SOMMA di SOTTOSPAZI VETTORIALI

$W, Z \subset V$ sottospazi vettoriali

DEF. $W + Z = \left\{ w + z : \begin{array}{l} w \in W \\ z \in Z \end{array} \right\}$

somma di sottospazi vettoriali è somma di tutti i vettori di W con tutti i vettori di Z

Esempio: $V = \mathbb{R}^2$

$$W = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\{ \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$Z = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\{ \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

$$W + Z = \left\{ w + z : \begin{matrix} w \in W \\ z \in Z \end{matrix} \right\}$$

$$= \left\{ \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\} =$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle = \mathbb{R}^2$$

$\square$

caso particolare di:

PROP. $W, Z \subseteq V$

$$W = \langle w_1, \dots, w_s \rangle$$

$$Z = \langle z_1, \dots, z_r \rangle$$

$$\Rightarrow W + Z = \langle w_1, \dots, w_s, z_1, \dots, z_r \rangle$$

GENERATORI SOMMA = Unione dei generatori

N.B. La definizione di somma di sottospazi vett.

$\Downarrow$

$W + Z$ è un sottospazio vettoriale (per costruzione)

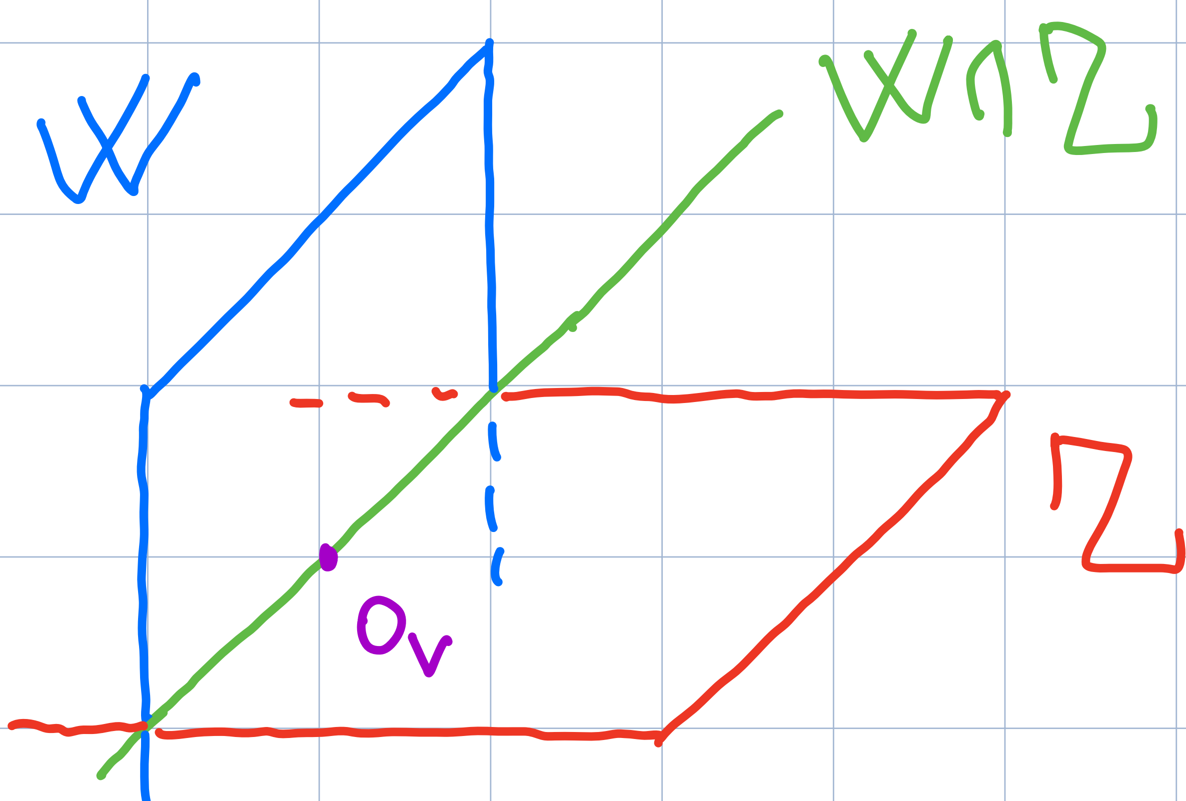
$\dim(W+Z) = ?$

TEOREMA (FORMULA di GRASSMANN)

