SISTEMI LINEARI

Consideriamo un sistema lineare

$\boxed{k \text{ equazioni}, \quad n \text{ incognite}}$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n = b_k \end{cases}$$

$a_{11}, a_{12}, \dots, a_{kn}$ coefficienti

$x_1, x_2, \dots, x_n$ incognite

$b_1, \dots, b_k$ termini noti

NOTAZIONE MATRICIALE (compatta)

$$\boxed{A \cdot X = b}$$

DOVE:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \end{pmatrix}$$

matrice $k \times n$ matrice dei coefficienti

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$ vettore delle incognite

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_k \end{pmatrix}$$ vettore dei termini noti

Esempio

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 8 \\ x_2 - x_3 = -7 \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -7 \end{pmatrix}$$

$$A \qquad X \qquad b$$

A $\qquad$ $X \in \mathbb{R}^3$ $\qquad$ $b \in \mathbb{R}^2$

matrice 2×3

Dato sistema $A \cdot X = b$

2 interpretazioni:

(1) Se scrivo la matrice A

$$A = (v_1, \ldots, v_n)$$

n vettori colonna $\in \mathbb{R}^k$

$$v_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{k1} \end{pmatrix}, \ldots, \quad v_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{kn} \end{pmatrix}$$

v_1 = colonna 1 di A, v_n = colonna n di A

Risolvere $A \cdot X = b$

$\Updownarrow$

Trovare i coeff. $x_1, \ldots x_n$ t.c.

$$x_1 \cdot v_1 + \dots + x_n \cdot v_n = b$$

Esempio

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & -4 \\ 3 & 5 & -1 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot X = b \iff \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 8 \\ \quad\;\; x_2 - 4x_3 = 9 \\ 3x_1 + 5x_2 - x_3 = -3 \end{cases}$$

$\iff$ Probleme geometrico:

$$x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix}$$

dove $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$

sono le incognite

(2) $\mathcal{L}_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^k$

$X \longmapsto A \cdot X$

- Risolvere $A \cdot X = b$

$\Updownarrow$

Determinare la controimmagine del vettore b

$\mathcal{L}_A^{-1}(b) = \{ X \in \mathbb{R}^n : \mathcal{L}_A(X) = b \}$

$\boxed{2 \text{ Problemi:}}$

1. $\exists$ soluzione?

2. Se $\exists$ soluzioni quante sono? Che struttura hanno?

Risposta a 1

TEOREMA di ROUCHÉ-CAPELLI:

Sia A matrice $k \times n$, $b \in \mathbb{R}^k$

A = matrice dei coeff. ; b vettore termini noti

Il sistema lineare
di k equazioni in n incognite

$A \cdot X = b$ ha almeno

una soluzione

$$\Updownarrow$$

$$rg(A) = rg(A|b)$$

A unito b

dove $(A|b)$ è matrice

$k \times (n+1)$

ottenuto aggiungendo vettore b ad A

N.B.

$rg(A)$ = max numero di colonne di A lin. IND.

$= rg(\mathcal{L}_A) = \dim(\mathrm{Im}(\mathcal{L}_A))$

Esempi

1 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ x_2 - x_3 = 4 \\ 2x_3 = 6 \end{cases}$

3 eq. 3 inc.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

matrice 3x3

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{array}\right)$$

matrice 3×4

$rg(A) = 3$ (esercizio)

i 3 vettori colonne sono lin. IND.

$(A|b)$ 3×4

$\Rightarrow rg \leq \min\{3,4\}$

$rg \leq 3$

D'altra parte

$$\boxed{rg(A) \leq rg(A|b)}$$

poiché colonne di A

sono colonne di $(A|b)$

Conclusione:

$$3 = rg(A) \leq rg(A|b) \leq 3$$

CIOE'

$$rg(A) = rg(A|b) = 3$$

QUINDI:

Per il teorema di Rouché-Capelli

$\exists$ soluzione

SOLUZIONE ESPLICITA:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ x_2 - x_3 = 4 \\ 2x_3 = 6 \end{cases}$$

eq(3) : $x_3 = \frac{6}{2} = 3$

eq(2) : $x_2 = 4 + x_3 = 4+3 = 7$

eq(1) : $x_1 = 5 - 2x_2 - x_3$

$= 5 - 14 - 3 = -12$

CONCLUSIONE : $\exists$ UNICA SOLUZIONE

$$X = \begin{pmatrix} -12 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}$$

2

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 5 \\ \quad\;\; x_2 + 2x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 6 \end{cases}$$

sistema 3 eq. 3 inc.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$ matrice 3x3

$rg(A) = 2$ poiché

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \&$$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sono lin. IND.

