RANGO:

Data A matrice $k \times n$

- $rg(A)$ non cambia per operazioni ELEMENTARI sulle righe o sulle colonne di A

$\Rightarrow$ Posso applicare Algoritmo di Gauss alle righe di A

$\Rightarrow$ $rg(A)$ = numero di "gradini" ottenuti

(sul libro: "PIVOT")

Esempi:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad rg = 2$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad rg = 3$$

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 7 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \qquad rg = 4$$

RANGO per colonne o

per righe :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

- (colonna 2) = 3 · (colonna 1)
- (riga 2) = 2 · (riga 1)

$$\Rightarrow \quad rg(A) = 1$$

Possiamo calcolare rg(A) guardando le righe di A oppure le colonne di A.

A matrice $k \times n$

k righe, n colonne

def. $rg(A)$ $\boxed{\text{RANGO di } A}$

$= \dim(\operatorname{Im}(\mathcal{L}_A))$

notazione: $rg(A)$ o $rk(A)$

TEOREMA.

Sia A una matrice $k \times n$

ALLORA:

$rg(A) =$

(1) max numero di colonne lin. IND.

(2) max numero di righe lin. IND.

(3) max ordine di un minore quadrato con determinante $\neq 0$

Spiegazione di (3)

MINORE M di una matrice A è una "sottomatrice" ottenuta eliminando righe e colonne di A

Esempi

1) $$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 7 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}_{3\times 3}$$

i) Eliminiamo riga (3)
colonna (3)

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & \cancel{5} \\ 2 & 7 & \cancel{0} \\ \cancel{-1} & \cancel{2} & \cancel{4} \end{pmatrix} \longrightarrow M = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$$

matrice 2×2

ii) Eliminiamo riga (3)
colonne (2)

$$\begin{pmatrix} 1 & \cancel{3} & 5 \\ 2 & \cancel{7} & 0 \\ \cancel{-1} & \cancel{2} & \cancel{4} \end{pmatrix} \longrightarrow M = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

matrice 2×2

iii) Eliminiamo riga (1)
colonne (3)

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 7 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \longrightarrow M = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

matrice 2×2

iv) Eliminiamo riga (2)
colonna (2)

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 7 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \longrightarrow M = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

matrice 2×2

2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 7 & 0 \\ 3 & 0 & -3 & -1 \\ 4 & 5 & 8 & 6 \end{pmatrix}$$

3×4

Elimino colonne (4)

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 7 & 0 \\ 3 & 0 & -3 & -1 \\ 4 & 5 & 8 & 6 \end{pmatrix} \rightsquigarrow M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 3 & 0 & -3 \\ 4 & 5 & 8 \end{pmatrix}$$

matrice 3x3

Elimino colonne (1) colonne (3)

riga (3)

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 7 & 0 \\ 3 & 0 & -3 & -1 \\ 4 & 5 & 8 & 6 \end{pmatrix} \longrightarrow M = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

matrice 2x2

$\boxed{\text{ordine}}$ di un minore quadrato

DEF. M è minore $h \times h$

$\iff$ ordine di $M = h$

DETERMINANTE

- determinante è un **NUMERO**
- determinante si può calcolare solo per **MATRICI QUADRATE**

nostro caso: A matrice $n \times n$

oppure

M minore $h \times h$

PROP.

Se M è minore $h \times h$ delle matrice A

$\det(M) \neq 0$ ALLORA

$rg(A) \geq h$

Condizione ③ del Teorema:

$rg(A) = n \iff \exists$ minore M $n \times n$ t.c. $\det(M) \neq 0$

&

$\forall$ minore $(n+1) \times (n+1)$ è $\det = 0$

TEORIA del determinante

$Mat(n \times n; \mathbb{R})$ = insieme di tutte le matrici $n \times n$ a coeff. in $\mathbb{R}$

(n.b. si può considerare coeff. in $\mathbb{C}$)

$$\det : Mat(n\times n; \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$A \longmapsto \det(A)$$

OVVERO:

$\det(A)$ è un numero

n.b.

det si calcola per matrici $n\times n$

(matrici quadrate)

