9/4/2020

Visto:

X varietà q.p.

$f: X \longrightarrow \mathbb{K}$

funzione regolare

se $X \subset \mathbb{A}^n$ X affine

f regolare $\Longleftrightarrow$ f polinomiale

MORFISMI

Def. X, Y varietà q.p.

$f : X \to Y$ si dice MORFISMO

SE

1) f è continua (risp. Top. di Zar.)

2) $\forall\ U \subseteq Y$ aperto & $\varphi : U \to \mathbb{K}$ regolare

$\varphi \circ f : f^{-1}(U) \to \mathbb{K}$ è regolare notazione:

$$\varphi \circ f = f^*(\varphi)$$

$$\varphi \in \mathcal{O}_Y(U) \mapsto f^*(\varphi) \in \mathcal{O}_X(f^{-1}(U))$$

<u>Def. 2</u> $f : X \to Y$ si dice

<u>ISOMORFISMO</u>

se f bigettiva

f morfismo

f^{-1} morfismo

<u>OSS. 1</u> $X \xrightarrow{f} Y$ morfismo

$Y \xrightarrow{g} Z$ morfismo

$\Longrightarrow$ $g \circ f$ morfismo

<u>OSS. 2</u> $X \subset Y$

allora $\iota : X \longrightarrow Y$

è un morfismo

mappa di inclusione

PROP. $X \subset \mathbb{P}^n$ ver. q.p.

$f : X \longrightarrow \mathbb{K}$ regolare

$\Updownarrow$

$f : X \longrightarrow \mathbb{K} = \mathbb{A}^1$ è morfismo

$\mathbb{K}$ campo = immagine di f regolare

$|||$

$\mathbb{A}^1$ = sp. affine di dim 1
= immagine di f morfismo

<u>dim</u>

$\Leftarrow$ f morfismo

consideriamo la funzione identità

$$id_{\mathbb{K}} : \mathbb{A}^1 \longrightarrow \mathbb{K} \equiv \mathbb{A}^1$$

allora $f = id_{\mathbb{K}} \circ f : X \longrightarrow \mathbb{K}$

è regolare

$\Rightarrow$ f regolare

1. f è continua

Sia $Z \subset \mathbb{A}^1 \equiv \mathbb{K}$ chiuso proprio

Esercizio. $Z = \bigcup$ finita di punti

$Z = \{Q_1, \dots, Q_n\}$

sufficiente: $f^{-1}(Q_i)$ chiuso in X

$\mathbb{A}^1 \longleftrightarrow \mathbb{K}$

$Q_i \longleftrightarrow \lambda_i$

f regolare $\Rightarrow \forall p \in X$

$\exists \; U_p \ni p \,,$

$A(x), B(x) \in \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]_d$

t.c. $f|_{\mathcal{U}_p} = \dfrac{A(x)}{B(x)}$

$B(x) \neq 0$ in $\mathcal{U}$

$\{\mathcal{U}_p\}_{p \in X}$ è ricoprimento aperto di X

$f^{-1}(Q_i)$ chiuso

$\Updownarrow$

$f^{-1}(Q_i) \cap \mathcal{U}_p$ chiuso in $\mathcal{U}_p$

(per Lemma: X è loc.$^{\text{nte}}$ chiuso)

$$f^{-1}(Q_i) \cap U =$$

$$= \{ x \in U : f(x) = \lambda_i \}$$

Ma $\quad f = \dfrac{A}{B} \qquad B \neq 0$

$$f(x) = \lambda_i \iff \lambda_i B - A = 0$$

CIOÈ

$$f^{-1}(Q_i) \cap U = V_{\mathbb{P}^n}(\lambda_i B - A) \cap U$$

chiuso in U

2. Sia $V \subseteq \mathbb{A}^1$ aperto

$g = \dfrac{p(t)}{q(t)}$ funzione regolare

Tesi: $g \circ f : X \longrightarrow \mathbb{K}$ è regolare

Dato $p \in f^{-1}(V) = U$

Consideriamo aperto $U_p \subseteq U$

t.c. $f|_{U_p} = \dfrac{A(x)}{B(x)}$ $B \neq 0$

$$g \circ f = \frac{p\left(\frac{A(x)}{B(x)}\right)}{q\left(\frac{A(x)}{B(x)}\right)}$$

