8/5/2020

X varietà q. p.

funzione razionale

$$f : X \dashrightarrow \mathbb{K}$$

$$\Updownarrow$$

coppie $\{(U, f_U)\}$

U aperto DENSO

$f_U : U \to \mathbb{K}$ funzione regolare

RELAZIONE di equivalenza

$$(U, f_U) \sim (V, f_V)$$

se $f_U \equiv f_V$ in $U \cap V$

PROP. X irriducibile

$$\Downarrow$$

$\{f \text{ razionali}\}$ è un campo

NOTAZIONE : $\mathbb{K}(X)$

PROP. $X \subseteq \mathbb{A}^n$ chiuso irriducibile

allora:

$$\mathbb{K}(X) \cong \mathrm{Quot}(\mathbb{K}[X])$$

campo dei quozienti

N.B. $X \subseteq \mathbb{A}^n$ irriducibile

$\Updownarrow$

$\mathcal{I}(X)$ PRIMO

$\Updownarrow$

$\mathbb{K}[X] = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n] / \mathcal{I}(X)$

$\mathbb{K}[X]$ è dominio di integrità

Quindi è ben definito
$$\mathrm{Quot}(\mathbb{K}[X])$$

DIM Prop.

$\exists$ morfismi iniettivi

$$\varphi : \mathbb{K}[X] \hookrightarrow \mathbb{K}(X)$$
$$\eta : \mathbb{K}[X] \hookrightarrow \mathrm{Quot}(\mathbb{K}[X])$$

φ esiste poichè X affine

$\Rightarrow \quad p \in \mathbb{K}[x]$ è funzione regolare

$$\eta(p(x)) \longmapsto \frac{p(x)}{1}$$

Consideriamo il diagramma

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{K}[X] \arrow[r, hook, "\varphi"] \arrow[d, hook, "\eta"'] & \mathbb{K}(X) \\
\mathrm{Quot}(\mathbb{K}[X]) \arrow[ur, "\psi"'] &
\end{tikzcd}$$

costruiamo mappa ψ

$$\psi\left(\frac{p(x)}{q(x)}\right) = \left[X_{q(x)}, \frac{p(x)}{q(x)}\right]$$

dove $X_{q(x)} = \{x \in X : q(x) \neq 0\}$

ψ è indotta da φ

[se volete: proprietà universale Quot]

φ iniettiva $\Rightarrow$ ψ è <u>iniettiva</u>

ψ è surgettivo

Sia $f = [(\mathcal{U}, f_{\mathcal{U}})]$

$\mathcal{U}$ aperto denso

$\Rightarrow \mathcal{U} = \bigcup X_g$

dove $X_g = \{ g(x) \neq 0 \}$

poiché $\{ X_g \}$ è una base della Topologia

Quindi: Sia $X_g \subset \mathcal{U}$

con $g \in \mathbb{K}[x]$

consideriamo $f_v|_{X_g}$

$$\begin{cases} f_v|_{X_g} \text{ è funzione regolare} \\ X_g \text{ è AFFINE (per PROP.)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow f_v|_{X_g} \in \mathbb{K}[X_g]$$

D'altra parte $\mathbb{K}[X_g] = \mathbb{K}[X]_g$

Pertanto:

$$f_v|_{X_g} = \frac{a}{g^m} \quad \text{con } a \in \mathbb{K}[X]$$

allora $\frac{a}{g^m} \in \mathrm{Quot}(\mathbb{K}[X])$

$$\varphi\left(\frac{a}{g^m}\right) = \left[\left(X_g, \frac{a}{g^m}\right)\right]$$

$$= \left[\left(X_g, f_v|_{X_g}\right)\right]$$

$$= \left[(v, f_v)\right] \quad \square$$

ESEMPI FONDAMENTALI

1. $X = \mathbb{A}^n$

$$\mathbb{K}[X] = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$$

$$\mathbb{K}(X) = \mathrm{Quot}\left(\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]\right)$$

2. $X = V(f) \subset \mathbb{A}^{n+1}$

f pol. irriducibile

$$\mathbb{K}[\mathbb{A}^{n+1}] = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n, y]$$

supponiamo $\deg_y(f) \geq 1$

LEMMA DI GAUSS:

f irriducibile in $\mathbb{K}(x_1, \ldots, x_n)[y]$

D'altra parte

$$\mathbb{K}[X] = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n, y] \big/ (f)$$

PERTANTO:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{K}[X] \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & \mathbb{K}(X) \arrow[dl, "h", color=blue] \\
\mathbb{K}(x_1, \ldots, x_n)[y] \big/ (f) &
\end{tikzcd}$$

