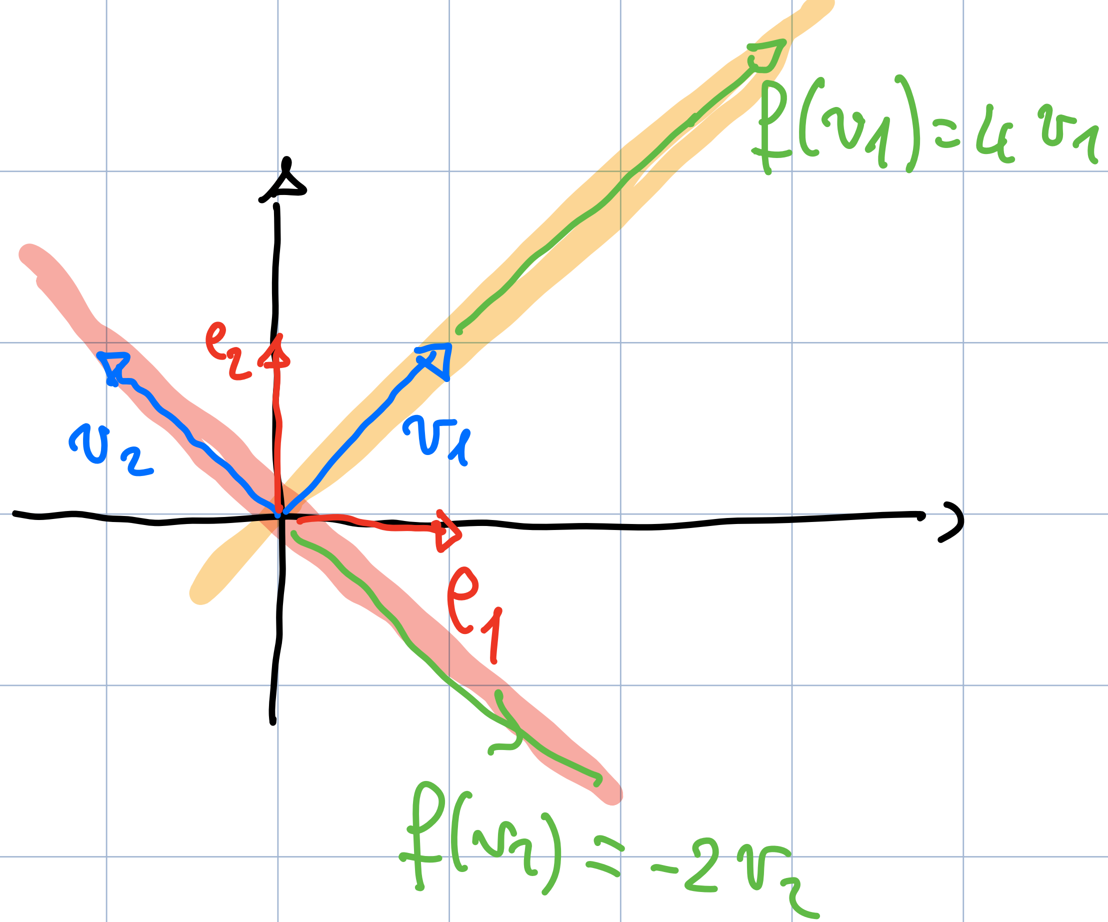
formule cambiamento di BASE:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$



In questo caso la matrice A è diagonalizzabile

$$A' = D = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

sulla diagonale abbiamo gli autovalori di A

Esempio 2

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \qquad 2 \times 2$$

$$p_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 5-\lambda & 1 \\ 0 & 5-\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= (5-\lambda)^2$$

RADICI di $p_A(\lambda)$: 5 con molteplicità = 2

AUTOVALORE : $\lambda_1 = 5$

AUTOVETTORI relativi a $\lambda_1 = 5$

$\mathrm{Ker}\,(A - 5\,I_d)$:

$$(A - 5\,I_d) = \begin{pmatrix} 5-5 & 1 \\ 0 & 5-5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{Ker}\,(A - 5\,I_d)$: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} x_2 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

SOL: $x_2 = 0 \qquad x_1 = t$

AUTOVETTORI relativi a $\lambda_1 = 5$:

$$= t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad t \neq 0$$

In questo caso non $\exists$ BASE di $\mathbb{R}^2$ costituita da autovettori per $f = f_A$

$\Big(\Rightarrow$ Non è possibile diagonalizzare la matrice $A \Big)$

Esempio 3

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$P_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 5-\lambda & 0 \\ 0 & 5-\lambda \end{pmatrix} = (5-\lambda)^2$$

