Applicazioni lineari
&
MATRICI

Una matrice è una tabella rettangolare di numeri

$$A = (a_{ij})$$

i = INDICE di riga

j = INDICE di colonna

A matrice $k \times n$

k righe

n colonne

$$A = \begin{array}{c} \\ \\ i \rightarrow \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots & & a_{1n} \\ & a_{21} & & a_{2n} \\ & & a_{ij} & \vdots \\ & \vdots & & \\ & a_{k1} & \cdots \cdots & a_{kn} \end{pmatrix} \\ \qquad\qquad \uparrow \\ \qquad\qquad j \end{array}$$

Data $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$

lineare

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ | \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n \\ | \\ a_{k1}x_1 + \ldots + a_{kn}x_n \end{pmatrix}$$

FISSATE $\boxed{\text{BASI CANONICHE}}$

in PARTENZA & ARRIVO :

Matrice associata ad f rispetto alle basi canoniche è

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ | & & \\ a_{k1} & \ldots & a_{kn} \end{pmatrix}$$

gli stessi coeff. di f

Esempio

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1 - x_2 \\ 2x_1 + 5x_2 \\ -x_1 - 2x_2 \end{pmatrix}$$

↳ matrice associata ad f rispetto basi canoniche

è

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$ metrice 3×2

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{colonne 1}} \qquad \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{colonna 2}}$$

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Span}(\text{colonne di } A)$$

$$= \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}\right)$$

$\underline{\dim = 2} = rg(f)$

VICEVERSA:

Data una matrice A $k \times n$ possiamo costruire un'applicazione lineare $\mathcal{L}_A$

$$\mathcal{L}_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$$

$\mathcal{L}_A$ definita nel seguente modo:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kn} \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{L}_A\begin{pmatrix} x_1 \\ | \\ x_n \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ | \\ x_n \end{pmatrix} \stackrel{def}{=}$$

$$\stackrel{def.}{=} \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n \\ | \qquad\qquad | \\ a_{k1}x_1 + \ldots + a_{kn}x_n \end{pmatrix}$$

prodotto MATRICE x vettore

ESEMPI

1

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$$ matrice 2×2

$$\mathcal{L}_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

$$\mathcal{L}_A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 + 5x_2 \\ 1 \cdot x_1 + 7x_2 \end{pmatrix}$$

2

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

matrice 2×3

$$\mathcal{L}_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$$

$$f_A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x_1+3x_2+2x_3 \\ x_2+8x_3 \end{pmatrix}$$

Abbiamo bigezione $A \longleftrightarrow f_A = f$

Teorema. Data $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ lineare. ALLORA

$\exists$ unica matrice A $k \times n$

tale che $f = \mathcal{L}_A$

Più precisamente

i) $f \longmapsto A$

$A =$ matrice associata ad f rispetto basi canoniche

ii) $\mathcal{L}_A \longleftarrow A$

$\mathcal{L}_A$ applicaz. indotta

Le due applicazioni sono una l'inversa dell'altra

CONSEGUENZE

Data $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$

Sia A = matrice associata ad f rispetto basi canoniche

ALLORA:

i) $Im(f) = Span(\text{colonne di } A)$

ii) $Ker(f) \Longleftrightarrow$ risolvere

$$A \cdot X = 0_v$$

Vi RICORDO:

RANGO di f $\underline{\underline{\text{def.}}}$ $= \dim(\mathrm{Im}(f))$

NOTAZIONE: $rg(f)$

oppure $rk(f)$

DEF. A matrice $k \times n$

il **RANGO di A**

è = rango di L_A

OVVERO:

$$rg(A) =$$

$$= \dim\left(\text{Span}(\text{colonne di } A)\right)$$

= max numero di vettori colonne di A lin. IND.

