determinante è una funzione:

$$\mathcal{M}at(n \times n; \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$A \mapsto \det(A)$$

- MULTILINEARE
- ALTERNANTE
- $\det(I_d) = 1$

MULTILINEARE + ALTERNANTE $\Rightarrow$

PROP. Sia A matrice $n \times n$

$$A = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_n \end{pmatrix}$$

A = n vettori colonna di $\mathbb{R}^n$

ALLORA:

$\det(A) \neq 0 \iff v_1, v_2, \dots, v_n$ sono lin. IND.

$\det(A) = 0 \iff v_1, v_2, \dots, v_n$ sono lin. DIP.

TEOREMA di esistenza e unicità del determinante

$\exists$ unica funzione determinante

$\det : Mat(n \times n; \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$

che verifica

- multilinearità
- alternanza
- $\det(Id) = 1$

Tale funzione è espressa dallo sviluppo di Laplace rispetto riga i fissata

Sviluppo di LAPLACE rispetto riga i:

$$\boxed{\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det(A_{ij})}$$

dove a_{ij} = coeff. di posto (i,j) di A

A_{ij} = matrice $(n-1) \times (n-1)$ ottenuta eliminando riga i
colonna j

$$(-1)^{i+j} = \begin{pmatrix} + & - & + & - & + & - \\ - & + & - & + & - & + \\ + & - & + & - & & \\ - & + & & \ddots & & + \end{pmatrix}$$

scacchiera dei segni

Formula: i) dobbiamo scegliere riga i fissata

ii) fare somma di

segno $\cdot$ (coeff) det $\left(\text{matrice } (n-1) \times (n-1) \text{ corrispondente} \right)$

FISSIAMO RIGA i e consideriamo tutte le colonne

$$(-1)^{i+1} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} & x & \dots \\ & x & \\ a_{i1} & & \\ & x & \end{pmatrix}}_{A_{i1}} +$$

$$(-1)^{i+2} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x & & x \\ & a_{i2} & \\ x & & x \end{pmatrix}}_{A_{i2}} +$$

$+$ ecc ...

Esempi

1

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \ ?$$

scegliamo riga 1:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

- segni: $\begin{pmatrix} + & - & + \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$

- $a_{11} = 1$; $A_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow A_{11} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}$$

- $a_{12} = 2$;

$$A_{12} = \begin{pmatrix} \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{3} \\ 4 & \cancel{5} & 6 \\ 7 & \cancel{8} & 9 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A_{12} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$$

- $a_{13} = 3$,

$$A_{13} = \begin{pmatrix} \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{3} \\ 4 & 5 & \cancel{6} \\ 7 & 8 & \cancel{9} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A_{13} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$

Sviluppo di Laplace rispetto riga 1:

$$\boxed{\begin{aligned} &+1\cdot \det\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{pmatrix} \\ &-2\cdot \det\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{pmatrix} \\ &+3\cdot \det\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \end{aligned}}$$

$$\| $$

$$= +1\cdot(5\cdot 9 - 8\cdot 6) - 2\cdot(4\cdot 9 - 6\cdot 7) + 3\cdot(4\cdot 8 - 7\cdot 5) = 0$$

Infatti :

$$\underset{v_1}{\underset{\shortparallel}{\begin{pmatrix}1\\4\\7\end{pmatrix}}}, \underset{v_2}{\underset{\shortparallel}{\begin{pmatrix}2\\5\\8\end{pmatrix}}}, \underset{v_3}{\underset{\shortparallel}{\begin{pmatrix}3\\6\\9\end{pmatrix}}}$$ sono lin. DIP.

$$v_3 - v_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = v_2 - v_1$$

cioè : $v_1 - 2v_2 + v_3 = 0_V$

Consideriamo sempre $A = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\4 & 5 & 6\\7 & 8 & 9\end{pmatrix}$

Se scegliamo riga 2 :

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

segni :
$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$

$$a_{21} = 4 \; ; \quad A_{21} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow A_{21} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$$a_{22} = 5 \; ; \quad A_{22} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow A_{22} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$$

$$a_{23} = 6; \quad A_{23} = \left(\begin{array}{cc|} 1 & 2 \\ \hline 7 & 8 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow A_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$

