7/5/2020

caso particolare prodotto

$$X \times X$$

DIAGONALE

$$\Delta_X \doteq \{(a,b) \in X \times X : a = b\}$$
$$= \{(x,x)\}$$

<u>Teorema</u> X varietà q.p.

$\Rightarrow \Delta_X \subset X \times X$ è chiuso alg.

Lemma $\Delta_{\mathbb{P}^n} \subset \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$ è chiuso alg.

dim

Consideriamo mappa che induce Δ:

$$\zeta_{n,n} : \mathbb{K}^{n+1} \times \mathbb{K}^{n+1} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \mathrm{Mat}\big((n+1) \times (n+1); \mathbb{K}\big)$$

$$(\bar{a}, \bar{b}) \longmapsto \bar{a} \cdot \bar{b}^t$$

<u>OSS</u>. $(a,b) \in \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$

$$a = b \iff rg\left(\bar{a} \; \bar{b}\right) = 1$$

matrice $(n+1) \times 2$

<u>OSS</u>. $\Longrightarrow$

$$(a,b) \in \Delta_{\mathbb{P}^n} \iff rg\left(\bar{a}\,\bar{b}\right) = 1$$

$$\iff \det(M) = 0 \quad \forall \, M \text{ minore } 2 \times 2$$

det è polinomio biomogeneo di bi-grado $= (1,1)$

$$\bar{a} = \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \qquad \bar{b} = \begin{pmatrix} b_0 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$\left\{ a_i b_j - a_j b_i = 0 : i,j = 0,\dots,n+1 \right\}$$

$$= \Delta_{\mathbb{P}^n}$$

cioè:

$$\Delta_{\mathbb{P}^n} = \sum_{n,m} \bigcap_{i,j} \left(z_{ij} - z_{ji} = 0 \right)$$

$\Longrightarrow$ intersezione di chiusi

$\square$

DIM TEOREMA

X varietà q.p. $\Rightarrow X \subset \mathbb{P}^n$

$$\Delta_X = (X \times X) \cap \Delta_{\mathbb{P}^n}$$

$$\subset \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$$

chiuso per la topologia indotta

$\square$

Conseguenze

Dato $f: X \to Y$ morfismo di varietà q.p.

GRAFICO di f:

$$\Gamma_f = \{(x,y) \in X \times Y : y = f(x)\}$$

$$\subset X \times Y$$

<u>PROP</u>. $f: X \to Y$ morfismo di var. q.p.

Allora: $\Gamma_f \subset X \times Y$ è chiuso alg.

<u>dim</u> consideriamo il morfismo indotto da f

$$F = (f, \mathrm{Id}_Y) : X \times Y \to Y \times Y$$

$$(x, y) \mapsto (f(x), y)$$

F è morfismo per oss precedente

$$\Gamma_f = F^{-1}(\Delta_Y)$$

Δ_Y chiuso per teorema

F morfismo $\Rightarrow$ $F^{-1}(\Delta_Y)$ chiuso $\square$

N.B. $\quad X \xrightarrow{\sim} \Gamma_f$

$x \longmapsto (x, f(x))$

è morfismo

&

$p_1|_{\Gamma_f} : \Gamma_f \longrightarrow X$

$(x, f(x)) \longmapsto x$

è l'inversa di $(x, f(x))$
ed è un morfismo

DEF. X varietà q. p.

si dice UNIVERSALMENTE CHIUSA

SE

$\forall$ Y varietà q. p. il

morfismo $p_2 : X \times Y \longrightarrow Y$

è mappa chiusa

TEOREMA. X varietà proiettiva

$\Rightarrow$ X è universalmente chiusa

<u>DIM</u> Sia $X \subset \mathbb{P}^n$

considieriamo $Y \subset \mathbb{P}^m$

va. q.p.