N.B. $\dim(\mathrm{Im}) \leq \min\{k, n\}$

QUINDI:

A matrice $k \times n$

$$\Downarrow$$

$$\mathrm{rg}(A) \leq \min\{k, n\}$$

Esempi:

- $A \quad 2\times 3 \qquad 2$ righe $\quad 3$ colonne

$$\Downarrow$$

$$rg(A) \leq 2 = \min\{2,3\}$$

- $A \quad 5\times 3 \implies rg(A) \leq 3$

ESERCIZI

1) $\exists\, f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ surgettiva

RISPOSTA: FALSA

$$rg(f) \leq 3 < 4 \implies$$

$$\mathrm{Im}(f) \subsetneq \mathbb{R}^4$$

cioè f non può essere surgettiva

(2) $\exists\, f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ iniettiva

RISPOSTA: VERA

Esempio:

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(3) $\exists\, f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ iniettiva

RISPOSTA: FALSA

$rg(f) \leq 2$

Per il teorema della dimensione

$$\dim(Ker(f)) = 3 - rg(f) \geq 1$$

$\Rightarrow Ker(f) \neq \{0\} \Rightarrow f$ non è iniettiva

4) $\exists \; f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

t.c. $\dim(Ker(f)) = \dim(Im(f))$?

RISPOSTA: FALSA

Teo. dimensione:

$$\boxed{3 = \dim(Im) + \dim(Ker)}$$

Se $\dim(Im) = \dim(Ker)$

allora $\dim(\text{DOMINIO})$ è PARI

poiché dim è un numero intero

5 Data A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 5 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 7 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 8 & 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad 3 \times 7$$

calcolare : $rg(A)$, $\dim(\ker(L_A))$

Sol. A matrice 3×7

$$L_A : \mathbb{R}^7 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$\Rightarrow \quad 7 = \dim(\ker) + rg(A)$

A 3×7 $\Rightarrow$ $rg(A) \leq 3 = \min\{3, 7\}$

$rg(A) = 3$ se trovo 3 vettori colonna lin. IND.

$$\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{matrix}} & \begin{matrix} 5 & 3 & 1 & 1 \\ 7 & 2 & 1 & 1 \\ 8 & 4 & 2 & 0 \end{matrix} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$ sono lin. IND.

poiché $\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

CONCLUSIONE:

- $rg(A) = 3$
- $\dim(\operatorname{Ker}(L_A)) = 7 - 3 = 4$

⑥ Data A la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 4 & 6 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

matrice 3×5

calcolare : $rg(A)$, $\dim(\ker(\mathcal{L}_A))$

SOL. A matrice 3×5

$$\mathcal{L}_A : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$$

$$5 = \dim(\ker(\mathcal{L}_A)) + rg(A)$$

$$rg(A) \leq \min\{3, 5\} = 3$$

Le colonne 1, 2 sono lin. IND.

$$\longrightarrow \quad rg(A) \geq 2$$

$$\begin{array}{ccccc} \multicolumn{5}{c}{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 4 & 6 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}} \\ \multicolumn{2}{c}{\underbrace{\qquad\qquad}_{\text{lin. IND.}}} & 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} & 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} & 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\Rightarrow \text{Span}(\text{colonne di } A) = \text{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

conclusione:

- $rg(A) = 2$
- $\dim(\text{Ker}(L_A)) = 5 - rg(A)$

$$= 5 - 2 = 3$$

7 Data A matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$ matrice 5×2

Calcolare $rg(A)$, $\dim(Ker(L_A))$

<u>Sol.</u> A matrice 5×2

$$L_A : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^5$$

$$2 = \dim(Ker(L_A)) + rg(A)$$

$$rg(A) \leq \min\{2, 5\} = 2$$

- I 2 vettori colonne sono lin. IND. $\Rightarrow rg(A) = 2$

- $\dim(\mathrm{Ker}(\mathcal{L}_A)) = 2 - 2 = 0$

8 Determinare matrice associata rispetto BASE CANONICA alla funzione lineare $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineare t.c.

$$f\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix} \quad ; \quad f\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\5\\2\end{pmatrix}$$

$$f\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\8\\4\end{pmatrix}$$

SOL.

