# RANGO & determinante

A matrice $n \times n$

**QUADRATA**

- $\det(A) \neq 0 \iff$ I vettori colonne di A sono lin. IND.

$$\iff rg(A) = n$$

$$\iff \dim(\mathrm{Ker}(L_A)) = 0$$

Esempio. $A$ matrice $3\times 3$

$$\det(A) \neq 0 \iff rg(A) = 3$$

$$\iff \dim(\ker(f_A)) = 0$$

$$\iff f_A \text{ è bigettiva}$$

Esempio concreto:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & 6 \\ 1 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

$A$ matrice $3\times 3$

$$\ell_A : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \longmapsto A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \phantom{+3x_2} + 5x_3 \\ 3x_2 + 6x_3 \\ x_1 \phantom{+3x_2} + 7x_3 \end{pmatrix}$$

$\det(A) =$ sviluppo rispetto colonna 2

$$= +\,3 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} = +3(7-5)$$

$$= 6 \neq 0$$

$\Longleftrightarrow$ le colonne di $A$ sono lin. IND.

$\Leftrightarrow$

$$\mathrm{Im}(f_A) = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5\\6\\7\end{pmatrix}\right)$$

$$= \mathbb{R}^3$$

I 3 vettori sono lin. IND.

$\Rightarrow$ costituiscono una base di $\mathbb{R}^3$

$\Leftrightarrow$ $\dim(\mathrm{Ker}(f_A)) = 3 - 3 = 0$

dim DOMINIO

dim Immagine

$\Leftrightarrow$ $\mathrm{Ker} = \{0_V\}$

$\Longleftrightarrow$ La soluzione del sistema lineare $A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

CIOE'

$$\begin{cases} x_1 + 5x_3 = 0 \\ 3x_2 + 6x_3 = 0 \\ x_1 + 7x_3 = 0 \end{cases}$$

è $\{0_V\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

$x_1 = 0$
$x_2 = 0$
$x_3 = 0$

**PROP.** Se $\exists$ minore $M$ $h \times h$ t.c.

$$\det(M) \neq 0$$

&

$\forall$ minore $N$ $(h+1) \times (h+1)$ si ha

$$\det(N) = 0$$

$$\Rightarrow rg(A) = h$$

## DETERMINANTE & rango

**OSS.** RIGHE & COLONNE

Sia $A$ matrice $k \times n$

Supponiamo che $\exists$ $M$

minore $h \times h$ con $\det(M) \neq 0$

ALLORA:

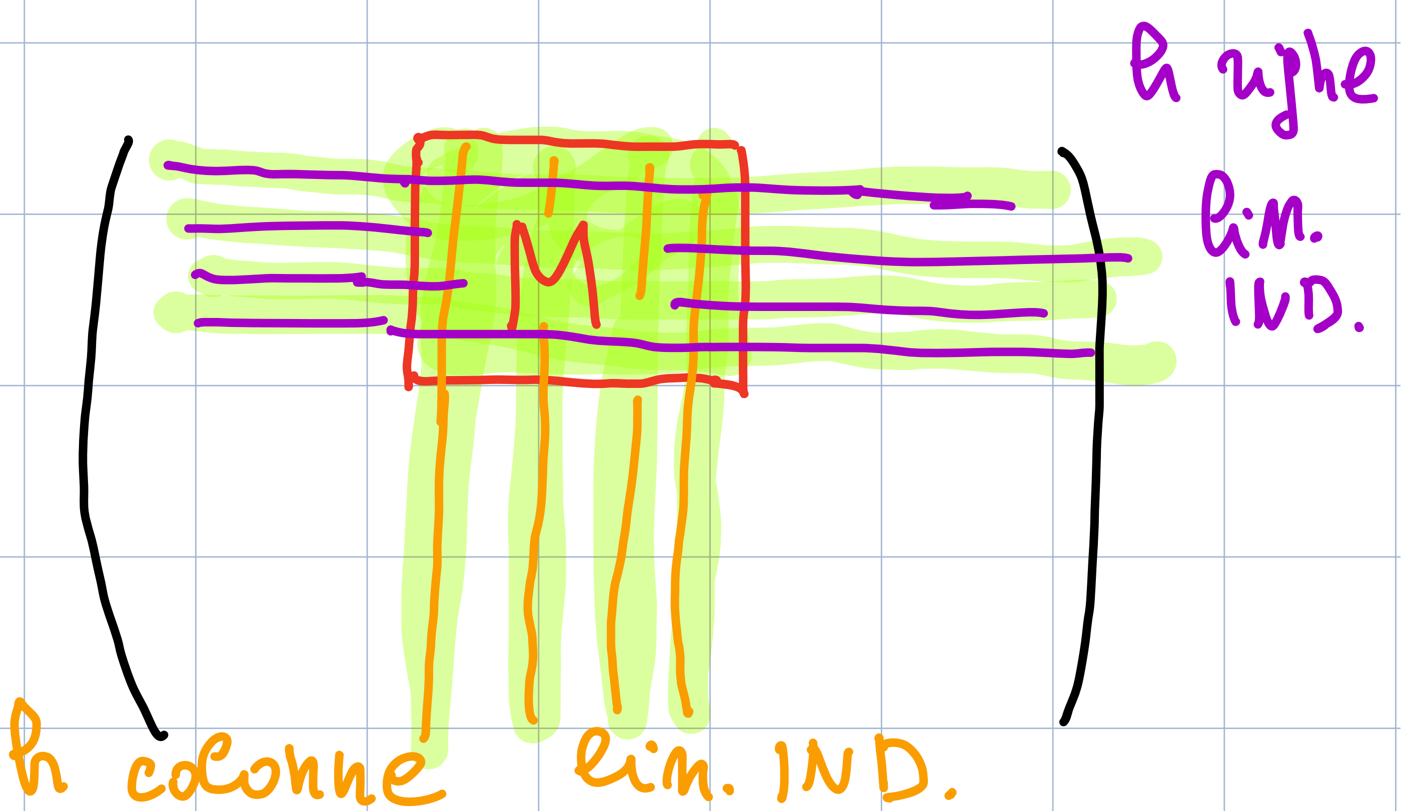
Le $h$ righe

&

Le $h$ colonne

che determinano M (cioè che lo contengono)

sono lin. IND.



## Esempio. 1

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}} & \begin{matrix} 3 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \end{matrix} \end{pmatrix} \qquad \underline{4 \times 6}$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \det M = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1 \neq 0$$

$\Rightarrow$ Le colonne 1, 2, 3 sono lin. IND.

$\Rightarrow$ Le righe 1, 2, 3 sono lin. IND.

riga 4 = $0_V$ $\Rightarrow$ rg A = 3

**N.B.** Se $\exists$ minore $h \times h$ con det = 0 non è detto che rg < h

Devo verificarlo per tutti i minori $h \times h$

<u>oppure</u> guardare
- i vettori riga
- i vettori colonna

Esempio 2

$$A = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad 3 \times 6$$

n.b. $A$ $3 \times 6 \Rightarrow rg(A) \leq 3$

Se prendo $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

$\det(M_1) = 0 \Rightarrow$ non si può dire niente

Se prendo $M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\det(M_2) = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1 \neq 0$

$$\boxed{\Rightarrow rg(A) = 3}$$

$$\mathcal{L}_A : \mathbb{R}^6 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\mathrm{rg}(A) = 3 \Rightarrow \dim(\mathrm{Ker}(\mathcal{L}_A)) = 6-3 = 3$$

---

Esercizio 1 Calcolare $\mathrm{rg}(A)$

$\dim(\mathrm{Ker}\, \mathcal{L}_A)$

dove

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 7 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 5 & -9 & -8 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 9 & 15 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$A$ matrice $3 \times 7$

In particolare $rg(A) \leq \min\{3,7\} = 3$

Se $\exists$ minore $3 \times 3$ $M$
tale che $\det(M) \neq 0$
allora $rg(A) \geq 3$

$3 \leq rg(A) \leq 3 \Rightarrow$

CIOÈ $rg(A) = 3$

Preso $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ $\det =$
$1 \cdot 2 \cdot 3 = 6 \neq 0$

$\Rightarrow rg(A) = 3$

---

A matrice $3 \times 7$

$\Updownarrow$

$$\mathcal{L}_A : \mathbb{R}^7 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$rg(A) = \dim(Im(\mathcal{L}_A)) = 3$$

$$\Rightarrow \dim(Ker\, \mathcal{L}_A) = 7 - rg(A) = 4$$

Per il teo. delle dimensione

Esercizio 2 $rg(A)$ e $\dim(\ker(A))$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad 3 \times 5$$