vogliamo dimostrare che

$\forall\ Z \subset X \times Y$ chiuso

$p_2(Z) \subset Y$ è chiuso

—

Per quanto riguarda Y

consideriamo ricoprimento affine

$\{V_i\}$ di $Y \subset \mathbb{P}^m$

$p_2(Z)$ chiuso in Y

$$\Updownarrow$$

$p_2(Z) \cap V_i$ chiuso in V_i

se poniamo

$$Z_i \div Z \cap (X \times V_i)$$

$$p_2(Z) \cap V_i = p_2|_{X \times V_i}(Z_i)$$

PERTANTO possiamo supporre Y affine

$Y \subset \mathbb{A}^m$ chiuso

$p_2(\Omega) \subset Y$ chiuso

$\Updownarrow$

$p_2(\Omega) = W \cap Y$

con W chiuso in $\mathbb{A}^m$

Quindi TEO. segue se vale per $Y = \mathbb{A}^m$

Analogamente per $X \subseteq \mathbb{P}^n$

$Z \subset X$ chiuso

$\Updownarrow$

$Z = Z' \cap X$ con Z' chiuso di $\mathbb{P}^n$

Quindi TEO. segue se vale per $X = \mathbb{P}^n$

<u>TESI</u>: $Z \subset \mathbb{P}^n \times \mathbb{A}^m$ chiuso

$\Rightarrow p_2(Z) \subset \mathbb{A}^m$ chiuso

Per semplicità di notazione

scriviamo $P = P_2$

$Z \subset \mathbb{P}^n \times \mathbb{A}^m$ chiuso

vuol dire che

$Z = V(I)$ con I ideale

$I = (f_1, \dots, f_r)$

con f_i polinomi omogenei nelle x

dove $\mathbb{P}^n$ con coord. $(x_0, \dots, x_n)$

$\mathbb{A}^m$ con coord. $(y_1, \dots, y_m)$

Sia $\bar{y} \in \mathbb{A}^m$

$$p^{-1}(\bar{y}) \cap Z = \{ (x, y) \in \mathbb{P}^n \times \mathbb{A}^m : f_i(x, \bar{y}) = 0 \quad \forall i = 1 \dots r \}$$

eq.$^{\text{nte}}$

$$\bar{y} \in p(Z) \iff \begin{cases} \exists\, x \in \mathbb{P}^n \\ \text{t.c.} \\ f_i(x, \bar{y}) = 0 \\ \forall i = 1 \dots r \end{cases}$$

OVVERO:

$$p(Z) = \{ y \in \mathbb{A}^m : V(f_1(x,y), \dots, f_r(x,y)) \neq \emptyset \}$$

Tesi: $P(Z)$ è chiuso

$\forall \bar{y} \in \mathbb{A}^m$

$$V\left(f_1(x,\bar{y}), \dots, f_r(x,\bar{y})\right) = \emptyset$$

$\Updownarrow$ NSS proiettivo

$$\sqrt{(f_1(x,\bar{y}), \dots f_r(x,\bar{y})} \supset (x_0, \dots, x_n)$$

CIOE' $\forall\ x_i \quad \exists\ d_i$ ~~tale~~ che

$$x_i^{d_i} \in \left(f_1(x,\bar{y}), \dots, f_r(x,\bar{y})\right)$$

$$\Updownarrow$$

$\exists\, d$ tale che

$$\mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]_d = (f_1, \dots, f_r)_d$$

come spazi vettoriali

OVVERO:

$\forall$ monomio X^I

I multiindice

$$X^I = \sum_{h=1}^{r} \alpha_h X^{J_h} \cdot f_h$$

visto come sp. vettoriale:

$\exists$ matrice $A = A(\bar{y})$

con $rk(A) = \binom{n+d}{d}$

t.c.

$$\left(x^I : |I| = d\right) = A \cdot \left(x^{J_h} \cdot f_h\right)$$

Conclusione:

$$V\left(f_1(x,\bar{y}), \dots, f_n(x,\bar{y})\right) \neq \emptyset$$

$$\Updownarrow$$

la matrice A non ha rg max

Ma avere $rg <$ max

è una condizione polinomiale

ovvero: $\det\left(M(\bar{y})\right) = 0$

$\forall$ minore M

$\Rightarrow$ condizione

chiusa in $\mathbb{A}^n$

<u>Ragionamento</u> $\forall d$:

Poniamo $L_d =$

$$L_d = \left\{ y \in \mathbb{A}^m : (x_0, \dots, x_n)^d \not\subset (f_1, \dots, f_r) \right\}$$

allora

$$p(Z) = \bigcap_{d=1}^{\infty} L_d$$

per quanto visto prima

$\Rightarrow$ $p(Z)$ chiuso

$\square$

Conseguenze:

Teorema (2) X varietà proiettiva

Y varietà q.p.