IDEA GEOMETRICA

scrivo A matrice $n\times n$

come: $A = (v_1 \_\_ v_n)$

$v_1, \dots, v_n$ sono le colonne di A

A = n vettori colonne di $\mathbb{R}^n$

det(A) = VOLUME (con segno) del parallelepipedo n-dimensionale generato da $v_1, \dots, v_n$

$\boxed{\text{CASO } n=2}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

matrice 2×2

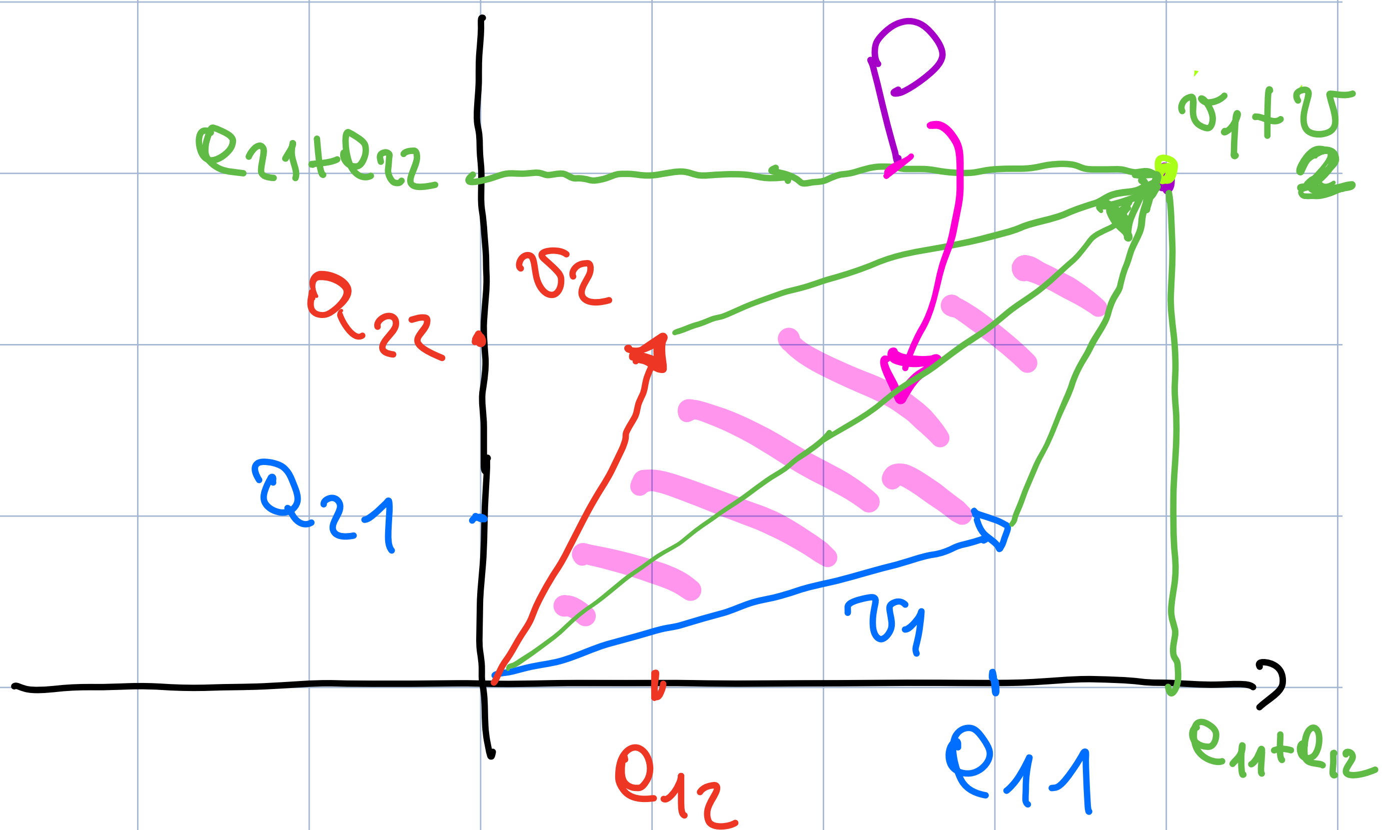
$$v_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} = \text{colonne 1 di } A$$

$$v_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} = \text{colonne 2 di } A$$

