# MATRICI & APPLICAZIONI LINEARI

## MATRICE ASSOCIATA ad un' applicazione lineare

$V, W$ spazi vettoriali su $\mathbb{K}$

$f : V \to W$ lineare

FISSIAMO BASE in PARTENZA
BASE in ARRIVO

$\dim(V) = n$

$\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ BASE di $V$

$\dim(W) = k$

$\mathcal{B}' = \{w_1, \dots, w_k\}$ BASE di $W$

Prendiamo il primo vettore della base $\mathcal{B}$ di $V$ : $v_1$

calcoliamo $f(v_1)$ : $f(v_1) \in W$

$\Rightarrow$ lo esprimiamo mediante la base $\mathcal{B}'$ di $W$

$f(v_1)$ = combinazione lineare di $w_1, \dots, w_k$

$$f(v_1) = a_{11} w_1 + a_{21} w_2 + \ldots + a_{k1} w_k$$

QUESTI COEFFICIENTI FORMANO LA PRIMA COLONNA della matrice

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots \\ a_{21} & \\ \vdots & \\ a_{k1} & \ldots \end{pmatrix}$$

---

consideriamo SECONDO vettore di $B = v_2$

CALCOLIAMO $f(v_2)$:

$f(v_2) \in W \Rightarrow$ lo esprimo

mediante BASE $\mathcal{B}'$ di $W$:

$$f(v_2) = a_{12} w_1 + a_{22} w_2 + \_ + a_{k2} w_k$$

Questi coefficienti formano la colonna 2 della matrice

$$\begin{pmatrix} & a_{12} & \\ & a_{22} & \\ & | & \\ & a_{k2} & \end{pmatrix}$$

- Ripetiamo questo procedimento per tutti i vettori della BASE $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ di $V$

PROCEDIAMO COSÌ anche per $v_3, \dots, v_n$:

$f(v_3) \Longleftrightarrow$ colonna 3

$\vdots$ ecc...

$$f(v_n) = a_{1n} w_1 + a_{2n} w_2 + \dots + a_{kn} w_k$$

Questi coefficienti formano colonna $n$ della matrice

# CONCLUSIONE

$V \quad \dim = n$

$W \quad \dim = K$

$f : V \to W$ lineare

fissate BASI $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ di $V$

$\mathcal{B}' = \{w_1, \dots, w_K\}$ di $W$

ALLORA:

Alla TERNA $[f, \mathcal{B}, \mathcal{B}']$ si associa una MATRICE $A$:

A matrice $K \times n$

$\parallel$

K righe

n colonne

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{K1} & a_{K2} & \cdots & a_{Kn} \end{pmatrix}$$

$$A = \left( a_{ij} \right)$$

$i$ = INDICE DI RIGA

$j$ = INDICE DI COLONNA

$$A = \begin{pmatrix} & \boxed{a_{ij}} & \end{pmatrix}$$

riga $i$

colonna $j$

---

## ESEMPIO FONDAMENTALE

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ lineare

consideriamo BASI CANONICHE

in partenza e arrivo

$$\mathcal{B} = \Bigg\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, }_{n} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Bigg\} n$$

$$\mathcal{B}' = \Bigg\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{k} \Bigg\} k$$

$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^k$$

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ | \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ | \qquad\qquad\qquad | \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n \end{pmatrix}$$

FISSATE LE BASI CANONICHE

$f \rightsquigarrow$ MATRICE $A_{K \times m}$

K righe

m colonne

ottenute cancellando le incognite $x_i$ & simboli +

$$\begin{pmatrix} a_{11}\cancel{x_1 +} & a_{12}\cancel{x_2 +} & \_ + a_{1m}\cancel{x_m} \\ a_{21}\cancel{x_1 +} & a_{22}\cancel{x_2 +} & \_ + a_{2m}\cancel{x_m} \\ \vert & & \\ a_{K1}\cancel{x_1 +} & a_{K2}\cancel{x_2 +} & \_ + a_{Km}\cancel{x_m} \end{pmatrix}$$

$\Downarrow$

SI OTTIENE

matrice A K x m

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix}$$

Spiegazione:

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}\cdot 1 + \underbrace{a_{12}\cdot 0 + \dots + a_{1n}\cdot 0}_{0} \\ \vdots \\ a_{k1}\cdot 1 + a_{k2}\cdot 0 + \dots a_{kn}\cdot 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{k1} \end{pmatrix} \hookrightarrow \text{colonna 1 di } A$$

$$= a_{11} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + a_{21} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \_ + a_{k1} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

combinazione lineare della base di $\mathbb{R}^k$

ANALOGAMENTE:

$$f \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overbrace{a_{11} \cdot 0}^{0} + a_{12} \cdot 1 + \overbrace{\text{—} \ 0}^{0} \\ \vdots \\ a_{k1} \cdot 0 + a_{k2} \cdot 1 + \text{—} \ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{12} \\ | \\ a_{k2} \end{pmatrix} \rightsquigarrow \text{colonna 2 di } A$$

eccetera ....

In generale: Se scriviamo la base canonica di $\mathbb{R}^n$

$$\mathcal{B} = \{ e_1, e_2, \dots, e_n \}$$

DOVE: $e_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow j$

1 al posto j
0 altrimenti

ALLORA:

$$f(e_j) =$$

$$= f\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow j = f(\text{j-mo vettore base canonica di } \mathbb{R}^n)$$

= colonna j di A

In particolare:

$$\mathrm{Im}(f) = \left\langle f\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \dots, f\begin{pmatrix}0\\\vdots\\1\end{pmatrix}\right\rangle$$

$$= \mathrm{Span}(\text{colonne di } A)$$

Esempio 1 $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x_1 - 4x_2 + 7x_3 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 \end{pmatrix}$$

MATRICE ASSOCIATA A ad

$f$ rispetto alle BASI

CANONICHE di $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$

$\bar{e}$

$A$ = matrice $2 \times 3$

2 RIGHE, 3 COLONNE

$$f = \begin{pmatrix} 5\cancel{x_1} - 4\cancel{x_2} \cancel{+} 7\cancel{x_3} \\ 3\cancel{x_1} \cancel{+} 2\cancel{x_2} \cancel{+} x_3 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 7 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$f\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\cdot 1 & -4\cdot 0 + & 7\cdot 0\\ 3\cdot 1 & +2\cdot 0 & +1\cdot 0\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix} = \text{colonne } 1 \text{ di } A$$

$$f\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4\\2\end{pmatrix} = \text{colonne } 2 \text{ di } A$$

$$f\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7\\1\end{pmatrix} = \text{colonne } 3 \text{ di } A$$

$\mathrm{Im}\, f = \langle$ colonne di $A \rangle$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

DOVE:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 7 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$ matrice $2 \times 3$

## Esempio 2

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 5x_1 - 3x_2 \\ 8x_1 \\ 2x_1 + 4x_2 \end{pmatrix}$$

Consideriamo BASI CANONICHE

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$ BASE in partenza

$$\mathcal{B}' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$ BASE in arrivo

- $$f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix} =$$

$$= 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 8 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

↳ colonna 1 di $A = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}$

- $$f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} =$$

$$= -3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\rightsquigarrow$ colonne 2 di $A = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

CONCLUSIONE:

Data $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x_1 - 3x_2 \\ 8x_1 \\ 2x_1 + 4x_2 \end{pmatrix}$$

ALLORA: MATRICE A ASSOCIATA ad f rispetto alle BASI CANONICHE è

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 8 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

matrice $3 \times 2$

3 righe

2 colonne

$$f = \begin{pmatrix} 5x_1 - 3x_2 \\ 8x_1 \\ 2x_1 + 4x_2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow A = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 8 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{pmatrix} 5\cancel{x_1} - 3\cancel{x_2} \\ 8\cancel{x_1} \quad 0 \\ 2\cancel{x_1} \cancel{+} 4\cancel{x_2} \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{Im}(f) = \left\langle \underset{f\binom{1}{0}}{\underset{\parallel}{\begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}}}, \underset{f\binom{0}{1}}{\underset{\parallel}{\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}}} \right\rangle \subset \mathbb{R}^3$$