$A \quad 3 \times 5 \Rightarrow rg(A) \leq 3$

N.B. $\exists$ minore $3 \times 3$ con $\det = 0$

NON POSSIAMO dire niente

Potrebbe esistere un altro minore 3x3 con det $\neq 0$

Nostro caso: $\exists$ minore 2x2

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{con } \det = 1 \neq 0$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

- $\boxed{rg \geq 2}$
- $\boxed{\text{colonne (1),(2) sono lin IND.}}$
- $\boxed{\text{righe (1),(2) sono lin. IND.}}$

POSSIAMO PROCEDERE:

- calcolare det di tutti i minori 3x3

- Guardare le colonne

- Guardare le righe e applicare l'algoritmo di Gauss per vedere gli "SCALINI"

(sul libro di Abate si chiamano "PIVOT")

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

GUARDANDO le COLONNE:

colonna 3 = colonna 2

colonna 4 = 2 · colonna 2

colonna 5 = 3 · colonna 2

$rg(A) = \dim(\text{Span}(\text{colonne di } A))$

$= 2 = \dim(\text{Span}(\text{colonne } (1), (2)))$

GUARDANDO LE RIGHE:

riga 3 = riga 2

$\Rightarrow \dim(\mathrm{Span}(\text{righe})) = 2$

$= \dim(\mathrm{Span}(\text{riga } (1), (2)))$

$\boxed{\text{CONCLUSIONE: } rg(A) = 2}$

$\mathcal{L}_A : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$

$\dim(\mathrm{Ker}\, \mathcal{L}_A) = 5 - 2 = 3$

Esercizio 3. Calcolare $rg(A)$ & $\dim(\mathrm{Ker}(\mathcal{L}_A))$ dove

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad 6 \times 3$$

SOL.

$$A \quad 6 \times 3 \implies rg(A) \leq 3$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad \det = 1 \cdot 2 \cdot 4 = 8 \neq 0$$

$$\implies rg(A) \geq 3$$

cioè: $rg(A) = 3$ poiché $A$ è $6 \times 3$

---

$$L_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^6$$

$$\dim(\ker(L_A)) = 3 - rg(A) = 0$$

---

**N.B.** Sia $A$ matrice $m \times n$

$$L_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$
$$X \mapsto A \cdot X$$

ALLORA:

$$\det(A) \neq 0 \iff rg(A) = n$$

$$\iff \dim(\ker(\mathcal{L}_A)) = 0$$

$\iff \mathcal{L}_A$ BIGETTIVA

RIEPILOGO: $A$ $n \times n$

$$\boxed{\mathcal{L}_A \text{ BIGETTIVA} \iff \det A \neq 0}$$

# SISTEMI LINEARI 3x3
## (3 equazioni & 3 incognite)

$$A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

- $A$ matrice $3 \times 3$ dei coefficienti
- $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ vettore termini noti
- $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ vettore incognite

$(A \mid b)$ matrice $3 \times 4$

N.B. $\quad rg(A|b) \geq rg(A)$

poiché aggiungiamo 1 colonna

$$\Rightarrow rg(A|b) = \begin{cases} rg(A) \\ rg(A)+1 \end{cases}$$

---

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Teo. Rouché - Capelli} \\ \\ \exists \text{ soluzione} \iff rg(A) = rg(A|b) \end{array}}$$

$\boxed{\text{non } \exists \text{ soluzione} \iff rg(A) < rg(A|b)}$

sistema $3 \times 3$ : $A$

matrice $3 \times 3$

$\Rightarrow$ possiamo usare il determinante

QUESTO CASO : ( $A$ matrice $3 \times 3$ )

SE $\det(A) \neq 0$

ALLORA $rg(A) = 3$

Inoltre:

$(A|b)$ matrice $3 \times 4$

$\Rightarrow rg(A|b) \leq 3$

Quindi

$3 = rg(A) \leq \boxed{rg(A|b)} \leq 3$

CIOE' $rg(A) = rg(A|b) = 3$

Per il teo. di Rouché-Capelli

$\exists$ soluzione

ed è UNICA

Poiché: se $rg(A) = rg(A|b)$
$= \#$ incognite $\Rightarrow$ la
soluzione è unica

---

- SE $\det(A) = 0$

ALLORA $rg(A) \leq 2$

In questo caso può accadere

$$rg(A) < rg(A|b)$$

OVVERO non $\exists$ SOLUZIONE

Devo fare il calcolo utilizzando i vettori colonna!