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

$$\Updownarrow$$

A matrice 3×3

colonna 1 $= f\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

colonna 2 $= f\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$

colonna 3 $= f\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

nostre informazioni: f lineare t.c.

$$f\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix} \quad ; \quad f\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\5\\2\end{pmatrix}$$

$$f\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\8\\4\end{pmatrix}$$

colonna 1 = $f\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \Rightarrow$ Lo vogliamo esprimere mediante i tre vettori

$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}$$

$\underline{f \text{ lineare}} \Rightarrow$

$$f\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = -f\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + f\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$= -\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3\\5\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\4\\0\end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$ vogliamo esprimerlo mediante i 3 vettori

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

f lineare $\Rightarrow$

$$f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} f\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= -\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

conclusione: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

9 Determinare un' applicazione lineare $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ t.c.

$$\operatorname{Im}(f) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle \quad ; \quad \operatorname{Ker}(f) = \left\langle \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Sol.

$$\dim(\operatorname{Im}(f)) = \operatorname{rg}(f) = \underline{1}$$

$$\dim(\operatorname{Ker}(f)) = \underline{1}$$

$$1+1 = 2 = \dim(\mathbb{R}^2)$$

$$\Rightarrow \exists f.$$

Determinare f $\Leftrightarrow$ determinare A matrice 2×2

$$\mathrm{Im}(f) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\Updownarrow$$

Le colonne di A sono multiple di $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 3\alpha & 3\beta \end{pmatrix}$$

Per semplificare il calcolo poniamo $\alpha = 1$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 3 & 3\beta \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{gathered} \mathrm{Ker}(f) = \left\langle \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle \\ \Updownarrow \\ f\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Updownarrow \\ A \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{gathered}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 3 & 3\beta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 \cdot 5 + \beta \cdot 2 = 0 \\ 3 \cdot 5 + 3\beta \cdot 2 = 0 \end{cases}$$

$eq(2) = 3 \cdot eq(1)$ $\qquad \beta = -\frac{5}{2}$

SOLUZIONE:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{5}{2} \\ 3 & -\frac{15}{2} \end{pmatrix}$$

ovvero

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - \frac{5}{2} x_2 \\ 3x_1 - \frac{15}{2} x_2 \end{pmatrix}$$

---

10 Determinare $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lineare t.c.

$$\mathrm{Im}(f) = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\mathrm{Ker}(f) = \{ x_1 + 3x_2 = 0 \}$$

Sol. $f \longleftrightarrow A \quad 2 \times 2$

$\mathrm{Im}(f) = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \Rightarrow$ colonne di A sono multiple di $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} 2\alpha & 2\beta \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}$$

Proviamo a porre $\alpha = 1$ per semplificare i calcoli

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2\beta \\ 1 & \beta \end{pmatrix}$$

$$\Updownarrow$$

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 + 2\beta x_2 \\ x_1 + \beta x_2 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Ker}(f) = \{ \; x_1 + 3x_2 = 0 \; \}$$

$$\Downarrow$$

Le 2 equazioni che esprimono f devono essere multiple di $\boxed{x_1 + 3x_2}$

$$\begin{pmatrix} 2x_1 & + 2\beta x_2 \\ x_1 & + \beta x_2 \end{pmatrix}$$

multiple

equivalentemente:

Le righe della matrice A devono essere multiple della riga dei coeff. dell'equazione del Ker(f): $\begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix}$

LE RIGHE

$$\begin{pmatrix} 2 & 2\beta \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \beta \end{pmatrix}$$

sono multiple di $\begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix}$

$$\iff \quad \beta = 3$$

conclusione:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 + 6x_2 \\ x_1 + 3x_2 \end{pmatrix}$$

SOLUZIONE veloce:

inserisco colonna $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

riga $\begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 2 & * \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$*$ lo trovo con la condizione

$rg(A) = 1$: $* = 6$

11 Data $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 + 5x_2 \\ 3x_2 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix}$$

i) determinare BASE di $Im(f)$

ii) determinare $W \subset \mathbb{R}^3$ t.c.

$$W \oplus Im(f) = \mathbb{R}^3$$

Sol. A matrice associata ad f rispetto BASI canoniche

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$ matrice 3×2

$Im(f) = $ Span (colonne di A)

$$= \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

I due vettori sono lin. IND.