## Esempio 3

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 4x_1 - x_3 \\ 5x_2 \\ 2x_1 - 3x_2 + 8x_3 \end{pmatrix}$$

$\mathcal{B} = \mathcal{B}'$ BASE canonica di $\mathbb{R}^3$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

MATRICE A associata ad f rispetto a $\underbrace{\mathcal{B} = \mathcal{B}'}_{\text{base canonica}}$

è :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 2 & -3 & 8 \end{pmatrix}$$

matrice $3 \times 3$

---

MATRICE IDENTITA'

$\updownarrow$

matrice associata all' applicazione identità id

$id : V \longrightarrow V$

$v \longmapsto v$

caso $V = \mathbb{R}^3$

$$id : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \qquad \text{applicazione identità}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Id matrice associata all'applicazione id

$$Id = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

matrice identità $3 \times 3$

In generale:
matrice identità $n \times n$

$$I_d = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$

1 sulla diagonale
0 fuori dalla diagonale

4.

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \longmapsto 5x_1 - x_2 + 6x_3$$

$f \longleftrightarrow$ matrice $A$ $(1 \times 3)$

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 6 \end{pmatrix}$$

1 riga

3 colonne

5.

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$$
$$t \mapsto \begin{pmatrix} 2t \\ 5t \\ 6t \end{pmatrix}$$