W, Z sottosp. vettoriali di V
ALLORA:

$$\dim(W+Z) = \dim(W) + \dim(Z) - \dim(W \cap Z)$$

SPIEGAZIONE - esempio



$W, Z \subset \mathbb{R}^3$ $\quad W \neq Z$

$W =$ PIANO $\quad \underline{\dim = 2}$

$Z =$ PIANO $\quad \underline{\dim = 2}$

$W \cap Z =$ retta $\quad \underline{\dim = 1}$

$W + Z = \mathbb{R}^3 \quad \underline{\dim = 3}$

$\underline{\text{Teorema} \Rightarrow \quad 3 = 2 + 2 - 1}$

In questo caso

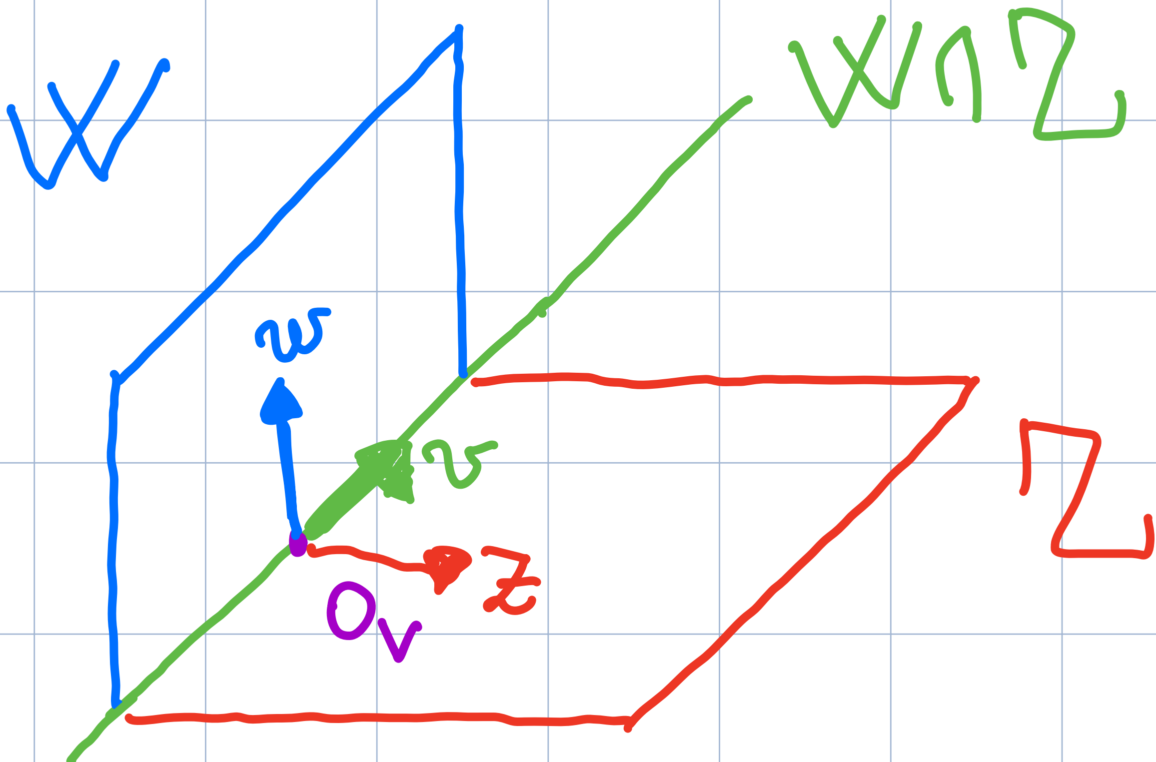
Come costruiamo base di $W+Z$?