omogeneizzando, se necessario

otteniamo

$$g \circ f = \frac{\overline{A}(x)}{\overline{B}(x)} \quad \text{in } V$$

con $\overline{B} \neq 0$

$\square$

__Teorema 1__ $X \subset \mathbb{P}^n$ varietà q.p.

$$f=(f_1,\dots,f_m): X \longrightarrow \mathbb{A}^m \text{ morfismo}$$

$$\Updownarrow$$

$$f_i \text{ funzioni regolari } \forall i$$

__dim__

$\Downarrow$ $\forall i=1,\dots,m$ consideriamo proiezione sulla componente i-ma

$$\pi_i : \mathbb{A}^m \longrightarrow \mathbb{K}$$
$$(x_1,\dots,x_m) \longmapsto x_i$$

π_i è funzione regolare

$\Rightarrow$ f_i = componente i-me di f

$= \pi_i \circ f$

regolare

$\Uparrow$ Sia $f = (f_1, \dots, f_m)$

f_i regolare $\forall i$

1. f continua

suff. considerare $Z = V(g)$

$g \in \mathbb{k}[x_1, \dots, x_m]$

Tesi: $f^{-1}(Z)$ chiuso in X

$$f^{-1}(Z) = \{x \in X : g \circ f(x) = 0\}$$

Ma $g \circ f = g(f_1, \ldots, f_m)$

= polinomio di funzioni regolari

$\Rightarrow$ $g \circ f = 0$ è un chiuso

2. Sia $V \subset \mathbb{A}^m$

consideriamo $\varphi \in \mathcal{O}_{\mathbb{A}^m}(V)$

$$\varphi = \frac{a(x_1, \dots, x_m)}{b(x_1, \dots, x_m)}$$

$$\varphi \circ f = \frac{a(f_1, \dots, f_m)}{b(f_1, \dots, f_m)}$$

come nella prop. precedente è funzione regolare su X

$\square$

COROLLARIO

$X \subset \mathbb{A}^n$ chiuso

$f : X \longrightarrow \mathbb{A}^m$ morfismo

$$\Updownarrow$$

$f = (f_1, \ldots, f_m)$

con f_i polinomi

corollario 2.

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, phantom, sloped, "\subseteq"] & Y \arrow[d, phantom, sloped, "\subseteq"] \\
\mathbb{A}^n & \mathbb{A}^m
\end{tikzcd}
$$

$f : X \longrightarrow Y$ morfismo

$$\iff \quad f = (f_1, \dots, f_m)$$

con f_i POLINOMI

Prop. X varietà q.p.

$$f : X \longrightarrow \mathbb{P}^m$$

Consideriamo ricoprimento standard di $\mathbb{P}^m$

$$\{ U_i \}_{i=0,\dots,m}$$

$$U_i = \{ x_i \neq 0 \}$$

$\forall i$ sia $\iota_i : \mathbb{A}^m \hookrightarrow U_i \subset \mathbb{P}^m$

Posto $V_i := f^{-1}(U_i)$

definiamo

$$f_i = \left(\varphi_i^{-1} \circ f\right)\Big|_{V_i} : V_i \to \mathbb{A}^m$$

$$f_i = \left(f_{i,1}, \ldots, f_{i,m}\right)$$

TESI: $f : X \to \mathbb{P}^m$ morfismo

$\Leftrightarrow \forall\, i, j \quad f_{i,j}$ sono funzioni regolari dim (IDEA)

Sfruttiamo Teorema 1

$\{V_i\}_{i=0,\dots,m}$ è ricoprimento di X

$\varphi_i^{-1} \circ f|_{V_i}$ è ben definita a valori in $\mathbb{A}^m$

$\Rightarrow$ le componenti sono funzioni regolari = polinomi

$\square$

Proposizione (2)

$X \subset \mathbb{P}^n$ var. q.p.