Sviluppo di Laplace rispetto riga 2 :

$$\boxed{\begin{aligned}&-4\cdot\det\begin{pmatrix}2 & 3\\ 8 & 9\end{pmatrix} +\\ &+5\cdot\det\begin{pmatrix}1 & 3\\ 7 & 9\end{pmatrix} +\\ &-6\cdot\det\begin{pmatrix}1 & 2\\ 7 & 8\end{pmatrix}\end{aligned}}$$

$$= -4(2\cdot 9 - 8\cdot 3) + 5\cdot(1\cdot 9 - 7\cdot 3)$$

$$-6\cdot(1\cdot 8 - 2\cdot 7) = 0$$

Altri Esempi:

2

$$\det \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

conviene considerare le riga con il maggior numero di zeri $\rightarrow$ riga 2

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$a_{21} = 2$$

SEGNI: $\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$

$$A_{21} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\det = -2 \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$+ \emptyset \cdot (\dots) - \emptyset \cdot (\dots)$$

$$= -2 \cdot (-1 \cdot 5 - 2 \cdot 1)$$

$$= 14$$

3

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 8 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

sviluppo rispetto riga 3:

Segni:

$$\begin{pmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{pmatrix}$$

$a_{31} = 0 \quad a_{32} = 0 \quad a_{33} = 0$

$a_{34} = 3$

$$A_{34} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & \cancel{8} \\ 1 & 2 & 0 & \cancel{1} \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{3} \\ 2 & 0 & 7 & \cancel{1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = +0\cdot(\ldots) - 0\cdot(\ldots) + 0\cdot(\ldots)$$

$$- 3 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

$$= -3 \cdot \left[\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix} \right]$$

Adesso consideriamo = la matrice A_{34} e facciamo lo sviluppo rispetto riga 3

segni: $\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$

$a_{31} = 2$ $\qquad A_{31} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

$a_{32} = 0$

$a_{33} = 7$ $\qquad A_{33} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix} =$$

$$+ 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} - 0 \cdot (\dots)$$

$$+ 7 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot (0 - 10) - 0 + 7 \cdot (2 - 2)$$

$$= -20$$

CONCLUSIONE:

$$\det(A) =$$

$$= -3 \cdot \left[\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix} \right]$$

$$= -3 \cdot (-20) = 60$$

TRASPOSTA di una matrice

$$A = (a_{ij})$$

$$A^T \overset{def}{=} (a_{ji}) = \text{trasposta di } A$$

$$\begin{pmatrix} & a_{ij} \\ & \end{pmatrix} = A \longmapsto A^T = \begin{pmatrix} a_{ij} \end{pmatrix}$$

scambiamo gli indici di riga e colonne

Esempi

1) $$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 3 & 4 & 9 \\ 6 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

per determinare A^T facciamo simmetria rispetto diagonale principale

$$A^T = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 5 & 4 & 0 \\ 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} & 5 & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} & & \\ 5 & & \\ & & \end{pmatrix} = A^T$$

5 = coeff. di posto $(1,2)$ di A

$\downarrow$

5 = coeff. di posto $(2,1)$ di A^T

② $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$

$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 7 \end{pmatrix}$

riga 1 di A

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

corrisponde a

colonna 1 di $A^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

riga 2 di $A \iff$ colonna 2 di A^T

ecc...

<u>Teo</u>. $\det(A) = \det(A^T)$

Teo. CORRISPONDE alle

seguente PROP.

PROP. È possibile fare lo SVILUPPO di Laplace RISPETTO a una colonna j fissata:

$$\det(A) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det(A_{ij})$$

- i = indice di riga che varia
- j = indice della colonna fissata

Quindi per calcolare
il determinante
conviene scegliere
la riga o le colonne
con il maggior numero
di zeri

&

FARE LO SVILUPPO di
Laplace secondo la
riga o le colonne scelte

Esempio 3

$$\det \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 & 7 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 5 \\ 6 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

Possiamo scegliere riga oppure la colonna con il maggior numero di coefficienti nulli

In questo caso: COLONNA 2

segni :
$$\begin{pmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{pmatrix}$$