Posso scrivere

$$A = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \end{pmatrix}$$

2 vettori colonna di $\mathbb{R}^2$



$P =$ parallelogramma generato da v_1, v_2

Segno $=$ $+$ se $v_1 \curvearrowright v_2$ in senso antiorario

 $-$ se $v_1 \curvearrowright v_2$ in senso orario

$$\text{Area}(P) = |a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}|$$

(Esercizio)

$$\det(A) = \text{segno} \cdot \text{Area}(P)$$

<u>In conclusione</u>

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad \text{matrice } 2\times 2$$

$$\Big\downarrow$$

$$\det(A) \overset{def}{=} a_{11}\cdot a_{22} - a_{21}\cdot a_{12}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdot \\ & a_{22} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \cdot & a_{12} \\ a_{21} & \end{pmatrix}$$

Esempi: 1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

$$\det(A) = 1\cdot 4 - 2\cdot 3 = -2$$

2. $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

$$\det(A) = 5 \cdot 1 - (-3) \cdot 2 = 11$$

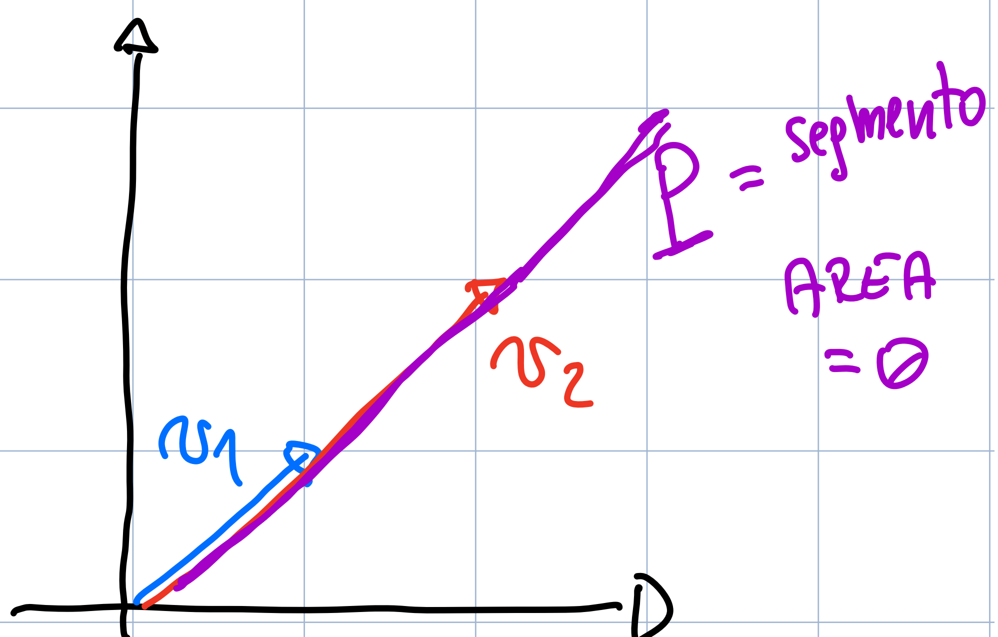
3. $A = \begin{pmatrix} 2 & 57 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

$$\det(A) = 2 \cdot 3 - 0 \cdot 57 =$$

$$= 2 \cdot 3 = 6$$

Quando si ha $\det(A) = 0$?

<u>RISPOSTA</u>: $\det(A) = 0$ quando il parallelogramma è degenere, ovvero quando v_1, v_2 sono lin. DIP.



Esempio: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

$\det(A) = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 2 = 0$

$\Leftrightarrow$ $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ sono lin. DIP.

<u>oss</u>. $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$

$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\qquad v_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$

Se raddoppio v_1 : $v_1' = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$
$= \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

$A' = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$

che relazione ∃ tra

$$\det(A)$$

&

$$\det(A')$$

?