# SISTEMI 4x3

(4 eq. 3 incognite)

$$A \cdot X = b$$

$A$ matrice $4 \times 3$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

vettore incognite

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

vettore termini noti

- $A$ $4 \times 3 \Rightarrow rg(A) \leq 3$
- $(A|b)$ matrice $4 \times 4$

**SE** $\det(A|b) \neq 0$

ALLORA:

$rg(A|b) = 4 > 3 \geq rg(A)$

$\Rightarrow$ non $\exists$ soluzione

## Esempio.

sistema 4 eq. 3 incognite

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}}_{b}$$

$$(A|b) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\det(A|b) =$ sviluppo rispetto riga 4

segni: $\begin{pmatrix} + & & & \\ - & & & \\ + & & & \\ - & + & - & + \end{pmatrix}$

$$= -1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} + 0 \cdot (\dots)$$

sviluppo rispetto colonna 3

$\det(A) =$

$$= -1 \cdot \left( +1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + 2 \det \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$= -1 \cdot \left( (2-1) + 2 \cdot (1+2) \right) = -7$$

$$\boxed{\det(A|b) \neq 0}$$

$$\Downarrow$$

$rg(A|b) = 4 > 3 \geq rg(A)$

$\Rightarrow$ non $\exists$ SOLUZIONE

# MATRICI CON PARAMETRO

## BABY CASE:

<u>Esercizio</u>. Al variare del parametro $t \in \mathbb{R}$ sia

$$A_t = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$$

i) determinare al variare di $t \in \mathbb{R}$ il $rg(A_t)$.

ii) determinare per quali valori di $t$ $\exists$ SOLUZIONE di

$$A_t \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

<u>SOL</u>. $A_t = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$ $2 \times 2$

$$\det(A_t) = 9 - 3t$$

$$\det(A_t) = 0 \iff t = 3$$

$$\det(A_t) \neq 0 \iff t \neq 3$$

$A_t$ matrice $2 \times 2$

QUINDI: $t \neq 3 \Rightarrow \operatorname{rg}(A_t) = 2$

$t=3$ : $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$

colonne $1 \neq 0$
det $= 0$
$\Rightarrow rg(A) = 1$

ii) $A_t \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$

$A_t = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$ $\quad 2 \times 2$

$(A_t | b) = \begin{pmatrix} 1 & t & 5 \\ 3 & 9 & 6 \end{pmatrix}$ $\quad 2 \times 3$

$\Rightarrow \quad rg(A_t | b) \leq 2$

Pertanto SE $t \neq 3$

$$rg(A_t) = 2$$

QUINDI poiché

$$2 = rg(A_t) \leq rg(A_t|b) \leq 2$$

ALLORA

$$rg(A_t) = 2 = rg(A_t|b)$$

QUINDI per il teo. di Rouché-Capelli

$\exists$ SOLUZIONE

La soluzione è UNICA poiché

$$rg = \# \text{ incognite} = 2$$

SE $t = 3$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix} \quad rg = 1$$

$$(A|b) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 9 & 6 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ sono lin. IND.

o, equivalentemente,

Il minore ottenuto eliminando colonna 2 $\begin{pmatrix} 1 & \cancel{3} & 5 \\ 3 & \cancel{9} & 6 \end{pmatrix}$

$M = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ ha $\det = 6 - 15 \neq 0$

CIOÈ: $rg(A|b) = 2$

conclusione:

per $t = 3$

$$rg(A) = 1 < 2 = rg(A|b)$$

per il teo. di Rouché-Capelli

NON $\exists$ SOLUZIONE

# MATRICI CON PARAMETRO

**Esercizio** Al variare di $t$ sia $\mathcal{L}_{A_t} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

l'applicazione lineare associata a

$$A_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ t & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

