ALGEBRA DELLE MATRICI

$\mathrm{Mat}(k \times n; \mathbb{R}) = \left\{ \begin{array}{l} \text{matrici } k \times n \\ \text{a coeff. in } \mathbb{R} \end{array} \right\}$

$\mathrm{Mat}(k \times n; \mathbb{R})$ è uno spazio vettoriale di dimensione $= k \cdot n$

Somma di matrici:

A, B matrici $k \times n$

$A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$

$\rightarrow A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{k \times n}$

Esempio $A, B \quad 2\times 2$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 1+4 & -2+7 \\ 0+5 & 3+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$$

Prodotto per uno scalare:

$A = (a_{ij}) \qquad \lambda$ scalare

$$\lambda \cdot A = (\lambda \cdot a_{ij})$$

Esempio. $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$

$\lambda = 2$ $\quad 2 \cdot A = \begin{pmatrix} 2\cdot 3 & 2\cdot 4 \\ 2\cdot(-2) & 2\cdot 0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$

BASE di $Mat(k \times n, \mathbb{R})$ = dim = $k \cdot n$

$$\left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots \\ 0 & & \\ \vdots & & 0 \end{pmatrix}}_{\boxed{E_{1,1}}}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & \\ \vdots & & & \cdots & 0 \end{pmatrix}}_{\boxed{E_{1,2}}}, \ldots \text{ecc...}, \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = \boxed{E_{k,n}} \right\}$$

dove:

$$E_{i,j} = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & & \cdots \\ & & 1 & \\ \cdots & & & 0 \end{pmatrix} & \leftarrow i \\ \quad\quad\quad\;\; \uparrow & \\ \quad\quad\quad\;\; j & \end{array}$$

tutti i coeff. = 0 eccetto il coeff. di posto (i,j) $= 1$

$$O_V \longleftrightarrow \text{matrice nulla}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

PRODOTTO di MATRICI

A matrice $K \times n$

B matrice $m \times p$

N.B. $(n = m)$

$\Rightarrow$ $A \cdot B$ matrice $K \times p$

Il coefficiente di posto (i, j) della matrice $A \cdot B$ =

= prodotto $\boxed{(\text{riga } i \text{ di } A) \cdot \begin{pmatrix} \text{colonna} \\ j \\ \text{di } B \end{pmatrix}}$

$$\boxed{\underset{\text{coeff. di posto } i,j}{(A\cdot B)_{i,j}} = \sum_{e=1}^{n} a_{ie}\cdot b_{ej}}$$

SPIEGAZIONE!

$$\begin{pmatrix} & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ & & & \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} & b_{1j} & \\ & b_{2j} & \\ & \vdots & \\ & b_{nj} & \end{pmatrix} =$$

riga i di A

colonna j di B

$$= a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}$$

OSS. $B = (b_1\ b_2 - b_p)$

$\parallel$

p vettori colonne di $\mathbb{R}^n$

ALLORA:

$$A \cdot B = \left(\underbrace{A \cdot b_1} \quad \underbrace{A \cdot b_2} \; - \; \underbrace{A \cdot b_p} \right)$$

prodotto matrice A

· vettore colonna b_j =

= colonne J di $A \cdot B$

$A \cdot B$ = p vettori colonna di $\mathbb{R}^k$

ESEMPI

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ 2×3

$B = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ 3×2

$A \cdot B$ matrice 2×2 :

coeff. di posto $(1,1)$

$$(A \cdot B)_{1,1} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}}_{\text{riga 1 di } A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{colonna 1 di } B}$$

$$= 1 \cdot (-1) + (-2) \cdot 0 + 4 \cdot 1 = 3$$

coeff. di posto $(1,2)$

$$(A \cdot B)_{1,2} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}}_{\text{riga 1 di } A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}}_{\text{colonna 2 di } B}$$

