30/4/2020

PRODOTTO di varietà proiettive

- $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$

Introduciamo mappa di SEGRE

$$S_{1,1} : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^3 = \mathbb{P}(\mathrm{Mat}(2\times 2; \mathbb{K}))$$

$$[(x_0 : x_1), (y_0 : y_1)] \longmapsto \begin{pmatrix} x_0 y_0 & x_0 y_1 \\ x_1 y_0 & x_1 y_1 \end{pmatrix}$$

$S_{1,1}$ è indotta da mappa tra i seguenti sp. vettoriali

$$\tilde{S}_{1,1} : \mathbb{K}^2 \times \mathbb{K}^2 \longrightarrow \mathbb{K}^4 = \mathrm{Mat}(2\times 2)$$

$$\left(\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix} \right) \longmapsto \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_0 & y_1 \end{pmatrix}$$

In $\mathbb{P}^3 = \mathbb{P}(\mathrm{Mat}(2\times 2; \mathbb{K}))$

con coordinate

$$(z_{00}, z_{01}, z_{10}, z_{11})$$

consideriamo

$$\Sigma_{1,1} = V(z_{00}z_{11} - z_{10}z_{01}) \subset \mathbb{P}^3$$

$$\leftrightarrow \{ A \in \mathbb{P}(\mathrm{Mat}(2\times 2; \mathbb{K})) : \mathrm{rk}(A) = 1 \}$$

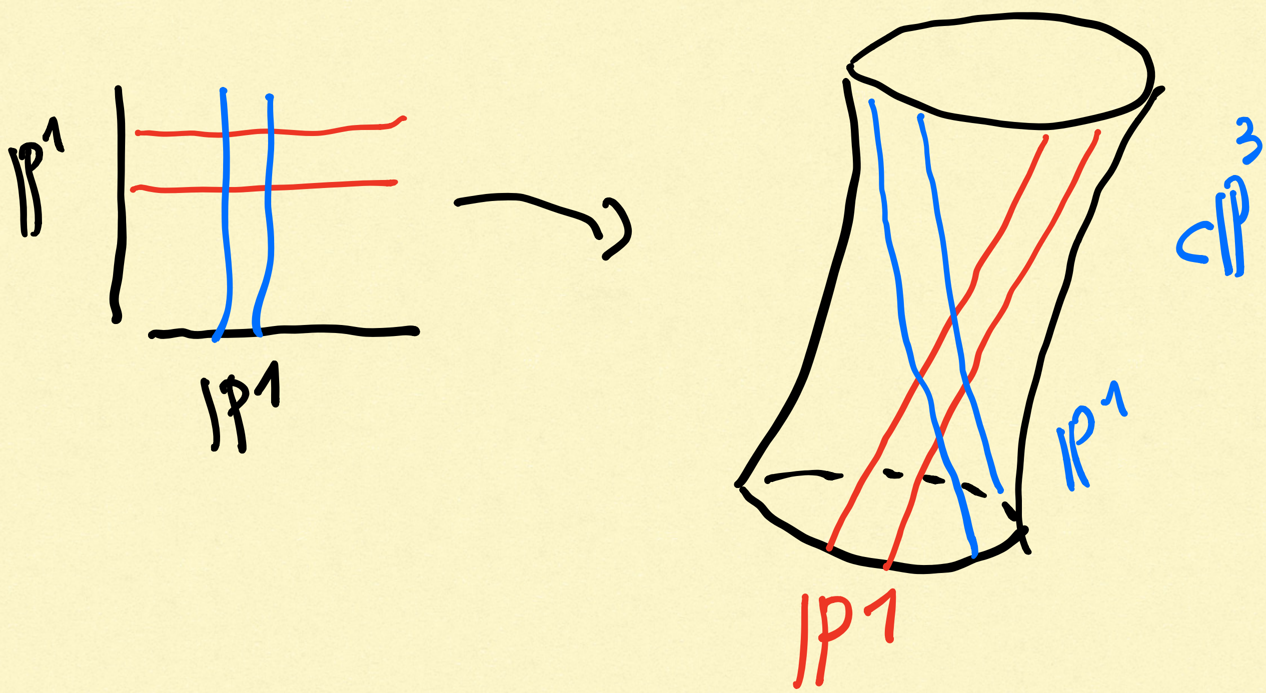
$$z_{00}z_{11} - z_{10}z_{01} = \det(A)$$