(i) Al variare di $t$ calcolare $\dim(\mathrm{Im})$, $\dim(\mathrm{Ker})$

(ii) Determinare i valori di $t$ per cui $\exists$ soluz. del sistema

$$A_t \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

---

SOL. Conviene usare il determinante

$$A_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ t & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix} \quad 3 \times 3$$

sviluppo risp. riga 1

$$\det = +1 \cdot \det\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} - 0 \cdot (\dots)$$
$$+ t \cdot \det\begin{pmatrix} t & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= +10 + t(2t - 12)$$
$$= 2t^2 - 12t + 10$$

polinomio di grado 2

$\det = 0 \iff 2 \cdot (t^2 - 6t + 5) = 0 \to \frac{6 \pm \sqrt{36-20}}{2}$

$$\det = 0 \iff t = 1, 5$$

$$\det \neq 0 \iff t \neq 1, 5$$

QUINDI per $t \neq 1, 5$

$$\boxed{rg(A_t) = 3}$$

$$f_{A_t} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

- $t \neq 1, 5$ : $\begin{cases} rg(A_t) = 3 \\ \dim(\ker(f_{A_t})) = 3-3=0 \end{cases}$

---

Per $t = 1, 5$ dobbiamo vedere la matrice

$\boxed{t=1}$ :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

sappiamo che $\det(A)=0 \Rightarrow rg \leq 2$

$M=\begin{pmatrix}1&0\\1&4\end{pmatrix}$ ha $\det \neq 0 \Rightarrow rg \geq 2$

QUINDI:

per $t=1$

$rg(A)=2$

$\dim(\ker(\mathcal{L}_A))=3-2=\underline{1}$

---

$\boxed{t=5}$:

$$A=\begin{pmatrix}1&0&5\\5&4&5\\3&2&5\end{pmatrix}$$

sappiamo che $\det(A)=0 \Rightarrow rg \leq 2$

$M=\begin{pmatrix}1&0\\5&4\end{pmatrix}$ ha $\det \neq 0 \Rightarrow rg \geq 2$

$\Rightarrow rg(A)=2$, $\dim(\ker)=3-2=\underline{1}$

(ii) Per determinare l'esistenza di SOLUZIONI del sistema:

$$A_t \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Sfruttiamo i calcoli già fatti per il $rg(A)$

& applichiamo il teorema di Rouché-Capelli.

Abbiamo SISTEMA 3 eq. 3 incognite

$$A_t \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Per i calcoli su $rg(A_t)$:

$t \neq 1, 5$ $\quad rg(A_t) = 3$

D'altra parte:

$(A_t|b)$ matrice $3 \times 4 \Rightarrow rg \leq 3$

$$rg(A_t) = 3 \leq rg(A_t|b) \leq 3$$

CIOE': Per $t \neq 1, 5$

$$rg(A_t) = 3 = rg(A_t|b)$$

ALLORA: Per $t \neq 1,5$

$\exists$ UNICA SOLUZIONE

poiché

$rg = 3 =$ numero delle incognite

- SE $rg(A) = rg(A|b) = n$
$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad \parallel$
numero delle incognite

ALLORA la soluzione è unica

- SE $rg(A) = rg(A|b) = r < n$
$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad \parallel$
numero delle incognite

ALLORA si ha $\infty$ SOLUZIONI
&

{SOLUZIONI} è spazio affine
di $\dim = \dim(Ker(A)) = n - r$

Dobbiamo analizzare

i casi particolari: $\begin{cases} t=1 \\ t=5 \end{cases}$

$\boxed{t=1}$ : sappiamo che $rg(A)=2$

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 5 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & & b \end{array}$$

Sappiamo che colonne 1, 2 sono ind. poiché $\det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \neq 0$

Consideriamo $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (v_1\ v_2\ b)$

sviluppo riga (1)

$$\det(M) = 1 \cdot \det\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$= 2 + (-10) = -8 \neq 0$

CIOE': $\boxed{\text{per } t = 1 \quad rg(A|b) = 3}$

QUINDI

per $t = 1$

$rg(A) = 2 < 3 = rg(A|b)$

Per il teo. di R.C.

NON $\exists$ SOLUZIONE

$\boxed{t=5}$:

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 5 & 1 \\ 5 & 4 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 5 & 1 \end{array}\right)$$

$$b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

colonne 3 di A

CIOE'

Span( colonne di A ) =

Span (colonne di (A| b))

In particolare

$$rg(A) = rg(A|b)$$

poiché $b$ è combinazione lineare delle colonne di $A$

CONCLUSIONE:

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Per } t = 5 \\ rg(A) = 2 = rg(A|b) \\ \Rightarrow \exists\ \infty \text{ SOLUZIONI} \end{array}}$$

In questo caso:

Per $t = 5$ le soluzioni costituiscono uno spazio affine di $\dim = 1$

$(= \dim \ker(\rho_A))$

**RIASSUMENDO:**

$t \neq 1, 5$ $\quad \exists$ UNICA SOL.