$$= 1 \cdot (5) + (-2) \cdot 1 + 4 \cdot (-2) = -5$$

coeff. di posto $(2,1)$

$$(A \cdot B)_{2,1} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}}_{\text{riga 2 di } A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{colonna 1 di } B}$$

$$= 3 \cdot (-1) + (-1) \cdot 0 + 2 \cdot 1 = -1$$

coeff. di posto $(2,2)$

$$(A \cdot B)_{2,2} = \underbrace{(3 \quad -1 \quad 2)}_{\text{riga 2 di } A} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \text{col. 2 di } B$$

$$= 3 \cdot 5 + (-1) \cdot 1 + 2 \cdot (-2) = +10$$

CONCLUSIONE:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 10 \end{pmatrix}$$

2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad 3 \times 2$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad 2 \times 3$$

$A \cdot B$ matrice 3×3

$(1 \;\; 2) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

coeff. $(1,1)$

coeff. $(3,2)$

$(1 \;\; 2) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

riga 1 di A

colonna 1 di B

$(2 \;\; 1) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

riga 3 di A

colonna 2 di B

$$(2 \;\; 1) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \cdot 3 + 1 \cdot 1 = 7$$

3

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad B = (2 \;\; -1 \;\; 3)$$

A vettore colonna = matrice 3x1

B vettore riga = matrice 1x3

$A \cdot B$ = matrice 3x3

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & 6 \\ 6 & -3 & 9 \end{pmatrix}$$

riga 2 di A

$2 \cdot 2$

colonna 1 di B

$3 \cdot 3$

riga 3 di A

colonna 3 di B

---

4 $B \cdot A$ = matrice 1x1

$B \cdot A =$

cioè un numero

$$= \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$= 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 + 3 \cdot 3 = 9$$

ATTENZIONE !

Il prodotto tra matrici non è commutativo !

IN GENERALE:

$$\boxed{A \cdot B \neq B \cdot A}$$

MATRICE PARTICOLARE:

matrice IDENTITÀ $(n \times n)$

$$Id = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

$\leftarrow$ 1 sulle diagonale

0 fuori della diagonale

- A $k \times n$ $\Rightarrow$

$$A \cdot Id = A$$

- B $m \times p \Rightarrow$

$$Id \cdot B = B$$

- C $m \times m \Rightarrow$

$$C \cdot Id = C = Id \cdot C$$

Se A matrice quadrata $n \times n$

è possibile fare le potenze di A.

$A \quad n \times n \longrightarrow \underset{n \times n}{A^2 = A \cdot A}$

$$A^h = \underbrace{A \cdot A \cdot \_\_ \cdot A}_{h \text{ volte}}$$

Esempio.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A \cdot A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$$

Esercizio. Trovare formula per A^n

SIGNIFICATO GEOMETRICO PRODOTTO DI MATRICI

- A matrice $k \times n$

ad A si associa l'applicazione lineare

$$\mathcal{L}_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^k$$

$$Y \longmapsto A \cdot Y \qquad Y \in \mathbb{R}^n$$

- B matrice $n \times p$

a B si associa l'appl. lineare

$$\mathcal{L}_B : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$X \longmapsto B \cdot X \qquad X \in \mathbb{R}^p$$

- $A \cdot B$ matrice $K \times P$

a $A \cdot B$ si associa l'appl. lineare

$$\mathcal{L}_{[A \cdot B]} : \mathbb{R}^P \longrightarrow \mathbb{R}^K$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^P \arrow[r, "\mathcal{L}_B"] \arrow[rr, bend right, "\mathcal{L}_{AB}"'] & \mathbb{R}^n \arrow[r, "\mathcal{L}_A"] & \mathbb{R}^K
\end{tikzcd}$$

TEOREMA $\mathcal{L}_{[A \cdot B]} = \mathcal{L}_A \circ \mathcal{L}_B$

PRODOTTO di MATRICI $\Leftrightarrow$ COMPOSIZIONE APPLICAZIONI LINEARI

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^p \arrow[r, "\mathcal{L}_B"] \arrow[rr, bend right, "\mathcal{L}_{A\cdot B}"'] & \mathbb{R}^n \arrow[r, "\mathcal{L}_A"] & \mathbb{R}^k
\end{tikzcd}$$