PROP. $s_{1,1} : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^3$

induce isomorfismo

$$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \xrightarrow{\ \sim\ } \Sigma_{1,1}$$

DISEGNO:



<u>DIM</u>. $S_{1,1}$ è morfismo: è dato da mappe polinomiali

In carte:

$\{U_0, U_1\}$ ricoprimento di $\mathbb{P}^1_{(x_0,x_1)}$

$\{V_0, V_1\}$ ricopr. di $\mathbb{P}^1(y_0,y_1)$

$\{W_{00}, W_{01}, W_{10}, W_{11}\}$ ricoprimento di $\mathbb{P}^3$

$$W_{ij} = \{ z_{ij} \neq 0 \}$$

ALLORA:

$$S_{1,1}|_{U_i \times V_j} \xrightarrow{\sim} \Sigma_{1,1} \cap W_{i,j}$$

consideriamo $i=0$ $j=0$

U_0 coord. $t=\dfrac{x_1}{x_0}$

V_0 coord. $s=\dfrac{y_1}{y_0}$

$$\left[(1,t),(1,s)\right] \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & s \\ t & st \end{pmatrix}$$

$S_{1,1}\big|_{U_0\times V_0}$ è morfismo

$$S_{1,1}\big|_{U_0\times V_0} \xrightarrow[\text{bigettiva}]{} W_0 \cap \Sigma_{1,1}$$

iniettiva : $(1,t) \neq (1,t')$

$$S_{1,1}\left[(1,t) \cdot (y_0,y_1)\right] \neq$$

$$S_{1,1}\left[(1,t) \times (y_0,y_1)\right]$$

surgettiva :

$$W_0 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \beta & \gamma \end{pmatrix} \right\}$$

$$W_0 \cap \Sigma_{1,1} \longleftrightarrow \det = 0$$

$$\Longleftrightarrow \gamma = \alpha\beta$$

$$W_0 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \beta & \alpha\beta \end{pmatrix} \right\}$$

$$(S_{1,1})^{-1}\left[\begin{pmatrix}1 & \alpha\\ \beta & \alpha\beta\end{pmatrix}\right]=\left[(1,\alpha),(1,\beta)\right]$$

Inoltre

$(S_{1,1})^{-1}\big|_{W_0\cap\Sigma_{1,1}}$ è morfismo perché dato da polinomi

Analogamente si fa per $(i,j)\in\{0,1\}\times\{0,1\}$

Si può anche vedere globalmente nel seguente modo

$$p_1 : \mathbb{P}\left(\left\{\begin{matrix} \mathrm{Mat}(2\times 2; \mathbb{K}) \\ \text{di } rg = 1 \end{matrix}\right\}\right) \longrightarrow \mathbb{P}^1$$

$$A \longmapsto \begin{matrix}\text{colonne} \\ \text{non nulle} \\ \text{di } A\end{matrix}$$

$$p_2 : \mathbb{P}\left(\left\{\begin{matrix} \mathrm{Mat}(2\times 2; \mathbb{K}) \\ \text{di } rg = 1 \end{matrix}\right\}\right) \longrightarrow \mathbb{P}^1$$

$$A \longmapsto \begin{matrix}\text{righe non} \\ \text{nulle di } A\end{matrix}$$

$$(p_1, p_2) = (S_{1,1})^{-1}$$

&

p_1, p_2 sono le proiezioni sui 2 fattori

Rimane da dim: prop. UNIVERSALE

OVVERO

$$\left(\Sigma_{1,1} = S_{1,1}(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1) ; p_1, p_2 \right)$$

é il prodotto

Sia Z var. q.p.