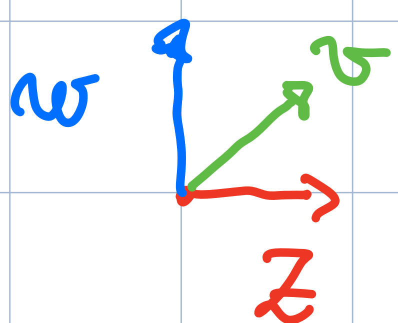
Partiamo da una base

di $W \cap Z = \{v\}$ e completiamo

ad una base di $W = \{v, w\}$

ad una base di $Z = \{v, z\}$





BASE di $W + Z = \mathbb{R}^3$

$\parallel$

$\{v, w, z\}$

In generale:

$$\dim(W) = s$$
$$\dim(Z) = r$$
$$\dim(W \cap Z) = p$$

Consideriamo BASE di $W \cap Z$

$= \{ v_1, \dots, v_p \}$

COMPLETIAMO ad una BASE di W

$\{ v_1, \dots, v_p, w_{p+1}, \dots, w_s \}$

COMPLETIAMO ad una BASE di Z

$$\{\underbrace{v_1, \dots, v_p}, \underbrace{z_{p+1}, \dots, z_r}\}$$

BASE di $W+Z$ è:

$$\{\underbrace{v_1, \dots, v_p}_{p}, \underbrace{w_{p+1}, \dots, w_s}_{s-p}, \underbrace{z_{p+1}, \dots, z_r}_{r-p}\}$$

$\dim(W+Z) =$ cardinalità di una base

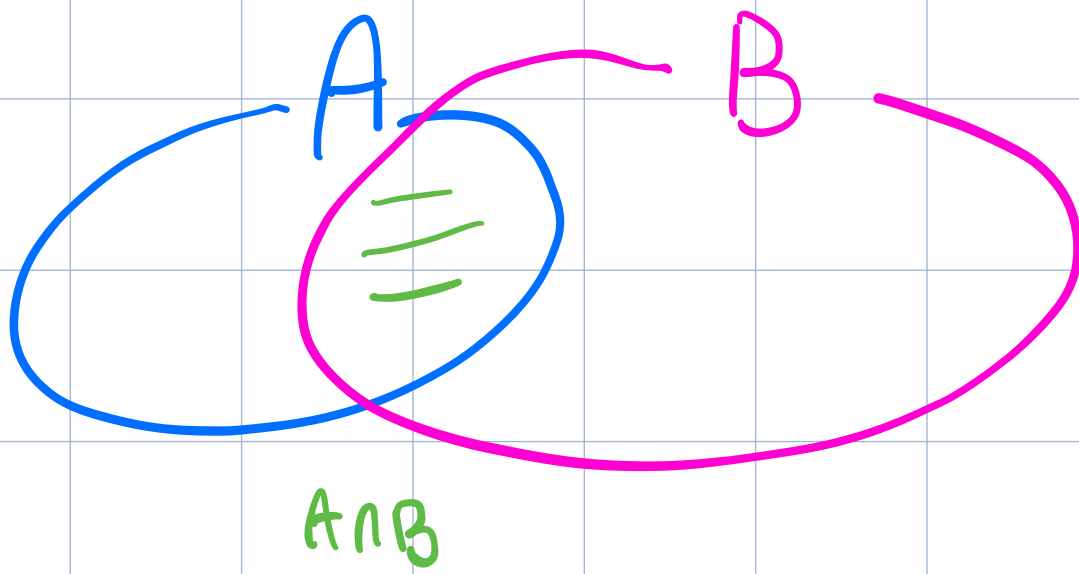
$$= p + (s-p) + (r-p)$$

$$= s + r - p$$

$$= \dim(W) + \dim(Z) - \dim(W \cap Z)$$

Dal punto di vista mnemonico:

In teoria degli insiemi



$$\#(A \cup B) = \#A + \#B - \#(A \cap B)$$

CASO PARTICOLARE:

$$W \cap Z = \{0_V\}$$

DEF. $W+Z$ si dice

SOMMA DIRETTA

SE

$$W \cap Z = \{0_V\}$$

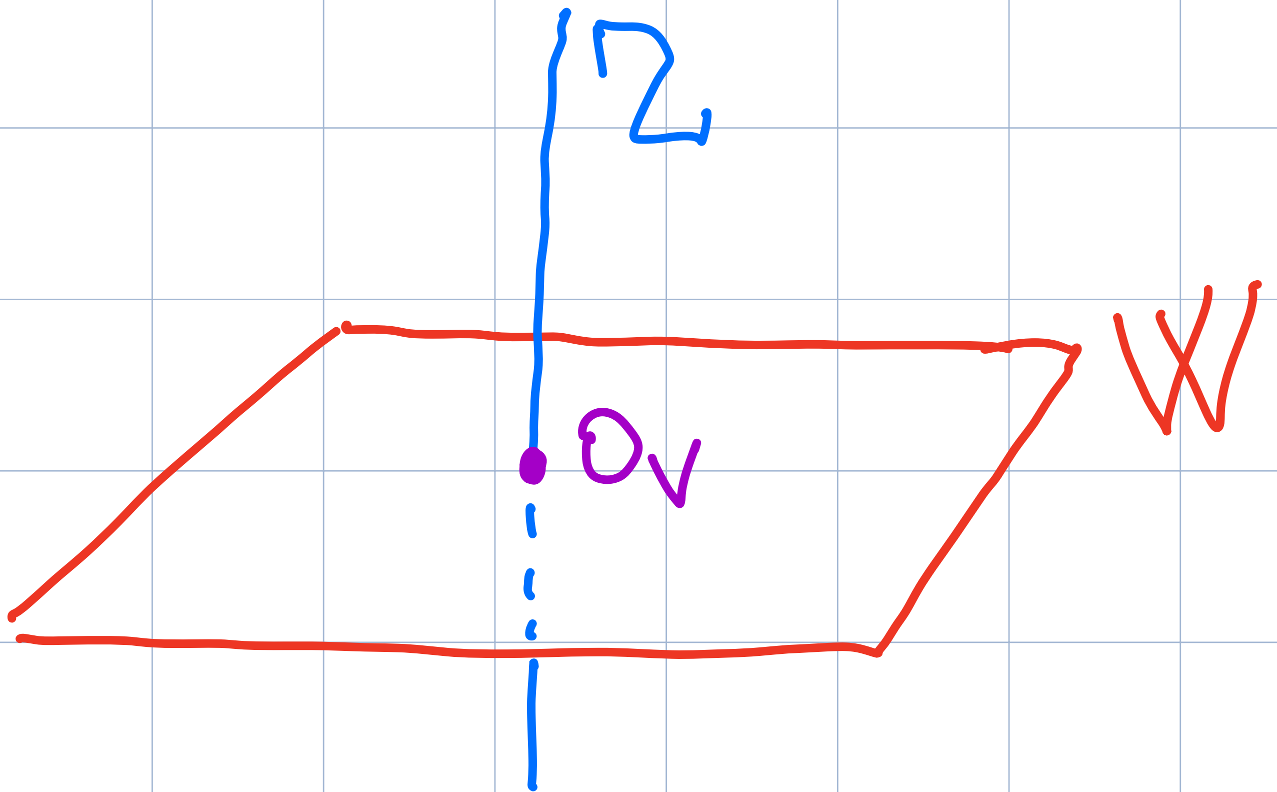
NOTAZIONE: $W \oplus Z$

ESEMPIO

$$V = \mathbb{R}^3$$

W = PIANO

Z = retta non contenuta in W

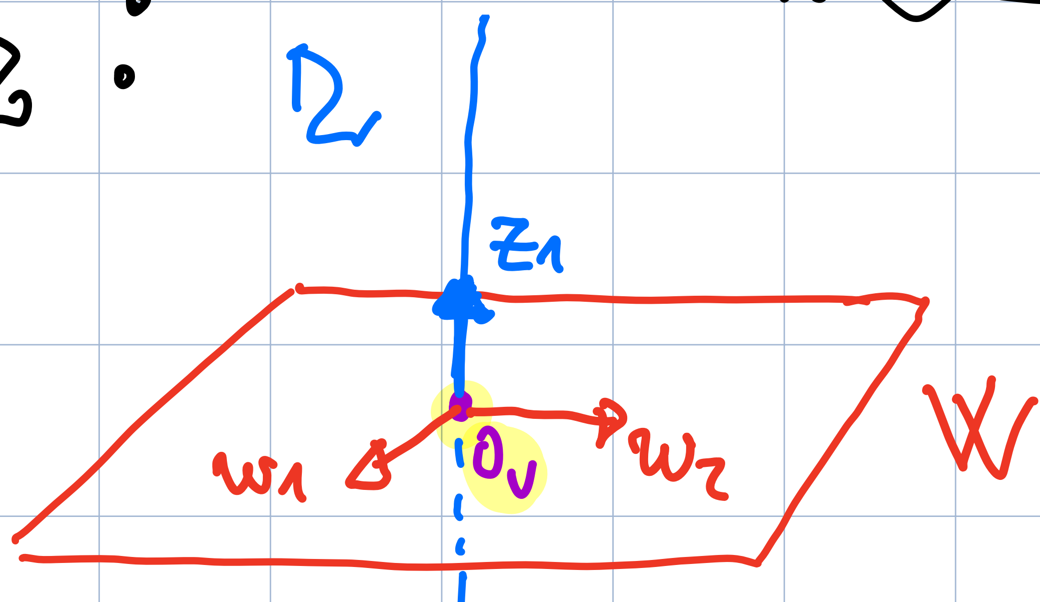


$\{0_V\} = Z \cap W \Rightarrow W + Z$ è somma diretta

e si scrive $W \oplus Z = \mathbb{R}^3$

BASE di $W \oplus Z$:

$W \oplus Z = \mathbb{R}^3$



$\{z_1\}$ BASE di Z

$\{w_1, w_2\}$ BASE di W

BASE di $W \oplus Z = \{z_1, w_1, w_2\}$

In generale:

$$\boxed{\begin{gathered} W \oplus Z = \mathbb{R}^n \\ \Updownarrow \\ \begin{cases} \dim(W) + \dim(Z) = n \\ W \cap Z = \{0_V\} \end{cases} \end{gathered}}$$

equivalentemente

$\{w_1, \ldots, w_s\}$ BASE di W

$\{z_1, \ldots, z_r\}$ BASE di Z

ALLORA: $W \oplus Z = \mathbb{R}^n$

$$\Updownarrow$$

$\{w_1, \ldots, w_s, z_1, \ldots, z_r\}$ BASE di $\mathbb{R}^n$

(in particolare: $\boxed{s + r = n}$)

N.B.: Quando negli esercizi si scrive

$$\boxed{W \oplus Z = \mathbb{R}^n}$$

$$\Updownarrow$$

- somma è diretta

&

- risultato è $= \mathbb{R}^n$

ESEMPI & CONTROESEMPI

1. $W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \subset \mathbb{R}^3$

$Z = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \subset \mathbb{R}^3$

$\dim(W) = 1 \qquad \text{Base} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$\dim(Z) = 2 \qquad \text{Base} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

$$W + Z = \left\langle \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}}_{Z}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{W} \right\rangle$$

generatori somma = Unione dei generatori

I 3 vettori sono lin IND.
(esercizio)