La funzione $\mathcal{L}_{A\cdot B} : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^k$

SI OTTIENE COMPONENDO

$\mathcal{L}_B : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ con

$\mathcal{L}_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^p \arrow[r] \arrow[rr, bend right] & \mathbb{R}^n \arrow[r] \arrow[d, phantom, "||"] & \mathbb{R}^k \\
 & {} &
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^p & \mathbb{R}^n & \mathbb{R}^k \\
x \arrow[u, phantom, sloped, "\in"] \arrow[r, mapsto] \arrow[rr, bend right, mapsto] & L_B(x) \arrow[u, phantom, sloped, "\in"] \arrow[r, mapsto] & L_A(L_B(x)) \arrow[u, phantom, sloped, "\in"]
\end{tikzcd}
$$

$$L_A(L_B(x)) \stackrel{\text{def}}{=} L_A \circ L_B(x)$$

prodotto di composizione

Teorema $\Rightarrow$

$$\mathcal{L}_A(\mathcal{L}_B(x)) = \mathcal{L}_{A \cdot B}(x)$$

Esempio

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \mathcal{L}_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \mathcal{L}_B : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ -3 & 15 \end{pmatrix}$$

$$\rho_A\left(\rho_B(X)\right) \longleftrightarrow$$

- $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \rho_B(X) = \begin{pmatrix} -x_1 + x_2 \\ 3x_2 \end{pmatrix}$

- $\rho_A(\rho_B(X)) = \begin{pmatrix} 1\cdot(-x_1+x_2) + 2(3x_2) \\ 3\cdot(-x_1+x_2) + 4(3x_2) \end{pmatrix}$

- $\rho_{AB}(X) = \begin{pmatrix} -x_1 + 7x_2 \\ -3x_1 + 15x_2 \end{pmatrix}$

OVVERO $\rho_{AB}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \rho_A\left(\rho_B\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right)$

Esercizio 1

Siano $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ 3×3

$C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 3×3

Trovare B t.c. $A \cdot B = C$

sol.

B deve essere 3×3

C si ottiene da A

scambiando colonne $1 \Leftrightarrow$ colonne 3

lasciando la colonne 2 invariata

D'altra parte:

colonna 1 di $A = A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

colonna 3 di $A = A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\Longrightarrow \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

matrice ottenuta scambiando colonne 1 e 3 della matrice Id.

Esercizio 2

Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

Determinare $B \neq 0$ matrice 2×2 t.c.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$ matrice nulla

SOL.

OSS: $rg(A) = 1$

$\rightarrow \dim(\ker(A)) = 1$

BASE del Ker $= \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\hookrightarrow B = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Esercizio.

A 2×2 con $rg(A) = 2$

$\exists\ B$ 2×2 $B \neq 0$ t.c.

$$A \cdot B = 0 \quad ?$$

OSS: A 2×2 t.c. $rg(A) = 2$

$\Rightarrow$ $\mathcal{L}_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ è biiettiva

In particolare $\ker = \{0_V\}$, $\mathrm{Im} = \mathbb{R}^2$

CASO di matrici quadrate

$$\left.\begin{array}{ll} A & n \times n \\ B & n \times n \end{array}\right| \Rightarrow \begin{array}{l} A \cdot B \\ B \cdot A \end{array} \quad \text{entrambe } n \times n$$

In generale: $A \cdot B \neq B \cdot A$

INOLTRE: A $n \times n$

$\Rightarrow$ Possiamo calcolare $A \cdot A = A^2$

Esempio (Rotazione $\frac{\pi}{4}$)

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\shortparallel$

matrice associata alla rotazione di $\frac{\pi}{2}$ =

composizione di 2 rotazioni di $\frac{\pi}{4}$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