$\mathbb{K}(x) = \mathrm{Quot}(\mathbb{K}[x])$

$\Rightarrow$ h è iniettiva

Inoltre h è surgettiva

poiché

$x_1, \ldots, x_n, y$

sono generatori di $\mathbb{K}[x]$

$\Downarrow$

generatori di $\mathbb{K}(x)$

MAPPE RAZIONALI

Def. X, Y varietà q.p.

una mappa razionale

$$f : X \dashrightarrow Y$$

è una classe di equivalenza di coppie

$$(U, f_U)$$

dove U aperto denso

$$f_U : U \to Y \text{ morfismo}$$

relazione di equivalenza:

$$(U, f_U) \sim (V, f_V)$$

se $f_U \equiv f_V$ in $U \cap V$

$f : X \dashrightarrow Y$ razionale

si DICE DOMINANTE

se $\exists\ (U, f_U)$

t.c. $f_U(U)$ denso in Y

MAPPE BIRAZIONALI

DEF. $f : X \dashrightarrow Y$ mappa razionale DOMINANTE si dice **BIRAZIONALE** se

$\exists\ g : Y \dashrightarrow X$ razionale dominante

tale che $f \circ g \sim \mathrm{id}_Y$
$g \circ f \sim \mathrm{id}_X$

NOTAZIONE: $X \sim_{bir} Y$

Esempi

(1) $\mathbb{A}^n \underset{bir}{\sim} \mathbb{P}^n$

$$\iota : \mathbb{A}^n \longrightarrow \mathbb{P}^n$$

$$(x_1, \dots, x_n) \longmapsto (1, x_1, \dots, x_n)$$

$$\iota(\mathbb{A}^n) = U_0 \subset \mathbb{P}^n$$

aperto
denso

$$\iota^{-1} : \mathbb{P}^n \dashrightarrow \mathbb{A}^n$$

$$\iota^{-1} \leftrightarrow [(U_0, \iota_0^{-1})]$$

$$c_0^{-1}(x_0, \dots, x_n) = \left(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}\right)$$

$$c \circ c^{-1} \sim_{bir} \mathrm{Id}$$

$$c^{-1} \circ c \sim_{bir} \mathrm{Id}$$

2 MAPPA di CREMONA standard

$$Cr : \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$$

$$(x_0, x_1, x_2) \longmapsto (x_1 x_2, x_0 x_2, x_0 x_1)$$

studio di Cr

c_2 non è definita

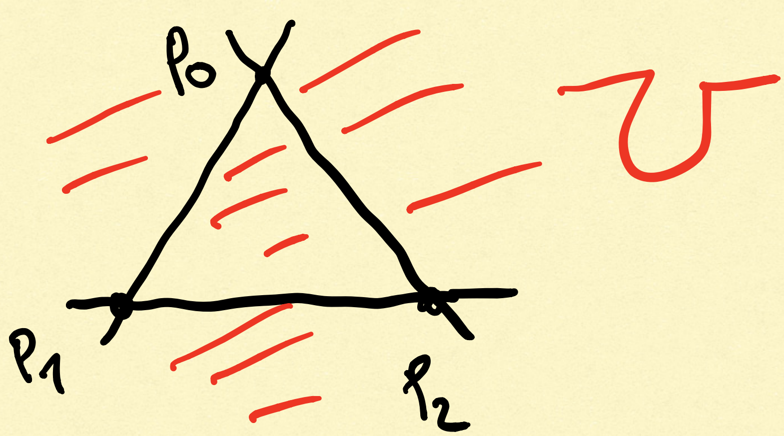
in $P_0 = (1:0:0)$

$P_1 = (0:1:0)$

$P_2 = (0:0:1)$

Consideriamo aperto denso

$$U = \{ x_0 x_1 x_2 \neq 0 \} \subset \mathbb{P}^2$$



$\mathcal{V} \subset V_0$

prendiamo coordinate

$(1, x, y)$ condizione $x \neq 0$ $y \neq 0$

$$(1, x, y) \longmapsto (xy, y, x)$$

$$\begin{array}{c} \| \\ \left(1, \frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right) \end{array} \quad \text{in } \mathbb{P}^2$$

ovvero:

$$Cr(\mathcal{V}) = (\mathcal{V})$$

&

inoltre $Cr(Cr(\mathcal{V}))$

$$= Cr^2(\mathcal{V}) = \mathrm{Id}_{\mathcal{V}}$$

CIOE' CR è birazionale

&

$$Cr^2 \sim_{bir} \mathrm{Id}$$

ALTRO MODO di vedere

CR (con abuso di notazione)