$f \leftrightarrow$ matrice $A$ $(3 \times 1)$

$$A = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

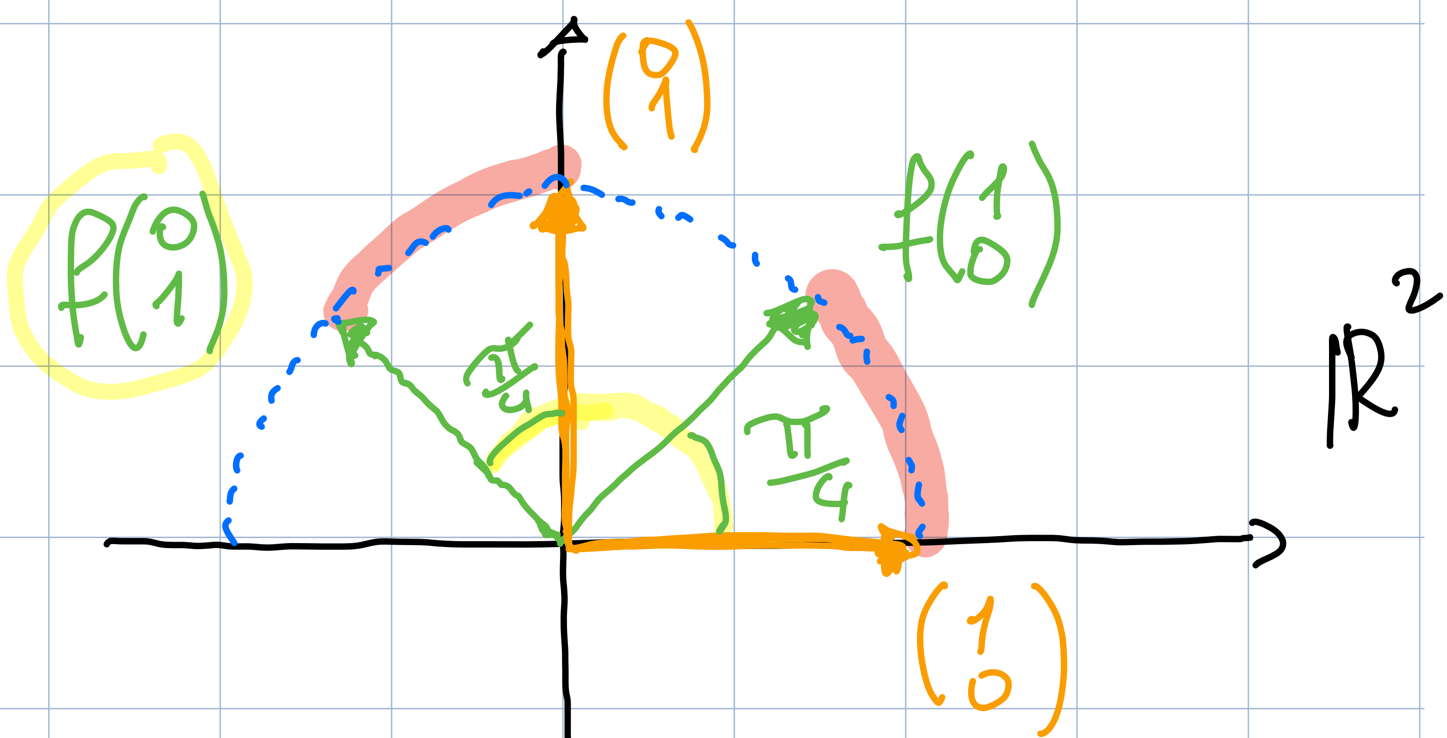
3 righe

1 colonna

# ALTRI ESEMPI

⑥ $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

ROTAZIONE di $\frac{\pi}{4}$ rispetto origine




Consideriamo $\mathcal{B} = \mathcal{B}' =$ base canonica

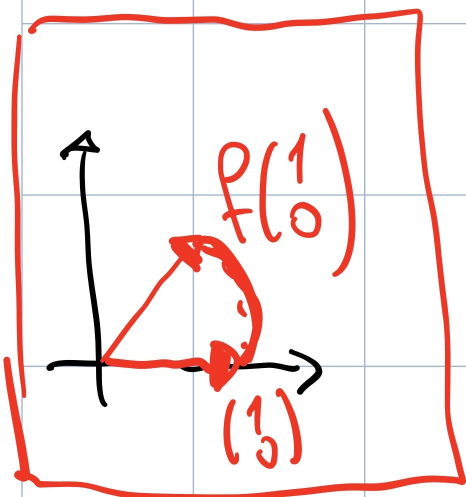
$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

COSTRUZIONE matrice associata ad $f$

colonna $\underline{1}$ di $A$

$\updownarrow$

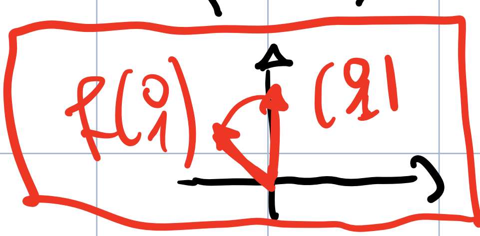
$f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ = rotazione di $\frac{\pi}{4}$ di $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$




$$= \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{4} \\ \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} \end{pmatrix}$$

COLONNA 2 di $A$:

$$f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \\ \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \end{pmatrix}$$



CONCLUSIONE:

MATRICE associata a

$f$ = rotazione di $\frac{\pi}{4}$

rispetto BASE canonica è:

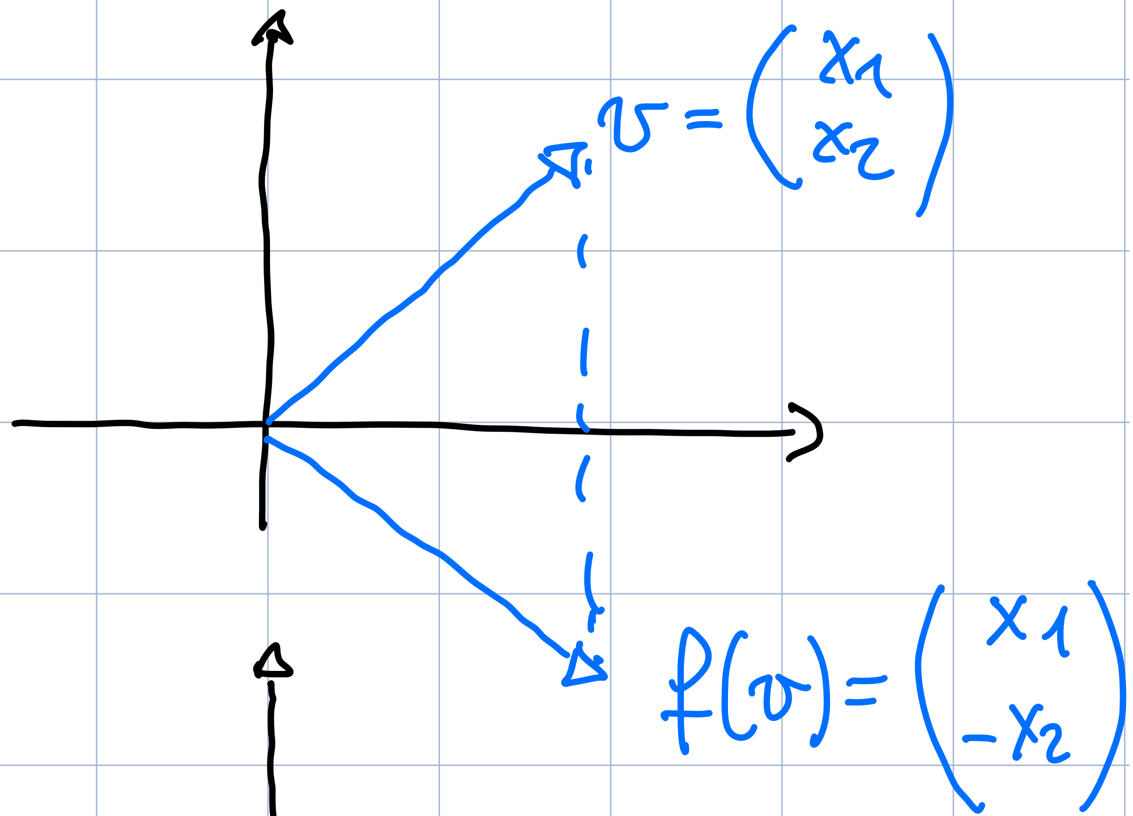
$$A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

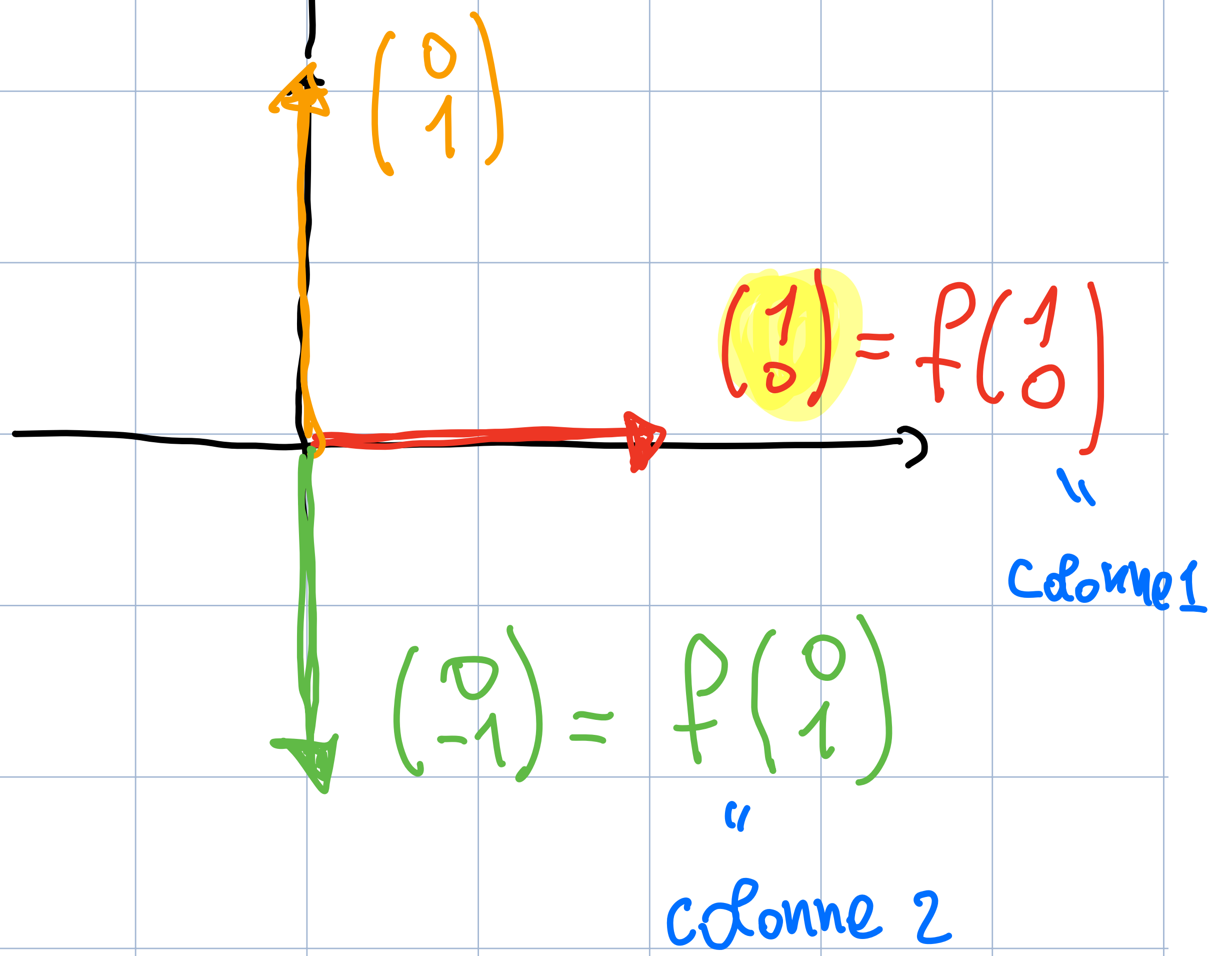
$f\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ $\qquad$ $f\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