$f : X \to Y$ morfismo

allora f è mappa chiusa

DIM Sia $Z \subset X$ chiuso

$Z \subset X \subset \mathbb{P}^n \Rightarrow Z$ è un chiuso proiettivo

$$\Rightarrow \quad f|_{\Gamma}: \Gamma \longrightarrow Y$$

Ma $\quad f(\Gamma) = p_2(\Gamma_{f|_\Gamma})$

Poiché Γ proiettivo

$\Rightarrow$ univ.$^{\text{nte}}$ chiuso

$p_2(\Gamma_{f|_\Gamma})$ è chiuso

Infatti

$$\Gamma_{f|_\Gamma} = \left\{ (x,y) : \begin{array}{l} x \in \Gamma \\ y \in Y \end{array} \quad y = f(x) \right\}$$

chiuso in $X \times Y$

$\Box$

In particolare:

$\boxed{\text{Le funzioni globalmente regolari su una varietà proiettiva sono le costanti}}$

Teorema (3) X varietà proiettiva connessa

$$\Rightarrow \mathcal{O}_X(X) = \mathbb{K}$$

dim Sia $f : X \to \mathbb{K}$ funzione regolare

allora abbiamo visto che

$$f \leftrightarrow f : X \to \mathbb{A}^1 \cong \mathbb{K}$$

morfismo

consideriamo $\iota : \mathbb{A}^1 \hookrightarrow \mathbb{P}^1$

ι morfismo

Quindi

$$\tilde{f} := \iota \circ f : X \longrightarrow \mathbb{P}^1$$

è ancora un morfismo

Per il teo. 2

$\tilde{f}(X) \subset \mathbb{P}^1$ è chiuso proiettivo

Inoltre $\tilde{f} = c \circ f$

$\Rightarrow \tilde{f}(X) \subsetneq \mathbb{P}^1$

X connessa

$\tilde{f}$ morfismo $\Rightarrow \tilde{f}$ continua

$\Rightarrow \tilde{f}(X)$ connessa

conclusione

$\tilde{f}(X) \subset \mathbb{P}^1$ chiuso proprio connesso

$$\Rightarrow \tilde{f}(X) = \text{p.to}$$

$$\tilde{f}(X) = \iota \circ f(X) = \text{p.to}$$

$$\Updownarrow$$

$$f(X) = \lambda \in \mathbb{A}^1$$

$$\Updownarrow$$

$$f(x) = \lambda \in \mathbb{K}$$

$\square$

FUNZIONI RAZIONALI

X var. quasi proiettiva

DEF. Una funzione razionale

(notazione: $f : X \dashrightarrow \mathbb{K}$)

è una classe di equivalenza

di coppie $\{(U, f_U)\}$

dove $U \subseteq X$ aperto DENSO

$f_U : U \longrightarrow \mathbb{K}$ funzione regolare

RELAZIONE di equivalenza

$$(U, f_U) \sim (V, f_V)$$
$$\Updownarrow$$
$$f_U \equiv f_V \quad \text{in } U \cap V$$

---

n.b. $U \cap V$ è ancora aperto DENSO

oss: $\sim$ è effettivamente una relazione di equivalenza

- Riflessività, simmetria OVVIE
- Transitività

Date le coppie

$$(U, f_U);\ (V, f_V);\ (W, f_W)$$

Basta considerare

$$Z = U \cap V \cap W$$ aperto denso

In Z: $f_U \equiv f_V \equiv f_W$

PROP. X irriducibile

$\Downarrow$

$\{ f : X \dashrightarrow \mathbb{K} \text{ razionali} \}$ è UN CAMPO

DIM. operazioni $+$, $\cdot$

$$(U, f_U) + (W, g_W)$$

$$\doteq \left(U \cap W, f_U|_{U \cap W} + g_W|_{U \cap W} \right)$$

analogamente per $\cdot$

Inverso moltiplicativo

Sia $f = (U, f_U)$

Supponiamo $f \neq 0$

ovvero $\exists\ U' \subset U$ t.c.

$$f|_{U'} \neq 0$$

U' aperto denso

$$U' = U \setminus \{f_U = 0\}$$

perché X è irriduc.

Poniamo

$$f^{-1} = \left(v', \frac{1}{f_{v}|_{v'}} \right)$$

Si ha $\quad f \cdot f^{-1} \sim 1$

raz$^{\text{nte}}$ equivalente alla funzione costante $= 1$

$\square$

NOTAZIONE: $\boxed{\mathbb{K}(X)}$