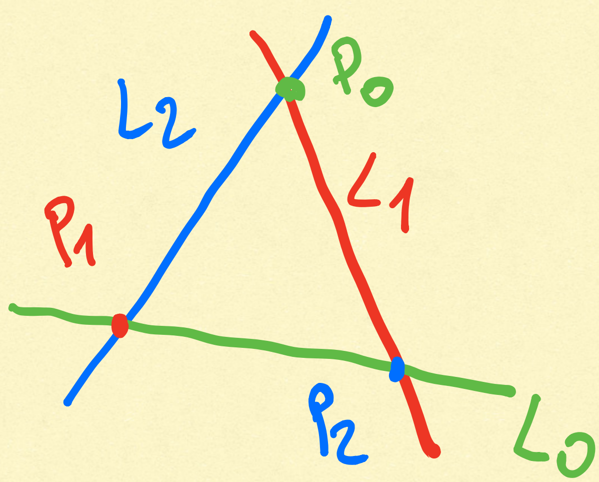
$$(x_0, x_1, x_2) \xmapsto{Cr} (x_1 x_2, x_0 x_2, x_0 x_1)$$

$$\xmapsto{CR} (x_0 x_1 x_2) \cdot \left[(x_0, x_1, x_2) \right]$$

Queste mappe sono ben definite in

$$\mathcal{U} = \{ x_0 x_1 x_2 \neq 0 \}$$

Inoltre:



Posto $L_0 = \{ x_0 = 0 \}$

$L_1 = \{ x_1 = 0 \}$

$L_2 = \{ x_2 = 0 \}$

si ha

$$L_0 \text{ "}\longleftrightarrow\text{" } P_0$$

$$L_1 \text{ "}\longleftrightarrow\text{" } P_1$$

$$L_2 \text{ "}\longleftrightarrow\text{" } P_2$$

<u>DEF</u>. $f : X \dashrightarrow Y$

mappa razionale dominante

f induce

$$f^* : \mathbb{K}(Y) \longrightarrow \mathbb{K}(X)$$

se $(V, \varphi_V) \in \mathbb{K}(Y)$

$$f^*(V, \varphi_V) = (W, \varphi \circ f_{|W})$$

dove $W = f^{-1}(V) \cap \mathrm{Dom}(f)$

Dove

$\mathrm{Dom}(f)$ DOMINIO di f

$= \bigcup V$ dove V aperto $\subset X$

(V, f_V) rappresenta f

ESEMPIO. $\mathrm{Dom}(C_2)$

Dominio trasformazione cremoniana $= \mathbb{P}^2 \setminus \{P_0, P_1, P_2\}$

PROP ① X, Y var. q.p. IRRIDUCIBILI

$f : X \dashrightarrow Y$ mappa razionale DOMINANTE

ALLORA:

1) $f^* : \mathbb{K}(Y) \hookrightarrow \mathbb{K}(X)$ è iniettiva

2) Data $g : Y \dashrightarrow Z$ dominante

$$(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$$

<u>DIM</u>. Segue dalla definizione di f^* per var. affini

$\square$

<u>COR.</u> ②

$f : X \to Y$ ISOMORFISMO

$\Rightarrow \quad f^* : \mathbb{K}(Y) \to \mathbb{K}(X)$ è isomorfismo

COR (3)

X varietà q.p. irriducibile

$U \subset X$ aperto $\neq \emptyset$ ($\Rightarrow$ denso)

allora

$$\mathbb{K}(U) \cong \mathbb{K}(X)$$

dim. $\iota : U \hookrightarrow X$

immersione è mappa dominante

$\Rightarrow$ $\mathbb{K}(X) \hookrightarrow \mathbb{K}(U)$ per PROP. 1

D'altra parte $\mathbb{K}(V) \subseteq \mathbb{K}(X)$

$\square$

PROP. 4 X, Y var. q.p. irriducibili

$\varphi : \mathbb{K}(Y) \hookrightarrow \mathbb{K}(X)$ omo di $\mathbb{K}$-algebre

ALLORA:

$\exists !\ f : X \dashrightarrow Y$ razionale dominante

t.c. $\varphi = f^*$

OSS ① omo di campi che
sono $\mathbb{K}$-algebre
omo $\neq 0 \Rightarrow$ è iniettivo

② unicità di f è
intesa come classe

DIM Per COR 2, 3

Possiamo supporre
X, Y affini

In questo caso $\mathbb{K}(X) = \mathrm{Quot}(\mathbb{K}[X])$
$\mathbb{K}(Y) = \mathrm{Quot}(\mathbb{K}[Y])$