$\Longrightarrow$ Costituiscono BASE di $\mathbb{R}^3$

Pertanto: La somma è diretta

&

$$W \oplus Z = \mathbb{R}^3$$

---

2 $\quad W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \subset \mathbb{R}^3$

$$Z = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} : x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 0 \right\} \subset \mathbb{R}^3$$

$$W, Z \subset \mathbb{R}^3$$

$$\dim(W) = 1$$

$$\dim(Z) = \underbrace{3}_{\dim \mathbb{R}^3} - \underbrace{1}_{\#\ \text{equazioni}} = 2$$

Come calcolare $W \cap Z$:

$$W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$W : \begin{cases} x_1 = t = t \cdot 1 \\ x_2 = t = t \cdot 1 \\ x_3 = t = t \cdot 1 \end{cases}$$

SOSTITUIAMO questi valori di x_1, x_2, x_3 nell'eq. di Z

$$W \cap Z: \begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = t \\ x_3 = t \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases}$$

$$t + 3t + 5t = 0$$

$$9t = 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad t = 0$$

Quindi: $W \cap Z: \boxed{0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \{0_V\}}$

CIOE' LA SOMMA è
SOMMA diretta

e inoltre
poiché $\dim(\{0_V\}) = 0$

$$\dim(W) + \dim(Z) = 3$$

Conclusione:

$$W \oplus Z = \mathbb{R}^3$$

3

$$W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$Z = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} : x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \right\}$$

$$W = \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$W = \begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = 2t \\ x_3 = -t \end{cases}$$

$$W \cap Z = \begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 = t \\ x_2 = 2t \\ x_3 = -t \end{cases}$$

$W \cap Z$: $\quad t + 2t + 3(-t) = 0$

$$0 = 0$$

verificata $\forall t$

$$\Downarrow$$

$$W \subset Z$$

In questo caso:

$$W \cap Z = W$$
$$W + Z = Z$$

In particolare

$W + Z$ non è somma diretta

$$W + Z \subsetneq \mathbb{R}^3$$

$$W \cap Z = W$$
$$W + Z = Z$$

Formula di Grassmann:

$$\dim(W+Z) = \dim(W) + \dim(Z) - \dim(W \cap Z)$$

$$= 1 + 2 - 1 = 2$$

4

$$W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$Z = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$W + Z = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$W \cap Z$:

$$W = \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} ; Z = \left\{ s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

$$W \cap Z = \begin{cases} x_1 = t = 2s \\ x_2 = t = 0 \\ x_3 = t = 3s \end{cases}$$

$$\iff \begin{array}{l} t = 0 \\ s = 0 \end{array}$$

CIOÈ $\quad W \cap Z = \{ 0_V \}$

In questo caso

$W + Z$ è somma diretta

Però

$$W \oplus Z = \text{PIANO} \subsetneq \mathbb{R}^3$$

$\dim(W+Z) = 1+1-0=2$

5 $W = \left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} \right\rangle$

$Z = \{ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \}$

$W, Z \subset \mathbb{R}^3$

$\dim(W) = 2$ poiché $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$ sono lin. IND.

$$\dim(Z) = 3 - 1 = 2$$

$\dim(\mathbb{R}^3) - \#\ eq.$

N.B. $W, Z \subset \mathbb{R}^3$

$$\Downarrow$$

$$W + Z \subseteq \mathbb{R}^3$$

$$W : t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{cases} x_1 = t + 2s \\ x_2 = t \\ x_3 = t + s \end{cases}$$

$$W \cap Z : \begin{cases} x_1 = t + 2s \\ x_2 = t \\ x_3 = t + s \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

$$(t + 2s) - 2t + (t + s) = 0$$

$$3s = 0$$

sol. $\begin{cases} s = 0 \\ \forall\, t \end{cases}$

Conclusione: $W \cap Z = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Formula di Grassmann:

$$\dim(W+Z) = \underset{\dim(W)}{2} + \underset{\dim(Z)}{2} - \underset{\dim(W\cap Z)}{1}$$

OVVERO:

$$W+Z = \mathbb{R}^3$$

però la somma non è diretta