RISPOSTA: $\det(A') = 2 \cdot \det(A)$

Infatti:

$$\det(A') = 2 \cdot 6 - 4 \cdot 5$$

$$= 2 \cdot (1 \cdot 6 - 2 \cdot 5)$$

$$= 2 \cdot \det(A)$$

$\boxed{\text{caso generale:}}$

$$\det : Mat(n \times n; \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$A \longmapsto \det(A)$$

è una funzione

(1) MULTILINEARE rispetto alle COLONNE di A

(2) ALTERNANTE rispetto alle colonne di A

(3) $\det(Id) = 1$

MULTILINEARE:

se fisso $(n-1)$ colonne det è lineare rispetto alla colonna rimasta libera.

i) $\det(v_1 \dots \underbrace{(u_j + w_j)}_{\text{colonna } j} \dots v_n) =$

colonna j = somma di 2 vettori $u_j + w_j$

$$= \det(v_1 \dots u_j \dots v_n) + \det(v_1 \dots w_j \dots v_n)$$

(ii)

$$\det(v_1 \dots \underbrace{(\lambda \cdot v_j)}_{\text{colonne } j} \dots v_n) =$$

$$\lambda \cdot \det(v_1 \dots v_j \dots v_n)$$

ALTERNANTE :

$\det(A) = 0$ SE 2 colonne sono uguali

equivalentemente:

scambiando di posto 2 colonne il det cambia segno

$\det(Id) = 1$

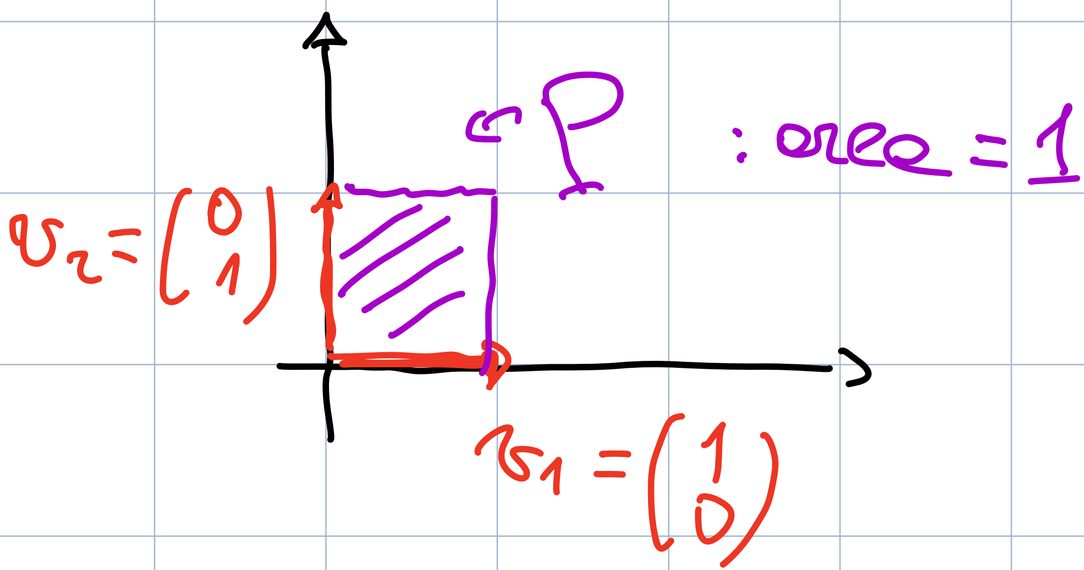
dove matrice Identità $n \times n$ è

$$Id = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & \vdots \\ \vdots & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & & 1 \end{pmatrix}$$

1 sulla diagonale; 0 fuori

caso (2x2)