$f : Z \longrightarrow \mathbb{P}^1$

$g : Z \longrightarrow \mathbb{P}^1$ morfismi

Insiemisticamente: consideriamo mappa $f \times g$

vogliamo dare la struttura di morfismo

$\to$ consideriamo $\phi = S_{1,1} \circ (f \times g)$

$$
\begin{tikzcd}
Z \arrow[r, "f\times g"] \arrow[rrrd, bend left, "f"] \arrow[rrdd, bend right, "g"'] & \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \arrow[rd, "s_{1,1}"] & & \\
& & \Sigma_{1,1} \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"'] & \mathbb{P}^1 \\
& & \mathbb{P}^1 &
\end{tikzcd}
$$

f, g morfismi

Poniemo

$$Z_{i,j} = f^{-1}(U_i) \cap g^{-1}(V_j)$$

$$U_i \subset \mathbb{P}^1$$
$$V_j \subset \mathbb{P}^1$$

$\{ \mathcal{U}_{i,j} \}$ è ricop. aperto di Σ

ϕ morfismo $\Leftrightarrow$ $\phi|_{\mathcal{U}_{i,j}} \to \Sigma_m$ è morfismo

Consideriamo per semplicità

$i=0 \quad j=0$

$$f|_{Z_{00}} : Z_{00} \longrightarrow V_0 \cong \mathbb{A}^1$$

$$z \longmapsto f_1(z)$$

polinomio

$$g|_{Z_{00}} : Z_{00} \longrightarrow V_0 \cong \mathbb{A}^1$$

$$z \longmapsto g_1(z)$$

polinomio

$$s_{1,1} \circ (f \times g)|_{Z_{00}} : Z_{00} \longrightarrow W_{00}$$

$$W_{00} \cap \Sigma_{1,1}$$

$$(1, f_1), (1, g_1) \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & f_1 \\ g_1 & f_1 \cdot g_1 \end{pmatrix}$$

f_1, g_1 sono funzioni regolari (pol.)

$\Rightarrow f_1 \cdot g_1$ è funz. regolare

CIOÈ $\phi|_{Z_{00}}$ è morfismo

analogamente

$\phi|_{Z_{ij}}$ è morfismo

$\square$

- $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$

mappa di Segre

$$s_{n,m} : \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m \longrightarrow \mathbb{P}^{(n+1)+(m+1)-1}$$

indotta da

$$\tilde{s}_{n,m} : \mathbb{K}^{n+1} \times \mathbb{K}^{m+1} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \mathrm{Mat}\big((n+1)\times(m+1); \mathbb{K}\big)$$

$$(X, Y) \longmapsto X \cdot Y^t$$

$\uparrow$ coppie vettori $\longmapsto$ $\uparrow$ matrice di rg $=1$

Poniamo $\Sigma_{n,m} \overset{\text{def}}{=}$

$= \{ A \in \mathbb{P}(Mat(n+1, m+1; \mathbb{K})) \mid rk(A) = 1 \}$

$= V\left(\det(M) = 0 : M \text{ minore } 2\times 2 \text{ di } \begin{pmatrix} z_{00} & \cdots & z_{0m} \\ \vdots & & \\ z_{n0} & \cdots & z_{nm} \end{pmatrix} \right)$

Teorema.

$$S_{n,m} : \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m \longrightarrow \mathbb{P}^{(n+1)+(m+1)-1}$$

induce isomorfismo

$$\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m \xrightarrow{\cong} \Sigma_{n,m}$$

DIM. analoga al caso $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$

$$U_i \times V_j \xrightarrow{\cong} \Sigma_{n,m} \cap W_{ij}$$

proiezioni

$p_1(A)$ = une colonne $\neq 0$ di A

$p_2(A)$ = rige $\neq 0$ di A

$\square$

Teorema $\Rightarrow$ prodotto di varietà q.p.

<u>Def</u>. $X \subset \mathbb{P}^n$ varietà q.p.