OSS. $\operatorname{Ker}(A) = \operatorname{Im}(A)$

[Esercizio]

Teorema (BINET)

A, B matrici $n \times n$, ALLORA:

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$$

determinante prodotto di MATRICI = prodotto (in $\mathbb{R}$) dei determinanti

<u>COR</u>. $\det(A^2) = (\det(A))^2$

MATRICE INVERSA

<u>Def</u>. A matrice $n \times n$ si dice <u>INVERTIBILE</u>

SE

$\exists$ matrice A^{-1} tale che

$$A \cdot A^{-1} = I_d$$

A^{-1} si dice matrice INVERSA di A

TEOREMA A matrice $n \times n$

ALLORA:

A è INVERTIBILE

$\Updownarrow$

$\mathcal{L}_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è BIGETTIVA (invertibile)

$\Updownarrow$

$\det(A) \neq 0$

n.b. $f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

bigettiva $\overset{def.}{\iff}$ surgettiva & iniettiva

Surgettiva $\iff rg = n$

iniettiva $\iff \dim(\ker) = 0$

Per $f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

Teo dimensione $\Rightarrow$

iniettiva $\iff$ surgettiva

$A \quad n \times n$

cioè: $\boxed{\det(A) \neq 0 \iff rg(A) = n}$

Come si trova la matrice inversa

CASO (2×2)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

ESEMPIO

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = 2 \cdot 4 - 3 \cdot 1 = 5$$

$$A^{-1} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

RIPROVA: Calcolo $A \cdot A^{-1}$

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

$$(A \cdot A^{-1})_{1,1} = 2 \cdot \frac{4}{5} + 1 \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) = \underline{1}$$

$$(A \cdot A^{-1})_{1,2} = 2 \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) + 1 \cdot \frac{2}{5} = 0$$

$$(A \cdot A^{-1})_{2,1} = 3 \cdot \left(\frac{4}{5}\right) + 4 \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) = 0$$

$$(A \cdot A^{-1})_{2,2} = 3 \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) + 4 \cdot \frac{2}{5} = \underline{1}$$

conclusione:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = Id$$

caso $n \times n$

A matrice $n \times n$, $\det(A) \neq 0$

Il coeff. di posto (i,j) della matrice inversa

$$\boxed{(A^{-1})_{i,j} = \frac{1}{\det(A)} \cdot (-1)^{i+j} \cdot \det(A_{ji})}$$

dobbiamo considerare il minore A_{ji}

si scambiano righe con le colonne

Ad

ESEMPIO:

il coeff. di posto (1,2) di A^{-1} $\longleftrightarrow$ devo eliminare riga e colonne corrispondenti al coeff. di posto (2,1) di A per ottenere $A_{2,1}$

Esempio concreto:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Il coeff. di posto $(1,2)$ di A^{-1}

$$\Updownarrow$$

$$\frac{1}{\det(A)} \cdot (-1)^{1+2} \cdot \det(A_{21})$$

$$A_{21} = \begin{pmatrix} \cancel{1} & 3 \\ \cancel{5} & \cancel{6} \end{pmatrix} = 3$$

matrice 1×1

$$(A^{-1})_{1,2} = -\frac{1}{9} \cdot (-1) \cdot 3 = \frac{1}{3}$$

ESEMPIO 3×3

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 6 & 5 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Dobbiamo calcolare $\det(A)$

&

det dei minori $(A_{j,i})$

det(A) = sviluppo rispetto riga 3

$$= -4 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} + 1 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$= -4 \cdot (5-4) + 1 \cdot 6 = 2$$

$$\left(A^{-1}\right)_{\underline{1,2}} = \frac{1}{\det(A)} \cdot (-1)^{1+2} \cdot \det\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Poiché

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = A_{2,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 6 & 5 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