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 6 \end{array}\right)$$ matrice 3x4

$$rg(A|b) = 3$$

poiché

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$ sono lin. IND

(Esercizio)

In questo caso

$$rg(A) = 2 < 3 = rg(A|b)$$

QUINDI:

Per il teorema di Rouché-Capelli

$$\boxed{\text{non } \nexists \text{ SOLUZIONE}}$$

CALCOLO ESPLICITO:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 5 \\ \quad\;\; x_2 + 2x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 6 \end{cases}$$

Usiamo matrice $(A|b)$ e applichiamo algoritmo di Gauss sulle righe

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 6 \end{array}\right)$$

$\text{riga}(3) \leftarrow \text{riga}(3) - \text{riga}(1)$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

<u>OVVERO</u> $\uparrow$: il sistema lineare è equivalente al sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 5 \\ x_2 + 2x_3 = 2 \\ 0 = 1 \end{cases}$$

eq (3) : $0 = 1$

è impossibile

$\Rightarrow$ non $\exists$ SOLUZIONE

N.B.

$$rg(A) \leq rg(A|b)$$

SEMPRE

poiché aggiungiamo la colonna b alle colonne di A

QUINDI Teo. Rouché - Capelli:

- $rg(A) = rg(A|b) \iff \exists$ SOL.

- $rg(A) < rg(A|b) \iff$ non $\exists$ SOL

RISPOSTA a 2

Cerchiamo struttura dell'insieme delle soluzioni

PREAMBOLO:

SOTTOSPAZI AFFINI

Def. $W \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice

sottospazio AFFINE

SE

$\exists$ vettore $v_0 \in \mathbb{R}^n$

$\exists$ sottospazio vettoriale

$W_0 \subset \mathbb{R}^n$

tali che :