Supponiamo $Y \subset \mathbb{A}^m$

$\mathbb{K}[Y]$ generato da $y_1, \ldots, y_m$

$$\varphi(y_i) = \frac{a_i}{b_i} \in \mathbb{K}(X)$$

ovvero $a_i, b_i \in \mathbb{K}[X]$

Sia $b = b_1 \cdot \ldots \cdot b_m$

Scriviamo $$\frac{a_i}{b_i} = \frac{\tilde{a}_i}{b}$$

In questo modo $\varphi(y_i) \in \mathbb{K}[X]_b$

$$\mathbb{K}[X]_b = \mathbb{K}[X_b]$$

cioe' φ induce

$$\tilde{\varphi} : \mathbb{K}[Y] \longrightarrow \mathbb{K}[X_b]$$

Poniamo $f : X_b \longrightarrow Y$

l'applicazione indotta dagli anelli

(X_b, f) rappresenta f

$\square$

ESEMPI

① $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \sim_{bir} \mathbb{P}^2$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \supset & \mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^1 & \\ & \varphi \downarrow \wr\wr & \\ & \mathbb{A}^2 & \subset \mathbb{P}^2 \end{array}$$

$f : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$

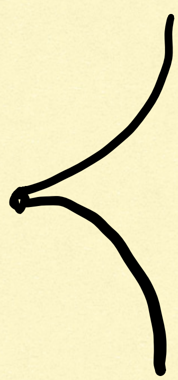
$f = \left(\mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^1, \varphi \right) \to \mathbb{A}^2 \subset \mathbb{P}^2$

f è razionale DOMINANTE

$$f^{-1}: \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$$

$$f^{-1} = (\mathbb{A}^2, \varphi^{-1}) \to \mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^1$$

2 $C = V(y^2 - x^3) \subset \mathbb{A}^2$



$\subset \mathbb{A}^2$

$$C \sim_{\text{bir}} \mathbb{A}^1$$

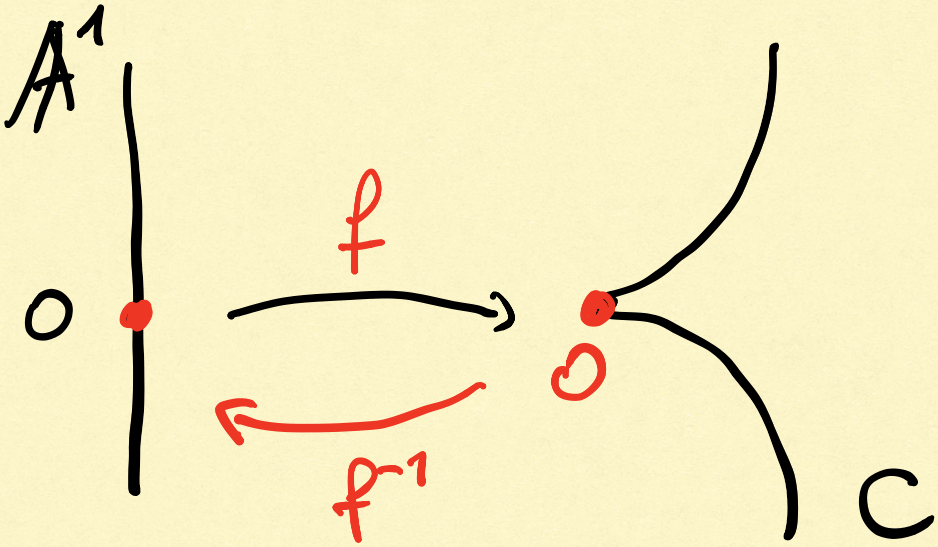
$\exists$ mappa razionale dominante

$$f : \mathbb{A}^1 \dashrightarrow C$$
$$t \longmapsto (t^2, t^3)$$

$$f^{-1} : C \dashrightarrow \mathbb{A}^1$$

f^{-1} definita in $C \setminus \{0,0\}$

$$f^{-1}(x,y) = \frac{y}{x}$$



$f|_{\mathbb{A}^1 \setminus \{0\}}$ è isomorfismo

si ha

$$\mathbb{K}(\mathbb{A}^1) = \mathbb{K}(t) \cong \mathbb{K}(C)$$

mentre $\mathbb{A}^1$ non è iso a C

ovvero $\mathbb{K}[\mathbb{A}^1] \cong \mathbb{K}[C]$