Esempio 7

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

simmetria rispetto asse delle ASCISSE




Conclusione :

matrice $A$ associata ad $f$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

simmetria rispetto asse ascisse

In alternativa :

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 0x_2 \\ 0x_1 - x_2 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

CASO in cui

le basi sono diverse

rispetto base canonica

**Esempio**

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 3x_1 + x_2 \\ x_1 + 3x_2 \end{pmatrix}$$

Prendiamo $\mathcal{B} = \mathcal{B}' = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{v_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{v_2} \right\}$

vogliamo costruire matrice associata ad $f$ rispetto a $\mathcal{B}$

$$f(v_1) = f\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\cdot 1 + 1\cdot 1\\ 1\cdot 1 + 3\cdot 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix}$$

$$= 4\cdot\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}$$

$\shortparallel$

colonna 1 della matrice rispetto BASE $\mathcal{B}$

$$f(v_2) = f\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\cdot(-1) + 1\cdot 1\\ 1\cdot(-1) + 3\cdot 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix}$$

$$= 0\cdot\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + 2\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ = colonna 2 della matrice rispetto BASE $\mathcal{B}$

---

**CONCLUSIONE!**

Matrice associata a

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1 + x_2 \\ x_1 + 3x_2 \end{pmatrix}$$

rispetto alla base

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

in partenza & arrivo

è

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

<u>oss.</u> Matrice associata alla stessa $f$ rispetto base canonica $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$ è

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ & $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ rappresentano la stessa funzione

<u>MA</u>

rispetto a 2 sistemi di riferimento diversi

## Esercizio

Determinare matrice associata a $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lineare

rispetto BASE CANONICA in partenza & arrivo

di $f$ t.c.

$$f\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$$

$$f\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix}$$

**SOL.**

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$\hookrightarrow$ $A$ matrice $2 \times 2$

RISPETTO alla BASE CANONICA:

$f\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ per ipotesi $\Rightarrow$ colonna 1 $= \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$

$$\Longrightarrow \qquad A = \begin{pmatrix}2 & a\\1 & b\end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ = colonna 2 di $A = f\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

Quindi dobbiamo calcolare $f\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

Le info a nostra disposizione sono: $f$ lineare t.c.

$$f\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$$

$$f\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \Rightarrow$$ Poiché $f$ lineare

$$\Rightarrow \quad f\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = f\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} - 3\cdot f\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$$

conclusione:

$$A = \begin{pmatrix}2 & -2\\1 & 1\end{pmatrix}$$

matrice associata ad $f$ rispetto alla base canonica

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}' = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

$$\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = f\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \text{colonna } 1$$

$$\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix} = f\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \text{colonna } 2$$

Esercizio ② Data $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lineare t.c.

$$f\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix} \quad , \quad f\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$$

determinare la matrice associata ad $f$ rispetto BASE CANONICA.