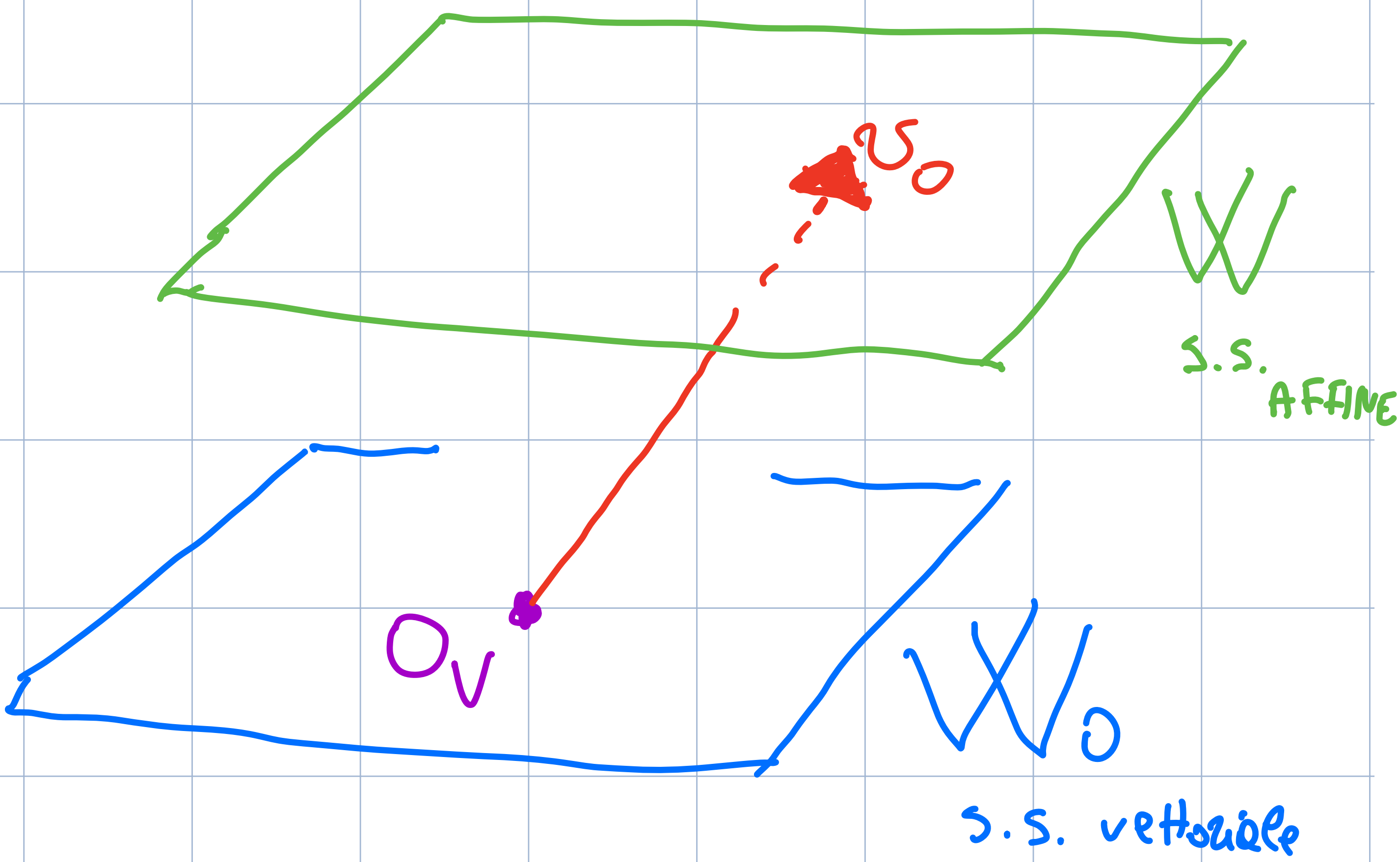
$$\boxed{W = v_0 + W_0}$$

cioè $W = \{ v_0 + w \; : \; w \in W_0 \}$

In pratica :

W_0 sottosp. vettoriale
quindi passa per l'origine

W = traslato di W_0
mediante il vettore v_0



W é parallelo a W_0

TEOREMA (soluzioni sistema lineare)

Sia $A \cdot X = b$ sistema lineare

k equazioni

n incognite

Supponiamo $rg(A) = rg(A|b) = r$

ALLORA:

(i) $r = n \Rightarrow \exists$ unica soluzione

(ii) $r < n \Rightarrow \exists\ \infty$ soluzioni

della forma $v_0 + \mathrm{Ker}(L_A)$

DOVE: ① w_0 è una soluzione particolare (qualsiasi) del sistema

&

② $Ker(\mathcal{L}_A) \Leftrightarrow A \cdot X = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

equaz. omogenea associata

Esempi

1

$$\boxed{x_1 + x_2 + 3x_3 = 9}$$

1 eq. 3 incognite

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$; $(A|b) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & | & 9 \end{pmatrix}$

$rg(A) = rg(A|b) = 1$; $\dim(Ker(\mathcal{L}_A)) = 2$

$\dim(\mathrm{Ker}(\mathcal{L}_A)) = 2 \Rightarrow$ Introduciamo 2 PARAMETRI

Poniamo $x_3 = t$, $x_2 = s$

eq: $x_1 = 9 - x_2 - 3x_3$
$= 9 - s - 3t$

SOLUZIONE:

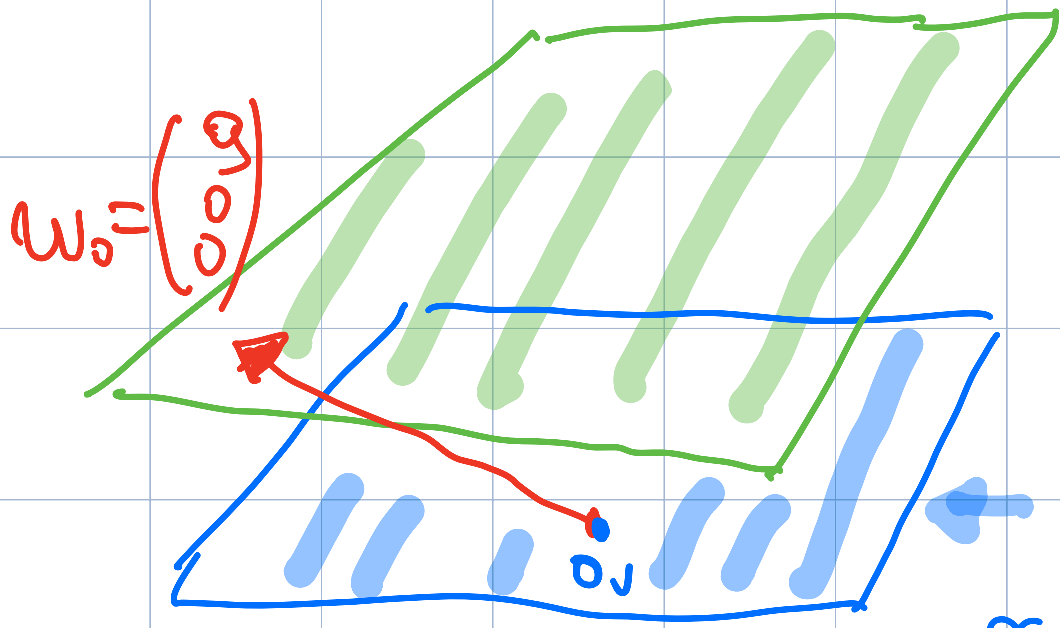
$$\begin{cases} x_1 = 9 - s - 3t \\ x_2 = s \\ x_3 = t \end{cases}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{v_0} + \underbrace{s\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\mathrm{Ker}(\mathcal{L}_A)}$$

$$\mathcal{L}_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto x_1 + x_2 + 3x_3$$

$$\dim(W) = \dim(\operatorname{Ker}(\mathcal{L}_A)) = 2$$



W: $x_1 + x_2 + 3x_3 = 9$

$\operatorname{Ker}(\mathcal{L}_A) =$ $x_1 + x_2 + 3x_3 = 0$

2

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 4 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 5 \end{cases}$$

Sisteme 2 eq. 3 incogn.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$ metrice 2×3

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -3 & 4 \\ 3 & -1 & 1 & 5 \end{array}\right)$$ metrice 2×4

$$rg(A) = rg(A|b) = 2$$

Quindi: 1 $\exists$ SOLUZIONE & 2 $\dim(\mathrm{Ker}(L_A)) = 3-2 = 1$

$\Rightarrow$ le soluzioni sarenno descritte da 1 peremetro

Applichiemo Alg. di Gauss

$$eq(2) \leftarrow eq(2) - \frac{3}{2} eq(1):$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 4 \\ \\ \quad -\frac{5}{2}x_2 + \frac{11}{2}x_3 = -1 \end{cases}$$

$$5 - \frac{3}{2} \cdot 4$$

$x_3 = t$ perametro

eq(2): $x_2 = -\frac{2}{5}\left(-1 - \frac{11}{2}t\right)$

$$= \frac{2}{5} + \frac{11}{5}t$$

eq(1): $x_1 = \frac{1}{2}\left(4 - \left(\frac{2}{5} + \frac{11}{5}t\right) + 3t\right)$