$a_{12} = 2$; $A_{12} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 & 7 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 5 \\ 6 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$

$$A_{12} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \\ 6 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = -2 \cdot \det(A_{12}) + 0 \cdot (\dots)$$

$$= -2 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \\ 6 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

Consideriamo la matrice A_{12}:

$$A_{12} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \\ 6 & 0 & 9 \end{pmatrix} \qquad \text{segni: } \begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$

consideriamo colonna 2 di A_{12}:

$$\det(A_{12}) = -(-1) \cdot \det\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} + 0(\dots) - 0 \cdot (\dots)$$

$$= +1 \cdot (2 \cdot 9 - 5 \cdot 6) = -12$$

Conclusione: $\det(A) = -2 \cdot (-12)$
$= 24$

Esempio 4

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 5 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{sviluppo colonna 3}$$

$$= +(-1)\cdot\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

sviluppo → riga 1

$$= -1\cdot\left(+1\cdot\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} - 2\cdot\det\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}\right)$$

$$= -1\cdot\left(-6 - 2\cdot(-10)\right) = -14$$

DETERMINANTE MATRICI TRIANGOLARI

Def. A matrice $n \times n$ si dice TRIANGOLARE SUPERIORE

SE

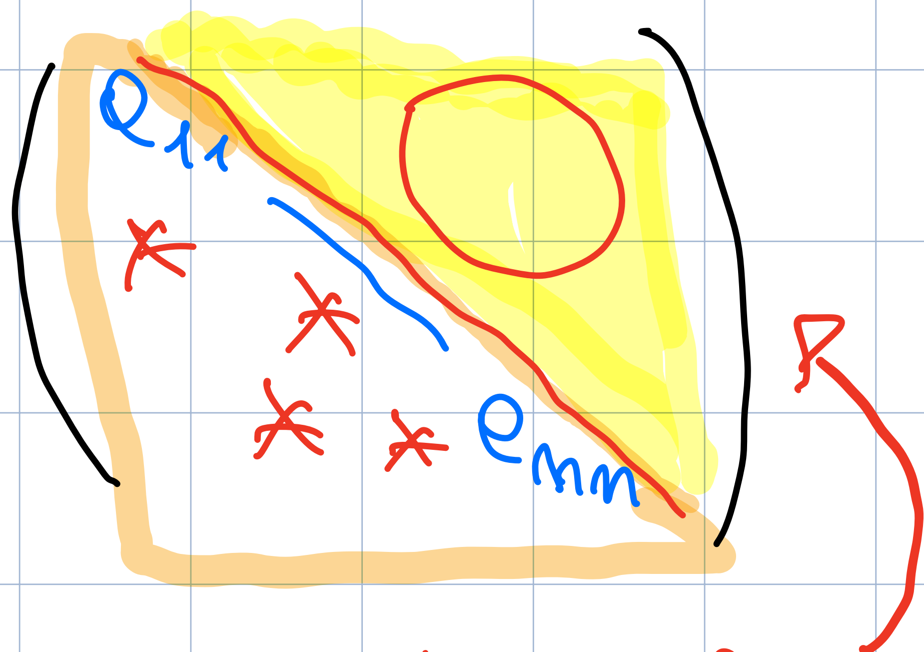
$$(a_{ij}) = 0 \quad \forall\ i > j$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & * & * & * \\ & a_{22} & & * \\ 0 & & a_{33} & * \\ & & & \ddots & \\ & & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

o sotto la diagonale

A si dice TRIANGOLARE INFERIORE

SE $(a_{ij})=0$ per $i<j$



o sopra la diagonale

Def. A matrice $n \times n$ si dice **DIAGONALE** se

$$a_{ij} = 0 \quad \text{per } i \neq j$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & & & 0 \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

OSS. A matrice TRIANGOLARE

$$\Downarrow$$

$$\det(A) = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$$

$\boxed{\text{A Triangolare}} \Rightarrow \det(A) =$

= prodotto degli elementi sulla diagonale

Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 9 & 7 \\ 0 & 2 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

matrice TRIANGOLARE SUPERIORE

$\det(A) =$ prodotto elementi sulla diagonale

$$= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$$

Infatti: sviluppo rispetto alla prima colonna:

$$\det(A) = +1 \cdot \det\begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 0 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

sviluppo rispetto colonna 1

$$= (+1) \cdot \left[(+2) \cdot \det\begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \right]$$

$$= (+1) \cdot (+2) \cdot (3 \cdot 4) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$$