$t = 5$ $\quad \exists\ \infty$ SOL.

$t = 1$ $\quad$ non $\exists$ SOL.

CALCOLO ESPLICITO SOLUZIONI

per $t = 5$ :

Lavoriamo sui coeff. della matrice & applichiamo Gauss sulle righe:

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 5 & 1 \\ 5 & 4 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 5 & 1 \end{array}\right)$$

$(2) \longleftrightarrow (2) - 5 \cdot (1)$

$(3) \longleftrightarrow (3) - 3 \cdot (1)$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 4 & -20 & -4 \\ 0 & 2 & -10 & -2 \end{array}\right)$$

$(3) \leftrightarrow (3) - \frac{1}{2}(2)$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 4 & -20 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

CIOÈ IL SISTEMA È EQUIV. A:

$$\begin{cases} x_1 + 5x_3 = 1 \\ 4x_2 - 20x_3 = -4 \\ \end{cases}$$

$x_3 = t$

$x_2 = \frac{1}{4}(-4 + 20t) = -1 + 5t$

$x_1 = 1 - 5t$

OVVERO:

$$\begin{cases} x_1 = 1 - 5t \\ x_2 = -1 + 5t \\ x_3 = t \end{cases}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

spazio affine di dim $= 1$

Esercizio. $\mathcal{L}_{A_t} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$

associata a

$$A_t = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ t & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad 4 \times 3$$

(i) $\dim(\mathrm{Im}(\mathcal{L}_{A_t}))$, $\dim(\mathrm{Ker}(\mathcal{L}_{A_t}))$

(ii) I valori $t$ t.c. $\exists$ sol. del sistema

$$A_t \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ t \end{pmatrix}$$

<u>SOL.</u>

$$A_t = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ t & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

riga 1 = riga 4

$\Rightarrow$ Per il calcolo del rango possiamo eliminare riga 4

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ t & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Sviluppo risp. riga 2

$$\det(M) \overset{|}{=} -1 \cdot \det\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - 1 \cdot \det\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ t & 1 \end{pmatrix}$$

$= -1(6-4) - 1(2-2t)$

$= 2t - 4$

$\det(M) = 0 \iff t = 2$

$\det(M) \neq 0 \iff t \neq 2$

cioè per $t \neq 2$ $rg = 3$

$\dim(Ker) = 3 - 3 = 0$

Per $t = 2$ $rg \leq 2$

$M_1 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ha $\det \neq 0 \Rightarrow rg \geq 2$

CIOÈ: Per $t=2$

$$rg(A) = 2$$

$$\dim(\ker) = 3-2 = \underline{1}$$

---

(ii) $(A_t|b)$ è matrice $4\times 4$

$$(A_t|b) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ t & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & t \end{pmatrix}$$

$\det =$ sviluppo rispetto riga 2

$$= -1 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & t \end{pmatrix}$$

$$-1 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ t & 1 & 0 \\ 2 & 2 & t \end{pmatrix}$$

$$= -1 \cdot \left[ 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + t \det \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \right]$$

$$-1 \cdot \left[ 1 \cdot \det \begin{pmatrix} t & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} + t \det \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ t & 1 \end{pmatrix} \right]$$

$$= \cdots = 2t^2 - 6t + 4$$

$$= 2 \left( t^2 - 3t + 2 \right)$$

$$\det (A_t | b) = 0 \iff t = 1, 2$$

$$\det (A_t | b) \neq 0 \iff t \neq 1, 2$$

CIOÈ

Per $t \neq 1, 2$

$$rg(A_t | b) = 4$$

Quindi per $t \neq 1, 2$

$$rg(A_t | b) = 4 > 3 \geq rg(A_t)$$

non $\exists$ SOL.

$t = 1$ $\quad rg(A_t | b) \leq 3$

$$rg(A_t) = 3$$

$\Rightarrow$ $\exists$ SOLUZIONE

$t=2$ visto $rg(A)=2$

$rg(A|b)=3$ [esercizio]

Poiché $M = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ ha $\det \neq 0$

ottenuto eliminando riga 4 colonna $\underline{1}$

CIOÈ per $t=2$

NON $\exists$ SOL.

Conclusione : $\nexists$ sol.

solo per $t = 1$