QUINDI: il coeff. di posto (1,2) di A^{-1}

$$\left(A^{-1}\right)_{1,2} = \frac{1}{2} \cdot (-1) \cdot (-8) = 4$$

CIOE' :

$$A^{-1}_{1,2} = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} & 4 & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} & \text{riga } 1 \\ \text{colonna } 2 & \end{array}$$

$$\left(A^{-1}\right)_{3,2} = \frac{1}{\det(A)} \cdot (-1)^{3+2} \cdot \det\left(A_{2,3}\right)$$

dove

$$A_{2,3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \\ & & \\ 0 & 4 & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\left(A^{-1}\right)_{3,2} = \frac{1}{2} \cdot (-1) \cdot 4 = -2$$

$$(A^{-1})_{3,2} = \begin{array}{c} \\ \\ \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & -2 & \end{pmatrix} \\ \text{colonne } 2 \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow \text{ligne } 3 \end{array}$$

$$(A^{-1})_{2,3} = \frac{1}{\det(A)} \cdot (-1)^{2+3} \cdot \det(A_{3,2})$$

$$A_{3,2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$(A^{-1})_{2,3} = \frac{1}{2} \cdot (-1) \cdot 1 = -\frac{1}{2}$$

[Esercizio] Completare A^{-1}

RISPOSTA

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -7 & 4 & -6 \\ -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 4 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Esercizio tipico di un compito:

Data $\qquad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

calcolare il coeff. di posto $(1,2)$ di A^{-1}

RISPOSTA

$$\det(A) = 1 \cdot 3 \cdot 3 = 9$$

poiché A è triangolare superiore

$$\left(A^{-1}\right)_{(1,2)} = \frac{1}{\det(A)} \cdot (-1)^{1+2} \cdot \det\left(A_{2,1}\right)$$

$$A_{2,1} = \begin{pmatrix} \cancel{1} & -2 & 1 \\ \cancel{0} & \cancel{3} & \cancel{4} \\ \cancel{0} & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\det(A_{2,1}) = -6$$

QUINDI:

$$\left(A^{-1}\right)_{(1,2)} = \frac{1}{9} \cdot (-1) \cdot (-6)$$

$$= \frac{2}{3}$$

CIOE':

$$A^{-1}_{(1,2)} = \begin{pmatrix} & \frac{2}{3} & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

← riga 1

↑ colonna 2

Esercizio 2

Data $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

determinare $\left(A^{-1}\right)_{1,3}$

SOL. $\det(A) = 2 \cdot 1 \cdot 2 = 4$

poiché A è triangolare

$$(A^{-1})_{1,3} = \frac{1}{\det(A)} \cdot (-1)^{1+3} \cdot \det(A_{3,1})$$

DOVE $A_{3,1} = \begin{pmatrix} & 4 & 2 \\ & 1 & 1 \\ & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\det(A_{3,1}) = 4 - 2 = 2$$

CONCLUSIONE:

$$(A^{-1})_{1,3} = \frac{1}{4} \cdot (+1) \cdot 2 = \frac{1}{2}$$

MATRICI INVERTIBILI & sistemi lineari quadrati

Sia A matrice $n \times n$

$X \in \mathbb{R}^n$ vettore incognite

$b \in \mathbb{R}^n$ vettore termini noti

Teorema (Cramer)

Sia A matrice $n \times n$

Supponiamo $\det(A) \neq 0$

ALLORA :

Il sistema lineare

$$A \cdot X = b$$ n equazioni
n incognite

ammette un'unica SOLUZIONE

$$X = (A^{-1}) \cdot b$$

Infatti

$$A \cdot X = b \iff$$

$$A^{-1} \cdot (A \cdot X) = A^{-1} \cdot b \iff$$

$$(A^{-1} \cdot A) \cdot X = A^{-1} \cdot b \iff$$

$$Id \cdot X = A^{-1} \cdot b \iff X = A^{-1} \cdot b$$

MATRICE INVERSA di un prodotto

Supponiamo A, B matrici $n \times n$ invertibili

$\det(A) \neq 0$, $\det(B) \neq 0$

$$(A\cdot B)^{-1} = ?$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^m \arrow[r, "B"] \arrow[rr, bend left=40, "A\cdot B"] & \mathbb{R}^n \arrow[r, "A"] \arrow[l, bend left, "B^{-1}"] & \mathbb{R}^n \arrow[l, bend left, "A^{-1}"] \arrow[ll, bend left=50, "B^{-1}\cdot A^{-1}"]
\end{tikzcd}$$