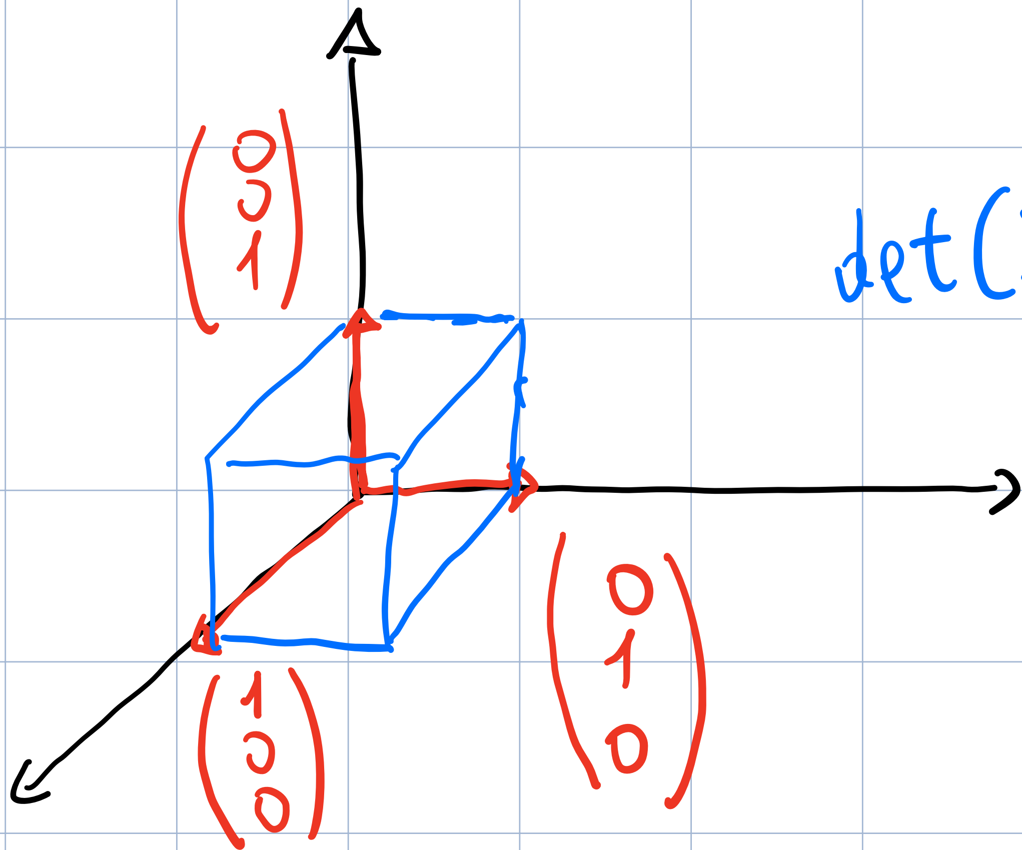
$$Id = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$



$$\det(Id) = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

caso (3x3)

$$Id = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



$\det(Id) =$ volume cubo di lato 1 $= 1$

ALTERNANZA : Esempi

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \end{pmatrix}$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$\det(A) = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 1 = 10$

$\longrightarrow$ Scambiamo le 2 colonne di A

$$A' = (v_2 \quad v_1) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det(A') = 1 \cdot 2 - 4 \cdot 3 = -10$$
$$= -\det(A)$$

---

2 colonne uguali

$$\det \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 7 & 7 \end{pmatrix} = 5 \cdot 7 - 7 \cdot 5 = 0$$

MULTILINEARITÀ: Esempi

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

MULTILINEARITÀ:

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$$

Infatti: $\det\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} = 5\cdot4-6\cdot3=2$

$\det\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = 2\cdot4-3=5$

$\det\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} = 3\cdot4-5\cdot3=-3$

$$2 = 5+(-3)$$

$$\det\begin{pmatrix} 3 & 10 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$v_2 = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix} = 5\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\det\begin{pmatrix} 3 & 10 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = 5\cdot\det\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

A matrice

$3A$ matrice ottenuta moltiplicando $\times 3$ tutti i suoi coeff.

Esempio: $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow 3A = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 6 & 12 \end{pmatrix}$

Esercizio:

A matrice 2×2

$$\Downarrow$$

$$\det(3A) = x \cdot \det(A)$$

DETERMINARE x.

SOL. $x = 9$

Algebricamente: $A = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \end{pmatrix}$

$$3A = \begin{pmatrix} 3v_1 & 3v_2 \end{pmatrix}$$

$$\det(3A) = \det\begin{pmatrix} 3v_1 & 3v_2 \end{pmatrix} =$$

Per multilinearità

$$= 3\det\begin{pmatrix} v_1 & 3v_2 \end{pmatrix}$$

$$= 3 \cdot 3 \cdot \det\begin{pmatrix} v_1 & v_2 \end{pmatrix}$$

$$= 3^2 \cdot \det(A)$$

In generale:

A $n \times n$

$$\Downarrow$$

$$\det(\lambda \cdot A) = \lambda^n \cdot \det(A)$$