RADICI : 5 con molt. = 2

AUTOVALORE : $\lambda_1 = 5$

AUTOVETTORI relativi a $\lambda_1 = 5$ $\longleftrightarrow$ $\mathrm{Ker}\,(A - 5\,\mathrm{Id})$

$$A - 5\,\mathrm{Id} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

QUINDI

Autovettori relativi a $\lambda = 5$ $\longleftrightarrow$ $\mathbb{R}^2 \setminus \{0_V\}$

$$= t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$(t, s) \neq (0, 0)$

$\exists$ BASE costituita da autovettori

Riassumendo

Nell' esempio 1, 3
$\exists$ BASE di $\mathbb{R}^2$ costituita da
autovettori

Nell' esempio 2 non $\exists$
BASE di $\mathbb{R}^2$ costituita da
autovettori

Esempio 4

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

matrice 4x4

$$P_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -\lambda & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -\lambda & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix}$$

det = prodotto elementi sulla diagonale perché MATRICE TRIANGOLARE

$$= (-\lambda)^4 = \lambda^4$$

RADICI : $\lambda_0 = 0$ con molt. $= 4$

AUTOVALORE : $\lambda_0 = 0$

<u>AUTOVETTORI</u> relativi all'autovalore $\lambda_0 = 0$

$$\mathrm{Ker}(A - 0 \cdot Id) = \mathrm{Ker}(A)$$

$$\Leftrightarrow \quad A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ 3x_4 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Sol. : $x_4 = 0$, $x_3 = 0$, $x_2 = 0$

$x_1 = t$

AUTOVETTORI : $t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$t \neq 0$

RICHIAMO sui polinomi

Sia $p(\lambda) \in \mathbb{R}[\lambda]$

polinomio di grado n

un numero λ_0 si dice

RADICE di $p(\lambda)$ SE $p(\lambda_0) = 0$

Teorema di RUFFINI:

λ_0 è radice di $p(\lambda)$

$$\Updownarrow$$

$(\lambda - \lambda_0)$ divide $p(\lambda)$

DEF. (MOLTEPLICITA' algebrica di una radice)

Sia λ_0 RADICE di $p(\lambda)$

λ_0 ha molteplicità m

SE

$$(\lambda - \lambda_0)^m \text{ divide } p(\lambda)$$

MA

$$(\lambda - \lambda_0)^{m+1} \text{ non divide } p(\lambda)$$

DAL PUNTO di vista algebrico:

Dato $p(\lambda)$ polinomio

2 pb. : → 1 Trovare le radici o almeno capire se le radici sono numeri REALI

2 determinare la molteplicità di ciascuna RADICE

Teorema fondamentale dell'algebra:

Dato $p(x)$ polinomio a coeff. in $\mathbb{C}$ di grado n

$$\Downarrow$$

$p(x)$ ha n radici in $\mathbb{C}$ contate con molteplicità

Prop. Se $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ di grado n

Allora $p(x)$ ha radici in $\mathbb{C}$ coniugate

Nostro caso: $A \in Mat(n \times n, \mathbb{R})$

$p_A(\lambda)$ ha coeff. in $\mathbb{R}$

ha n radici contate con molteplicità $\begin{cases} \in \mathbb{C} \\ \in \mathbb{R} \end{cases}$

Sia λ_0 AUTOVALORE

def. La **molteplicità ALGEBRICA** di λ_0

$= m.a.(\lambda_0)$

è la molteplicità di λ_0 come RADICE di $p_A(\lambda)$

def. La **molteplicità GEOMETRICA** di λ_0

$= m.g.(\lambda_0)$

è $= \dim(\ker(A - \lambda_0 Id))$

ESEMPI

$p(\lambda) = (\lambda - 3)^4$

$\lambda_1 = 3$ autovalore con molt. alg. $= 4$

$$p(\lambda) = \lambda^2 \cdot (\lambda - 1)^3 \cdot (\lambda - 5)^1$$

$\lambda_1 = 0$ con m.a. $= 2$

$\lambda_2 = 1$ con m.a. $= 3$

$\lambda_3 = 5$ con m.a. $= 1$

$$p(\lambda) = \lambda^5 + 2\lambda^4 + \lambda^3$$

$$= \lambda^3 \cdot (\lambda^2 + 2\lambda + 1)$$

$$= \lambda^3 \cdot (\lambda + 1)^2$$

$\lambda_1 = 0$ con m.e. $= 3$

$\lambda_2 = -1$ con m.e. $= 2$

PROP. Sia $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ AUTOVALORE

ALLORA:

$$1 \leq m.g.(\lambda_0) \leq m.a.(\lambda_0)$$

N.B.

MOLT. GEOMETRICA $\leftrightarrow$ numero di autovettori lin. IND.

MOLT. ALGEBRICA " $\leftrightarrow$ " numero di volte che si ripete la radice dell'eq.