Siano $f_0, \dots, f_m \in \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]_d$

$f = (f_0, \dots, f_m) : X \longrightarrow \mathbb{P}^m$

$x \mapsto (f_0(x) : \dots : f_m(x))$

è ben definita SE

$\forall\, x \in X \ \exists\, i$ t.c. $f_i(x) \neq 0$

In questo caso
f è un morfismo.

<u>dim</u>

1. continuità segue dalla prop. precedente

2. Sia $U \subset \mathbb{P}^m$
$$g : U \longrightarrow \mathbb{K} \text{ regolare}$$
$$g = \frac{A}{B}$$

allora $f \circ g = \dfrac{A \circ f}{B \circ f}$

frazione di polinomi
omogenei

è regolare in

$U \subset X$ opportuno

$\square$

Riessumendo :

X affine
Y affine $\Rightarrow$ $f: X \to Y$

morfismo
$\Updownarrow$
f polinomiale

X proiettiva
$f: X \to \mathbb{P}^m$

$\forall x \; \exists$ f_i t.c. $f_i(x) \neq 0$

$f = (f_0, \ldots, f_m)$ $\quad f_i$ omogenei di grado d

$\Rightarrow$ f è morfismo

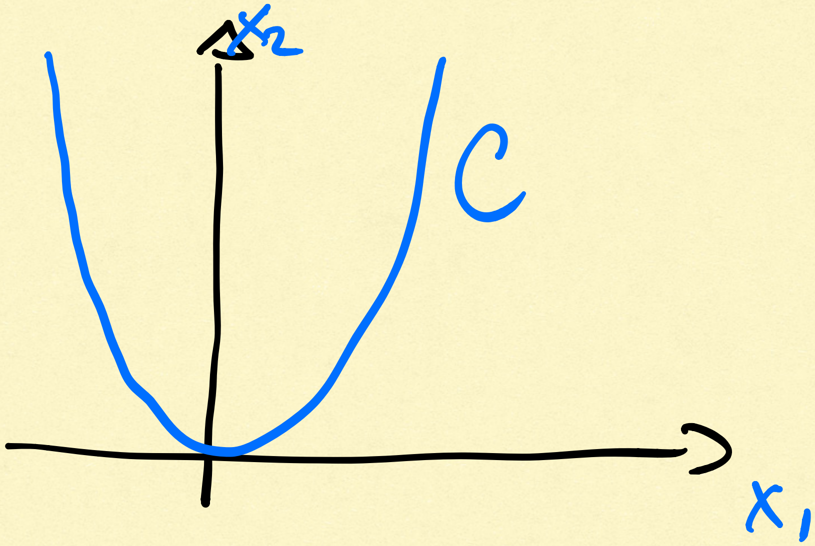
---

n.b. Non tutti i morfismi proiettivi sono "globalmente" polinomiali

Esempio

$$C = V(f) \subset \mathbb{P}^2$$

$$f: \quad x_0 x_2 - x_1^2$$



Costruiremo $f: C \longrightarrow \mathbb{P}^1$

definita da

$$f|_{U_0} : (x_0 : x_1 : x_2) \longrightarrow (x_1 : x_2)$$

$$f|_{U_2} : (x_0 : x_1 : x_2) \longrightarrow (x_0 : x_1)$$

f è ben definita

poiché in $U_0 \cap U_2 \cap C$

$$(x_0 : x_1) = (x_0 x_1 : x_1^2) = (x_0 x_1 : x_0 x_2)$$

$$= (x_1 : x_2)$$

Per la PROP. 1 f

è un morfismo

ma non $\exists$ descrizione

polinomiale globale

Esempio di morfismo

polinomiale: cubica

gobba

$$f : \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^3$$

$$(x_0 : x_1) \longmapsto (x_0^3 : x_0^2 x_1 : x_0 x_1^2 : x_1^3)$$

In $U_0 = \{ x_0 \neq 0 \} \subset \mathbb{P}^1$

$V_0 = \{ y_0 \neq 0 \} \subset \mathbb{P}^3$

$$\begin{array}{ccc} f|_{U_0} : U_0 & \longrightarrow & V_0 \\ \cap & & \cap \\ \mathbb{P}^1 & & \mathbb{P}^3 \end{array}$$