$\Rightarrow$ costituiscono una BASE di $Im(f)$

In particolare $\dim(Im(f)) = 2$

OVVERO : $Im(f) =$ PIANO $\subset \mathbb{R}^3$

(ii) $\dim(Im(f)) = 2$

$\Rightarrow$ Per avere $\mathbb{R}^3 = W \oplus \mathrm{Im}(f)$

condizione necessaria

$\dim(W) = \underline{1}$

Poiché deve essere $3 = 2 + 1$

- Dobbiamo scegliere W

t.c. (A) $W \cap \mathrm{Im}(f) = \{0_V\}$

<u>equivalentemente</u>

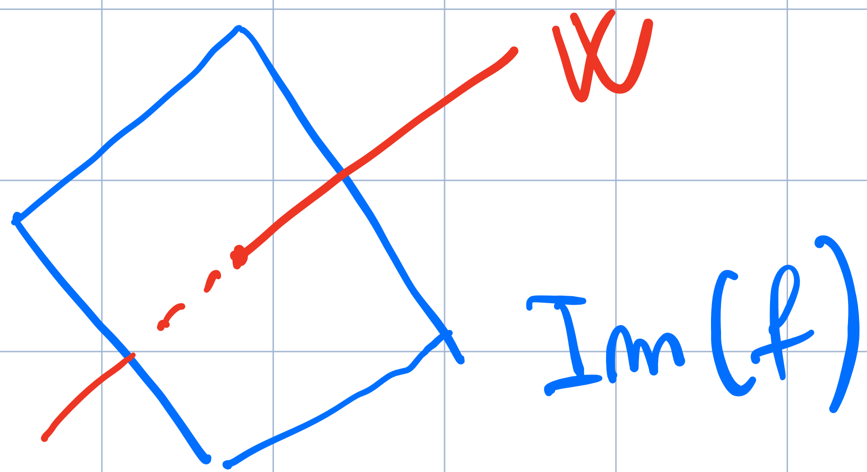
(B) Se $\{w\}$ è BASE di W

cioè $W = \langle w \rangle$

allora

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, w$$

costituiscono BASE di $\mathbb{R}^3$



$\exists \ \infty$ scelte per W

Cerchiamo w tra i vettori BASE canonica

Ad esempio $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}}_{Im(f)}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{W}$$

Sono lin IND.

$\Rightarrow$ costituiscono BASE di $\mathbb{R}^3$

Quindi $Im(f) \oplus W = \mathbb{R}^3$

12 Sia $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 + 2x_2 + x_3 \\ x_1 - x_2 + x_3 \\ 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 \end{pmatrix}$$

i) Determinare BASE $Ker(f)$,

BASE di $Im(f)$

ii) Dire se $\mathbb{R}^3 = Ker(f) \oplus Im(f)$

Sol. $f \Leftrightarrow A$ matrice 3×3

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$Im(f) = Span(\text{colonne di } A)$

oss: Calcolare Indipendenza/dip. ci mette è equivalente a calcolare $Ker(f)$

$$Ker(f): \begin{pmatrix} 2x_1 + 2x_2 + x_3 \\ x_1 - x_2 + x_3 \\ 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

Alg. di Gauss: $eq(2) - \frac{1}{2} eq(1)$

$eq(3) - eq(1)$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ -2x_2 + \frac{1}{2}x_3 = 0 \\ -4x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

$eq(3) = \frac{1}{2} eq(2)$:

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ -2x_2 + \frac{1}{2}x_3 = 0 \end{cases}$$

sol: $x_2 = t$ per.

$x_3 = 4t$

$x_1 = \frac{1}{2}\left(-2x_2 - x_3\right) = -3t$

BASE $\ker = \left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$

Questo calcolo: $\dim(\ker) = 1$

QUINDI:

$$\dim(\mathrm{Im}(f)) = 3 - 1 = 2$$

Matrice A associata ad f:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

sono lin. DIP.

I primi 2 vettori sono Ind.

Quindi

BASE di $Im(f) = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$

(ii) $\mathbb{R}^3 = Ker(f) \oplus Im(f)$

$$\Updownarrow$$

$\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

BASE di $\mathbb{R}^3$