TEOREMA A

Sia A matrice $n \times n$ a coeff. in $\mathbb{R}$.

ALLORA

A è triangolarizzabile (su $\mathbb{R}$)

$\Updownarrow$

tutte le radici di $p_A(\lambda)$ sono REALI

TEOREMA B

Sia A matrice $n \times n$ a coeff. in $\mathbb{R}$.

ALLORA

A è DIAGONALIZZABILE (su $\mathbb{R}$)

$\Updownarrow$

- A è triangolarizzabile

&

- $\forall$ autovalore λ_i si ha $m.g.(\lambda_i) = m.a.(\lambda_i)$

Spiegazione:

A matrice $n \times n$ $\Rightarrow$

Il polinomio caratteristico di A

$p_A(\lambda)$ ha grado n

$\Rightarrow$ $p_A(\lambda)$ ha n RADICI (in $\mathbb{C}$)

contate con molteplicità

- SE tutte le radici sono in $\mathbb{R}$ allora A è triangolarizzabile

- SE TUTTE le radici sono in $\mathbb{R}$

&

$\forall$ radice $m.a. = m.g.$

allora A è DIAGONALIZZABILE

OSS. PROP: $1 \leq m.g.(\lambda_i) \leq m.a.(\lambda_i)$

QUINDI

se $m.a.(\lambda_i) = 1$

allora $m.g.(\lambda_i) = 1$

ovvero $\exists$ 1 autovettore lin. IND.

COROLLARIO.

A matrice $n \times n$

$p_A(\lambda)$ ha n RADICI reali DISTINTE

ALLORA:

A è diagonalizzabile

dim. $p_A(\lambda)$ ha grado n

Per ipotesi $p_A(\lambda)$ ha n radici REALI distinte

$\Rightarrow \forall \lambda_i$ radice $m.a.(\lambda_i) = 1$

$\Rightarrow \forall \lambda_i \quad 1 \leq m.g.(\lambda_i) \leq m.a.(\lambda_i) = 1$

Quindi coincidono

$\square$

In generale:

se $m.a.(\lambda_i) = 1$

allora

$m.g.(\lambda_i) = m.a.(\lambda_i) = 1$

Esempi

1 $\quad A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda\, Id)$$

$$= \det \begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$= \lambda^2 + 1$$

Non ha radici in $\mathbb{R}$

QUINDI • non $\exists$ autovalori

- non $\exists$ autovettori

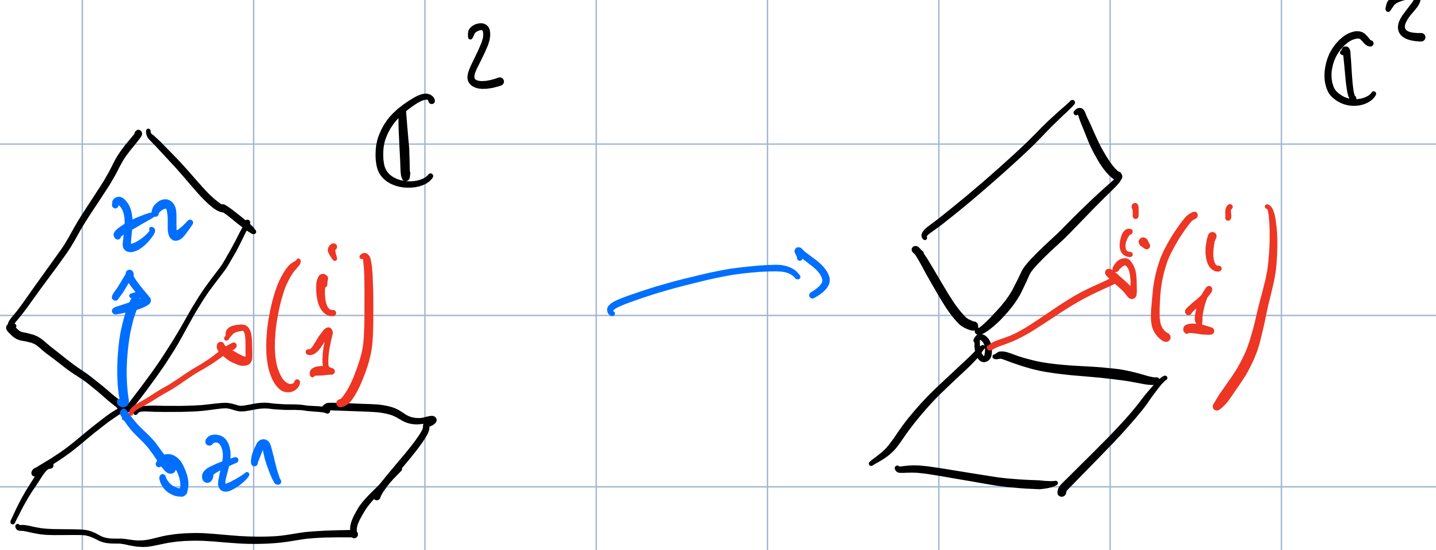
- A non è triangolabile (su $\mathbb{R}$)