Se scegliamo coordinate

$$t = \frac{x_1}{x_0}$$

$$f : U_0 \longrightarrow V_0$$

$$t \longmapsto (1 ; t : t^2 : t^3)$$

In $U_1 = \{x_1 \neq 0\}$

$$V_3 = \{y_3 \neq 0\} \subset \mathbb{P}^3$$

$$f|_{\sigma_1} : U_1 \longrightarrow V_3 \subset \mathbb{P}^3$$

Poniamo coordinate $s = \dfrac{x_0}{x_1}$

$$f|_{\sigma_1} : \sigma_1 \longrightarrow V_3$$
$$s \longmapsto (s^3 : s^2 : s : 1)$$

$f|_{\sigma_i}$ polinomiale

$\Rightarrow$ f è morfismo

Torniamo al caso AFFINE

$X \subset \mathbb{A}^n$

$Y \subset \mathbb{A}^m$

$f = (f_1, \ldots, f_m) : X \longrightarrow Y$

morfismo

Consideriamo gli anelli delle coordinate di X e Y

$$X \subset \mathbb{A}^n \qquad X = V(I)$$

$$\mathbb{K}[X] = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n] / I$$

analogamente

$Y \subset \mathbb{A}^m \quad Y = V(J)$

$$\mathbb{K}[Y] = \mathbb{K}[y_1, \dots, y_m] / J$$

$$f : X \longrightarrow Y$$

morfismo

INDUCE

$$f^* : \mathbb{K}[Y] \longrightarrow \mathbb{K}[X]$$

$$g \longmapsto f^*(g) = g \circ f$$

funzione polinomiale

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g \circ f"'] & Y \arrow[d, "g"] \\
& \mathbb{K}
\end{tikzcd}$$

polinomio

polinomio

f^* è OMOMORFISMO di $\mathbb{K}$- ALGEBRE

Infatti:

$$f^*(\lambda) = \lambda \qquad \forall\, \lambda \in \mathbb{K}$$

$$f^*(g_1 + g_2) = f^*(g_1) + f^*(g_2)$$

$$f^*(g_1 + g_2) = f^* g_1 \cdot f^* g_2$$

VICEVERSA :

Lemma

$$f : \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^m \text{ morfismo}$$

$$\Updownarrow$$

$$f^* : \mathbb{K}[y_1, \dots, y_m] \to \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$$

omo di $\mathbb{K}$-algebre

In particolare, dato

$\phi : \mathbb{K}[y_1 \dots y_m] \to \mathbb{K}[x_1 \dots x_n]$

$\exists !\ f$ polinomiale t.c. $f^* = \phi$

dim

Costruzione di f^*

$$\begin{array}{c} g \in \mathbb{K}[y_1, \dots, y_m] \\ \downarrow \\ f^*(g) = g \circ f \end{array}$$

$f = (f_1, \dots, f_m)$

$y_1, \dots, y_m$ generatori di $\mathbb{K}[\mathbb{A}^m]$

$$f^*(y_i) = y_i \circ f = f_i$$

VICE VERSA:

Data $\phi : \mathbb{K}[y_1, \ldots, y_m]$

$\longrightarrow \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$

OMO di $\mathbb{K}$-algebre

Poniamo $f_i = \phi(y_i)$

$f_i \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$

ottenismo

$$f = (f_1, \text{—}, f_m)$$

$$: \mathbb{A}^n \longrightarrow \mathbb{A}^m$$

$\square$

CIOE'

$$\mathbb{K}[\mathbb{A}^n] \qquad\qquad \mathbb{K}[\mathbb{A}^m]$$

$$\updownarrow \qquad\qquad\qquad \updownarrow$$

$$\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n] \qquad \mathbb{K}[y_1, \ldots, y_m]$$

$$f : \mathbb{A}^n \longrightarrow \mathbb{A}^m$$

morfismo

$$\updownarrow$$

$$f^* : \mathbb{K}[\mathbb{A}^m] \to \mathbb{K}[\mathbb{A}^n]$$

morfismo