CONCLUSIONE: $(A\cdot B)^{-1} = B^{-1}\cdot A^{-1}$

verifica algebrica

N.B. Il prodotto di matrici è associativo & distributivo

ASSOCIATIVO: $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$

dove A $k \times m$, B $m \times p$, C $p \times t$

DISTRIBUTIVO: $A\cdot(B_1+B_2)$

$$\parallel$$

$$A\cdot B_1 + A\cdot B_2$$

A $k\times m$

B_1, B_2 $m\times p$

VERIFICA: $(A\cdot B)\cdot(B^{-1}\cdot A^{-1})$

$\parallel$ per propr. associativa

$$A\cdot(\underbrace{B\cdot B^{-1}}_{\parallel \atop Id})\cdot A^{-1}$$

$$= A\cdot Id\cdot A^{-1} = A\cdot A^{-1} = Id$$

"ANALOGAMENTE"

$$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$$

Esercizi

1 Sia $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lineare

t.c. $f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$f\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$

CALCOLARE $f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

SOL. $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$ è una base di $\mathbb{R}^2$

$\to$ Cerchiamo λ_1, λ_2 t.c.

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_2 = 1 \\ \lambda_1 + 4\lambda_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_2 = 1 \\ \lambda_1 = -3 \end{cases}$$

CIOE'

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Quindi poiché f è lineare

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -3 \cdot f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot f\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$= -3 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2 Determinare matrice associata

rispetto alla base canonica ad $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineare t.c.

$$f\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$$

$$f\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\0\\-1\end{pmatrix}$$

$$f\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

<u>SOL</u>. Le colonne di A sono le immagini dei vettori BASE canonica

colonna $1 = f\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$

colonna $2 = f\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\0\\-1\end{pmatrix}$

colonna $3 = f\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}$

Da determinare

cioè $A = \begin{pmatrix}2 & 4 & \alpha\\-1 & 0 & \beta\\3 & -1 & \gamma\end{pmatrix}$

<u>condizione:</u>

$$f\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

2 metodi:

(A) Come nell'esercizio precedente

scrivere $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

[PER CASA] e usare la linearità

(B) sfruttare $f = \mathcal{L}_A$

ovvero

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

CIOÈ

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & \alpha \\ -1 & 0 & \beta \\ 3 & -1 & \gamma \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ovvero

$$\begin{cases} 2 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 3 \cdot \alpha = 1 \\ -1 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 3 \cdot \beta = 1 \\ 3 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 + 3\gamma = 1 \end{cases}$$

$$\alpha = \frac{1}{3} \cdot (-9) = -3$$

$$\beta = \frac{1}{3} \cdot 2 = \frac{2}{3}$$

$$\gamma = \frac{1}{3} \cdot (0) = 0$$

Esercizio 3

Le soluzioni del sistema lineare

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

costituiscono spazio affine di $\dim = ?$

Sol.

Sistema lineare 3×5

$$b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \text{colonna 3 di } A$$

Quindi $rg(A) = rg(A|b)$

pertanto $\exists$ soluzione

N.B. • Soluzione UNICA se rg = numero incognite

• se $rg = r < n$ = numero incognite

$\Rightarrow$ le soluzioni costituiscono

Spazio affine di $\dim = n - r$

[Traslato del Ker]

nostro caso:

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad 3 \times 5 \quad rg \leq 3$$

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \det \neq 0$$

$$\Rightarrow \quad rg = 3$$

Conclusione: $\dim \{\text{SOLUZIONI}\} = 5 - 3 = 2$