$Y \subset \mathbb{P}^m$ varietà q.p.

$$X \times Y \doteq S_{n,m}(X \times Y) \subset \Sigma_{n,m}$$

con p_1, p_2

le restrizioni di p_1, p_2

all'immagine

Caratterizzazione TOPOLOGIA di $X \times Y$

__n.b.__

$$X = U_1 \cap Z_1 \subset \mathbb{P}^n$$

aperto　　　　chiuso

$$Y = U_2 \cap Z_2 \subset \mathbb{P}^m$$

$$X \times Y = (U_1 \times U_2) \cap (Z_1 \times Z_2)$$

aperto　　　　chiuso

TOPOLOGIA di $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$

<u>DEF</u>. $p \in \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n, y_0, \dots, y_m]$

$$p = p(x, y)$$

si dice bi-omogeneo di
bi-grado (a, b)

SE

$p(x, y)$ omogeneo di grado a
nelle x

omogeneo di grado b
nelle y

OSS. $p(x,y)$ biomogeneo di bigrado (a,b)

$$\Downarrow$$

$$p(\lambda x, \mu y) = \lambda^a \mu^b \cdot (p(x,y))$$

oss $\Rightarrow$ $p(x,y)$ biomogeneo allora

è ben definito

$$V_{\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m}(p(x,y)) =$$

$$= \{(x,y) \in \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m : p(x,y) = 0\}$$

Teorema. $\{ V(p(x,y)) : p$ biomogeneo$\}$

forme une bose di chiusi di $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$

DIM. Per semplicità consideriamo

$$\underset{\text{coord. } (x_0,x_1)}{\mathbb{P}^1} \times \underset{\text{coord. } (y_0,y_1)}{\mathbb{P}^1}$$

$$S_{1,1} : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \longrightarrow \Sigma_{1,1} \subset \mathbb{P}^3$$

Per definizione:

Z chiuso di $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ $\iff$ $(S_{1,1})^{-1}(\bar{Z})$

con $\bar{Z}$ chiuso in $\Sigma_{1,1}$

MA:

chiuso in $\Sigma_{1,1}$ =

= restrizione a $\Sigma_{1,1}$ di un chiuso di $\mathbb{P}^3$

&

BASE dei chiusi = $\{ V(F) :$ F pol. omogeneo $\}$

F polinomio omogeneo nelle variabili z_{ij} $\boxed{\deg(F)=d}$

Ma $s_{1,1}: (x_i, y_j) \mapsto x_i y_j$

Pertanto

$$(s_{1,1})^{-1}\Big(V(F)\Big) =$$

$$= \Big\{ \big((x_0,x_1),(y_0,y_1)\big) \in \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 : F(x_i \cdot y_j) = 0 \Big\}$$

polinomio biomogeneo di bigrado (d,d)

VICEVERSA:

sia $p(x,y)$ polinomio bi-omogeneo di bigrado (a,b)

se $a=b$ allora

$$p(x,y) \to p(z_{ij})$$

omogeneo di grado $2a$

se $a<b$ consideriamo

IDEALE AUSILIARIO

$$I = \left(x_0^{b-a} \cdot p(x,y),\ x_1^{b-a} \cdot p(x,y) \right)$$

$x_0^{b-e} p(x,y)$ biomogeneo di

$x_1^{b-e} p(x,y)$ bigrado (b,b)

D'altra parte:

$$V_{\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m}(I) = V_{\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m}\big((p(x,y))\big)$$

$$\Updownarrow$$

Ideale omogeneo

in $\mathbb{P}^3$

nelle coordinate z_{ij}

$\square$

__OSS__. Dati 2 morfismi di var. q.p.

$$X \xrightarrow{f} Y$$

$$Z \xrightarrow{g} W$$

allora

$$F = (f, g) : X \times Z \to Y \times W$$

$$(x, z) \mapsto (f(x), g(z))$$

è un morfismo di varietà q.p.