- A non è diagonalizzabile

In $\mathbb{C}$:

$$\mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2$$

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$$



2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad 4 \times 4$$

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda \, Id) =$$

$$= \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1-\lambda & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

matrice triangolare superiore

$$= (1-\lambda)^2 \cdot (2-\lambda)^2$$

oss: A matrice $4 \times 4 \Rightarrow p_A(\lambda)$ ha grado 4

RADICI: $\lambda_1 = 1$ con molt. $= 2$

$\lambda_2 = 2$ con molt. $= 2$

$\Rightarrow$ AUTOVALORI:

1 con $m.a.(1) = 2$

2 con $m.a.(2) = 2$

Tutte le radici di $p_A(\lambda)$ sono in $\mathbb{R}$

$\Downarrow$

A è triang.^{le}

Cerchiamo le molt. geometriche

$$m.g.(1) = \dim\left[\ker\left(A - 1 \cdot I_d\right)\right]$$

$$A-1\cdot I_d=\begin{pmatrix}1&1&2&2\\0&1&2&2\\0&0&2&0\\0&0&0&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&&&0\\&1&&\\&&1&\\0&&&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1-1&1&2&2\\0&1-1&2&2\\0&0&2-1&0\\0&0&0&2-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&2&2\\0&0&2&2\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

n.b. : $\quad m.a.(1)=2$

$$\Downarrow$$

$$1\leq m.g.(1)\leq 2$$

$$\Rightarrow \quad 1 \leq \dim(\operatorname{Ker}(A - 1\,I_d)) \leq 2$$

$$\Rightarrow \quad 2 \leq \operatorname{rg}(A - 1 \cdot I_d) \leq 3$$

$$A - 1\,I_d = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad 3 \times 3$$

$$\det M = 1 \neq 0 \Rightarrow \operatorname{rg}(A - 1\,I_d) = 3$$

$$\Rightarrow \quad m.g.(1) = \dim(\operatorname{Ker}(A - 1 \cdot I_d))$$

$$= 4 - 3 = 1$$

$$m.g.(2) = \dim\left[\operatorname{Ker}(A - 2\,Id)\right]$$

n.b. $1 \leq m.g.(2) \leq 2 = m.a.(2)$

$$A - 2\,Id = \begin{pmatrix} 1-2 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1-2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2-2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2-2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

righe 3, 4 sono nulle

righe 1, 2 son ind. $\Rightarrow \rho = 2$

$$rg(A - 2\,Id) = 2$$

$$\Downarrow$$

$$m.g.(2) = \dim\left[Ker(A - 2\,Id)\right]$$

$$= 4 - rg(A - 2\,Id) = 2$$

CONCLUSIONE: gli autovalori di A sono

$\lambda_1 = 1$ m.a. $= 2$ m.g. $= 1$

$\lambda_2 = 2$ m.a. $= 2$ m.g. $= 2$

Per $\lambda_1 = 1$ m.g. $\neq$ m.a.

$\Downarrow$

A non è diag.^{le}

③ $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda \, Id)$$

$$= \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

matrice triangolare inferiore

$\rightarrow$ det = prodotto elementi sulla diagonale

$$p_A(\lambda) = (1-\lambda)^3 \cdot (3-\lambda)$$

RADICI: 1 con molt. = 3

3 con molt. = 1

Tutte le radici $\in \mathbb{R}$

$\Downarrow$

A è triangolabile

AUTOVALORI:

$\lambda_1 = 1$ m.a. = 3

$\lambda_2 = 3$ m.a. = 1

- Per quanto riguarda $\lambda_2 = 3$

poiché

$$1 \leq m.g. \leq m.a.$$

Possiamo concludere che

$$m.g.(3) = 1$$

- Per $\lambda_1 = 1$

$$A - 1\,Id = \begin{pmatrix} 1-1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1-1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1-1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 3-1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \det = 1 \neq 0$$

$$\Rightarrow \qquad rg = 3$$

CIOE' $\quad rg\left(A - 1\, Id\right) = 3$

$$\Rightarrow \quad m.g.(1) = 4 - 3 = 1$$

Conclusione:

AUTOVALORI

1	m.a. = 3	m.g. = 1
3	m.a. = 1	m.g. = $\underline{1}$

$$m.a.(1) \neq m.g.(1)$$

$$\Downarrow$$

A non è diag.le