OPPURE: sviluppo rispetto alle ultime righe

$$\det(A) = +4 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= (+4) \cdot \left[(+3) \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right]$$

$$= (+4) \cdot (+3) \cdot (1 \cdot 2) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$$

MULTILINEARITÀ + ALTERNANZA

$\Downarrow$

Possiamo sostituire una colonna o una riga con il metodo di Gauss e calcolare successivamente il determinante

<u>Esempio</u>:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

SOSTITUISCO :

colonna 1 <-> colonna 1 - colonna 2

$$\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Teo $\Rightarrow$ $\det(A) = \det(A')$

Infatti:

$$\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

$\Downarrow$ multilinearità

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} - \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

MA $\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} = 0$

per l'ALTERNANZA poiché colonne 1 = colonne 2

CIOÈ:

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) \qquad\qquad \det(A')$$

$$\det(A') = +1 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= 2$$

Esercitazione 3.3

A matrice 3×3

associata a $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$A = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}$$

3 vettori colonna

$$v_1 = f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Teo. dimensione: $3 = rg(f) + \dim(\mathrm{Ker}(f))$

$\det(A) \neq 0 \iff v_1, v_2, v_3$ sono lin. IND.

QUINDI:

$\det(A) \neq 0 \iff v_1, v_2, v_3$ sono lin. IND.

$\iff \dim(\text{Span}(v_1, v_2, v_3)) = 3$

$\iff rg(A) = rg(f) = 3$

$\iff \dim(\text{Ker}(f)) = 0$

MATRICI con parametro

Esempi

1 Al variare di $t \in \mathbb{R}$

sia $A_t = \begin{pmatrix} 1 & t \\ t & 4 \end{pmatrix}$

calcolare • $rg(A_t)$

• $\dim \ker(A_t)$

SOL.

$\boxed{A_t \text{ matrice } 2\times 2 \longleftrightarrow f_{A_t}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2}$

$$A_t = \begin{pmatrix} 1 & t \\ t & 4 \end{pmatrix}$$

$$\det(A_t) = 4 - t^2$$

$$t \neq \pm 2 \Rightarrow \det(A_t) \neq 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} rg(A_t) = 2 \\ \dim(\ker(A_t)) = 2-2=0 \end{cases}$$

casi particolari:

$$t=2: \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} rg = 1 \\ \dim(\ker) = 1 \end{cases} = 2 - 1$$

$t = -2$: $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} rg = 1 \\ \dim(\ker) = 1 \end{cases}$$

2 Al variare di t

sia

$$A_t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & t & t \\ t & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

calcolare $rg(A_t)$

$\dim(\ker(A_t))$

SOL. $\boxed{\begin{array}{l} A_t \text{ matrice } 3\times 3 \\ f_{A_t} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \end{array}}$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & t & t \\ t & 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

sviluppo rispetto riga 2

$$t\cdot\left(\det\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ t & 1\end{pmatrix}\right) - t\left(\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ t & 1\end{pmatrix}\right)$$

$$= t\cdot\left(1-3t-(1-2t)\right) =$$

$= -t^2$

$\det \neq 0 \iff t \neq 0$

$t \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} rg(A_t) = 3 \\ \dim(\ker) = 3-3=0 \end{cases}$

$t=0$: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ho $\det \neq 0$

$\begin{cases} \det(A) = 0 \\ \det(M) \neq 0 \end{cases} \Rightarrow rg(A) = 2$

poiché

$$\det(A) = 0 \Rightarrow$$

i vettori colonne di A

sono lin. DIP.

$$\Rightarrow \dim\left(\text{Span}\left(\underset{\text{di } A}{\text{colonne}}\right)\right) < 3$$

$$\det(M) \neq 0 \Rightarrow rg(A) \geq 2$$

$$\begin{cases} \det(A) = 0 \\ \det(M) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} rg(A) < 3 \\ rg(A) \geq 2 \end{cases}$$

Conclusione:

Per $t=0$: $\begin{cases} rg(A) = 2 \\ \dim(\ker) = 3-2 = \underline{1} \end{cases}$