Infatti: per la prop. universale

$$\begin{tikzcd} X \times Z \arrow[r, "\bar{g}"] \arrow[d, "\bar{f}"'] & W \\ Y & \end{tikzcd}$$

dove $\bar{g} : X \times Z \xrightarrow{p_2} Z \xrightarrow{g} W$

$\bar{f} : X \times Z \xrightarrow{p_1} X \xrightarrow{f} Y$

Per la prop. UNIVERSALE

$\exists ! \quad \phi : X \times Z \longrightarrow Y \times W$

Per costruzione

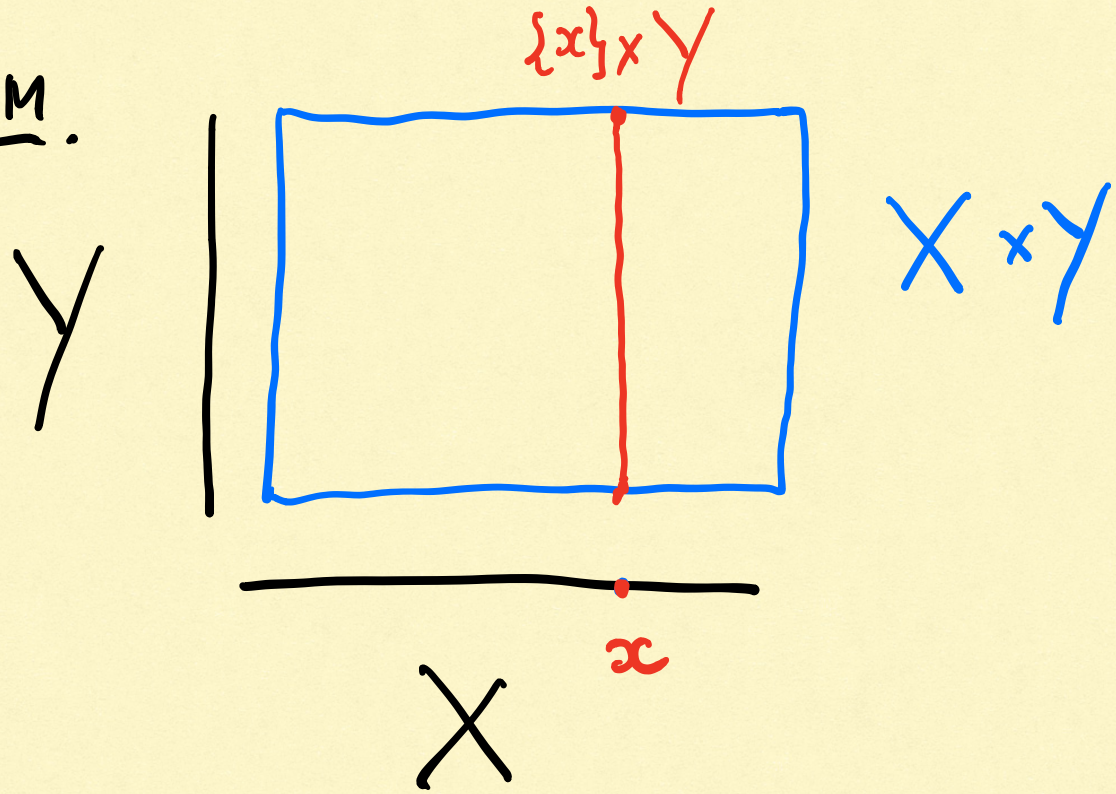
ϕ coincide con $F = (f, g)$

<u>Teorema</u>

X, Y var. quasi proiett. IRRIDUCIBILI

$\Rightarrow$ $X \times Y$ è IRRIDUCIBILE

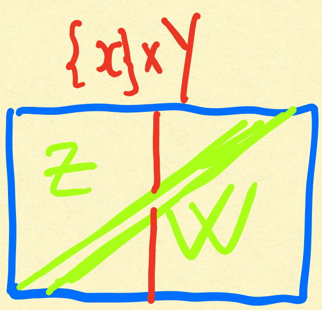
DIM.