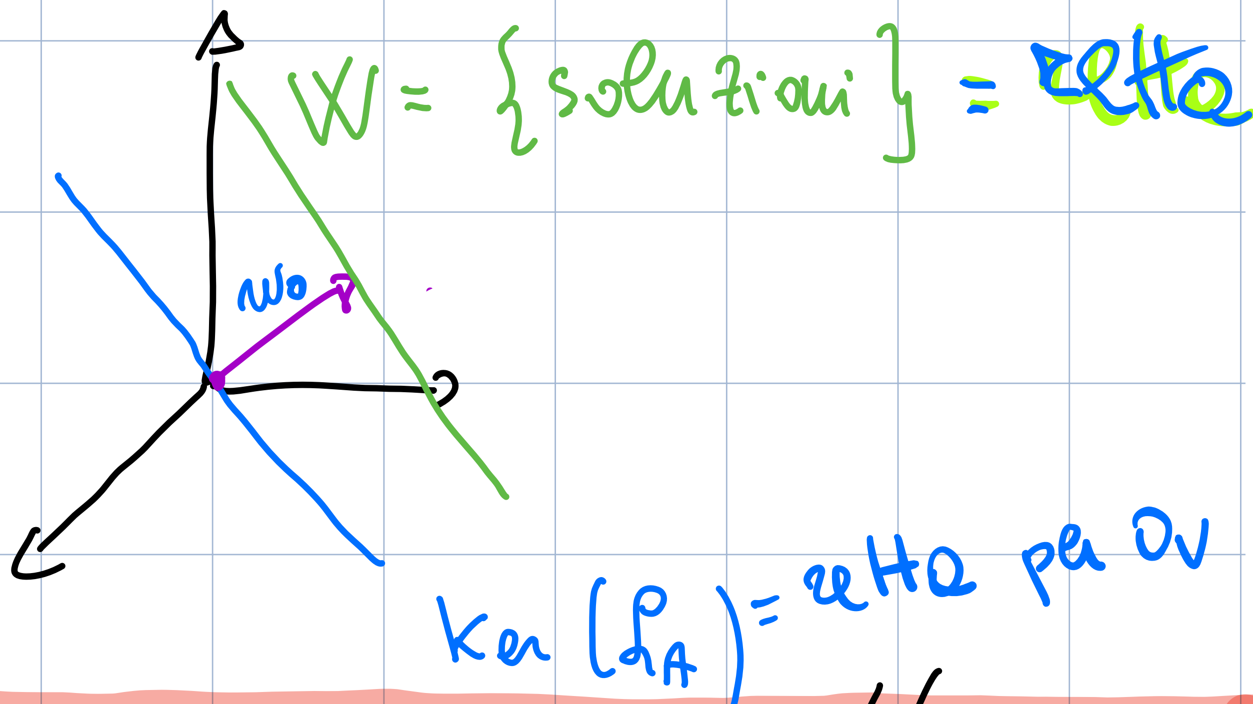
$$= \frac{9}{5} + \frac{2}{5} t$$

<u>CONCLUSIONE</u> : SOLUZIONE È

$$\underset{w_0}{\begin{pmatrix} 9/5 \\ 2/5 \\ 0 \end{pmatrix}} + \underbrace{t \begin{pmatrix} 2/5 \\ 11/5 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\operatorname{Ker} \mathcal{L}_A}$$

dim = 1

$$\mathcal{L}_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$$



DEF. $W = v_0 + W_0$

sottospazio affine

$$\dim(W) \overset{\text{def.}}{=} \dim(W_0)$$

QUINDI:

nostro caso: $\boxed{\dim(\{\text{soluzioni}\}) = = \dim(\ker(L_A))}$

La dimensione può essere pensata come

numero di parametri necessario

per descrivere lo spazio

N.B. $\dim(\mathrm{Ker}(\mathcal{L}_A)) =$

$= n - rg(A)$ per il Teo. delle dimensione

$\Rightarrow$ Le soluzioni saranno descritte da

$$\boxed{\text{vettore particolare } w_0 + (n - rg(A)) \text{ PARAMETRI}}$$

vettore fissato

$w_0 + \mathrm{Ker}(\mathcal{L}_A) \Leftarrow n - rg(A)$ parametri

Idea dim.

Sia w_0 sol. particolare

cioè $A \cdot w_0 = b$

Sia X una soluzione

$$A \cdot X = b = A \cdot w_0$$

cioè $A \cdot X - A \cdot w_0 = 0$

$$\overset{\shortparallel}{A \cdot (X - w_0)}$$

Quindi : $v = X - w_0 \in \mathrm{Ker}$

&

$$X = w_0 + v$$

$\square$