SOL. $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \Rightarrow$

matrice associata ad $f$ è 2×2

$$f\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix} = \text{colonna 2 di } A$$

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & -1 \\ \beta & 2 \end{pmatrix}$$

colonna 1 di $A = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Info:

$$f\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Esprimiamo $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ mediante $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \left[ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$ $\Rightarrow$ Per linearità

$$\Rightarrow f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot f\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \cdot f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Conclusione:

$$A = \begin{pmatrix} 5/2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\uparrow f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \uparrow f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

"VICEVERSA"

$\boxed{\text{matrice } A} \rightarrow \boxed{\text{applicazione lineare } \mathcal{L}_A}$

NOZIONE fondamentale

PRODOTTO $\boxed{\text{matrice} \times \text{vettore}}$

- $A$ matrice $k \times n$
  ($k$ righe, $n$ colonne)
- $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$

ALLORA: $A \cdot X \in \mathbb{R}^k$

è il vettore di $\mathbb{R}^k$
che si ottiene facendo
prodotto righe x colonne

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \cdots a_{kn}x_n \end{pmatrix}$$

Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

matrice $2 \times 3$

$$X = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 5 \cdot (-3) + 7 \cdot 1 \\ 2 \cdot 2 + 4 \cdot (-3) + 3 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -5 \end{pmatrix}$$

prodotto matrice x vettore

riga · colonna

## Teorema.

$A$ matrice $k \times n$

$\Downarrow$

$A$ induce appl. lineare

$$L_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^k$$
$$X \longmapsto A \cdot X$$

Esempi

1.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \end{pmatrix} \quad 2 \times 3$$

A induce appl. lineare

$$L_A : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$L_A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2x_1 + 5x_3 \\ 3x_1 + x_2 + 7x_3 \end{pmatrix}$$

2.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 6 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} \qquad 3 \times 2$$

A induce appl. lineare

$$\mathcal{L}_A : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\mathcal{L}_A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 6 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 + 5x_2 \\ 3x_1 + 6x_2 \\ 2x_1 + 8x_2 \end{pmatrix}$$

## Esercizio.

Determinare $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lineare

t.c.

$$Im(f) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$Ker(f) = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle$$

## SOL.

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

$$\Updownarrow$$

$A$ matrice $2 \times 2$

$$Im(f) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle \implies$$

Le colonne di $A$ sono multiple di $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

CIOÈ: $A = \begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ 2\alpha & 2\beta\end{pmatrix}$

$$\mathrm{Ker}(f) = \left\langle \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\Updownarrow$$

$$f\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$\Updownarrow$$

$$A \cdot \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 2\alpha & 2\beta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} 2\alpha + 3\beta = 0 \\ 4\alpha + 6\beta = 0 \end{cases}$$

$= 2 \cdot eq(1)$

$$\Updownarrow$$

$$2\alpha + 3\beta = 0$$

Abbiamo $\infty$ SOLUZIONI

$\beta = -\frac{2}{3}\alpha$ al variare di $\alpha$

Posto ad esempio $\alpha = 1$

si ha $\beta = -\frac{2}{3}$

QUINDI:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} \\ 2 & -\frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - \frac{2}{3} x_2 \\ 2x_1 - \frac{4}{3} x_2 \end{pmatrix}$$

Per CASA: Determinare una $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ t.c.

$$\mathrm{Im}(f) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\mathrm{Ker}(f) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

SOL. $\mathrm{Ker}(f) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

$$\Downarrow$$

$$f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

colonna 2 di $A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Una possibile matrice è $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

QUINDI:

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 2x_2 \end{pmatrix}$$