Supponiamo per assurdo

$$X \times Y = Z \cup W$$

chiusi propri



$\forall\ x \in X$ fissato

$$\{x\} \times Y$$
$$\parallel$$
$$\underbrace{\big((\{x\} \times Y) \cap Z\big)}_{\overset{\cdot}{\underset{\cdot}{=}}\ Z_x} \cup \underbrace{\big((\{x\} \times Y) \cap W\big)}_{\overset{\cdot}{\underset{\cdot}{=}}\ W_x}$$

$$\{x\} \times Y \simeq Y$$

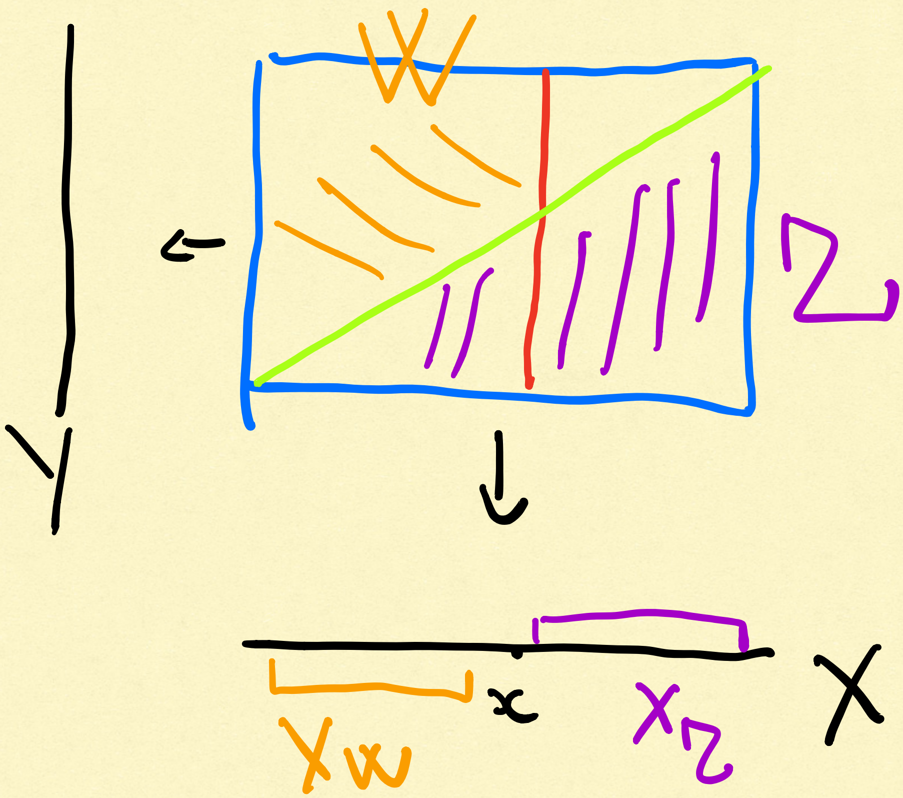
&

Y è irriducibile

Quindi: $Z_x = \{x\} \times Y$

OPPURE

$W_x = \{x\} \times Y$



Poniamo

$$X_Z = \{ x \in X : \{x\} \times Y \subseteq Z \}$$

$$X_W = \{ x \in X : \{x\} \times Y \subseteq W \}$$

si ha: $X = X_Z \cup X_W$

Ma X è irriducibile

$\Rightarrow$ Il teo. segue se dimostriamo che X_Z, X_W sono chiusi

$$X_Z = \bigcap_{y \in Y} p_1\left(X \times \{y\} \cap Z \right)$$

Infatti:

$$X_Z = \{ x \in X : \forall y \in Y \ (x,y) \in Z \}$$

$$= \{ x \in X : \forall y \in Y \ \ x \in p_1\left(X \times \{y\} \cap Z \right) \}$$

$$= \bigcap_{y \in Y} p_1\left(X \times \{y\} \cap Z \right) \}$$

ANALOGAMENTE: X_W chiuso

Quindi poichè X è irriducibile

possiamo supporre $X_{\eta} = X$

$X_{w} = \{\phi\}$

$\Rightarrow \quad Z = X \times Y$

$w = \{\phi\}$

$\square$