3 / 4 / 2020

$\mathbb{K} = \overline{\mathbb{K}}$

$$X \subseteq \mathbb{A}^n$$

chiuso algebrico

$X = V(\mathcal{I})$ $\mathcal{I}$ ideale

$\mathcal{I} = \sqrt{\mathcal{I}}$

F polinomio $\in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$

F induce funzione polinomiale

$$F_{|X} : X \longrightarrow \mathbb{K}$$
$$x \longmapsto F(x)$$

<u>OSS.</u> 1 $\quad F_{|X} \equiv 0$

$$\Longleftrightarrow \quad F \in I = I(X)$$

<u>Def</u>. $\quad f : X \to \mathbb{K}$ funzione polinomiale

SE $\exists \; F \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$

t.c. $F_{|X} = f$

OSS. 2 $\quad F_{|X} = G_{|X} = f$

allora $\quad F - G \in \mathcal{I} = \mathcal{I}(X)$

Anello delle coordinate di X

$$\mathbb{K}[X] \stackrel{def}{=} \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n] / \mathcal{I}$$

dove $\mathcal{I} = \mathcal{I}(X)$

$$\begin{array}{l} I \to \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n] \xrightarrow{\pi} \mathbb{K}[X] \\ \shortparallel \\ \ker(\pi) \end{array}$$

PROP. – DEF.

$\mathbb{K}[X]$ è $\mathbb{K}$-Algebra commutativa fin.$^{\text{nte}}$ generata ridotta

VICEVERSA:

Data A una $\mathbb{K}$-algebra f.g. ridotta

allora $\exists\ X \subset \mathbb{A}^n$
t.c. $A = \mathbb{K}[X]$

<u>dim</u>

A $\mathbb{K}$-alg. comm. f.g.

$$\Updownarrow$$

$\exists\ x_1, \dots, x_n$ tali che
A è generata come
anello da $\mathbb{K}, x_1, \dots, x_n$

$$\Updownarrow$$

$$\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n] \xrightarrow{\pi} A$$

Posto $\mathcal{I} = \operatorname{Ker}(\pi)$

$$A \cong \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n] / \mathcal{I}$$

A ridotta $\iff$ A non ha nilpotenti

$$\iff \mathcal{I} = \sqrt{\mathcal{I}}$$

$\square$

Prop. $X \subseteq \mathbb{A}^n$ chiuso

X irriducibile

$\Updownarrow$

$\mathcal{I}(X)$ primo

$\Updownarrow$

$\mathbb{K}[X]$ è dominio di integrità

dim

visto X irr. $\Leftrightarrow \mathcal{I}(X)$ primo

$\mathcal{I}(X)$ non primo

$\Updownarrow$

$\exists\ f, g \notin \mathcal{I}$ t.c. $f \cdot g \in \mathcal{I}$

Posto $[f], [g]$ le classe di f, g in $\mathbb{K}[X]$

$[f], [g] \neq 0$

ma $f \cdot g = 0$

$\square$

CASO GENERALE

DEF. $X \subseteq \mathbb{P}^n$ si dice

varietà quasi proiettiva (q.p.)

SE

$\exists$ Z chiuso $\subseteq \mathbb{P}^n$

U aperto $\subseteq \mathbb{P}^n$

t.c. $X = Z \cap U$

Oss. $X \subset \mathbb{P}^n$ chiuso

è varietà q.p.

$X = X \cap \mathbb{P}^n$

$X \subset \mathbb{A}^n$ chiuso

è varietà q.p.

$$X = \overline{X} \cap U_0$$

Def X varietà q.p.

si dice AFFINE

se X è ISO

a $\bar{X} \subset \mathbb{A}^n$ chiuso affine

(vedremo nozione di morfismo)

Def $X \subset \mathbb{P}^n$ varietà q.p.

si dice proiettiva

SE

X è ISO a $\bar{X} \subset \mathbb{P}^N$

chiuso algebrico

<u>OSS</u>. (notazioni - def.)

Spesso in letteratura

X varietà $\Rightarrow X$ irriducibile

Proprietà locali

<u>Teo</u> 1 X varietà quasi proiettiva

$$Y \subset X \text{ chiuso}$$
$$\Updownarrow$$
$$Y \text{ è loc.}^{\text{nte}} \text{ chiuso}$$

<u>ovvero</u>: Dato $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ ricoprimento aperto di X

Y chiuso in X $\Longleftrightarrow$ $\forall \alpha$ $Y \cap U_\alpha$ chiuso in U_α

(n.b. consideriamo la top. di sottospazio)

<u>DIM</u>

$\Downarrow$ OVVIO

$\Uparrow$ Scriviamo $U_\alpha = X \setminus Z_\alpha$

Z_α chiuso in X

Per ipotesi

$\forall \alpha \quad U_\alpha \cap Y = U_\alpha \cap T_\alpha$

T_α chiuso in X

Tesi: $Y = \bigcap_\alpha (Z_\alpha \cup T_\alpha)$

$y \in Y$ & $y \in U_\alpha \Rightarrow y \in T_\alpha$

$y \in Y$ & $y \notin U_\alpha \Rightarrow y \in Z_\alpha$

CIOE' $Y \subseteq Z_\alpha \cup T_\alpha \quad \forall \alpha$

$\supseteq$:

Sia y t.c. $y \in Z_\alpha \cup T_\alpha \quad \forall \alpha$

Poiché $X = \bigcup_\alpha U_\alpha$

$\Rightarrow \exists\ \bar{\alpha}$ t.c. $x \in U_{\bar{\alpha}}$

ovvero $x \notin Z_{\bar{\alpha}}$

cioè se $x \in T_{\bar{\alpha}}$

$\Rightarrow \quad x \in U_{\bar{\alpha}} \cap T_{\bar{\alpha}} \subset Y$

$\square$

FUNZIONI REGOLARI

DEF. X varietà q. p.

$f : X \longrightarrow \mathbb{K}$ si dice REGOLARE

SE

$\forall$ punto $P \in X$

$\exists$ U aperto, $U \ni P$

polinomi $A, B \in \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$

(omogenei dello stesso grado)

t.c. $f|_U = \dfrac{A}{B}$ con $B \neq 0$ in U

N.B. A, B omogenei

$\Downarrow$

$$P = (e_0 : \dots : e_n)$$

$$f(P) = \frac{A(e_0, \dots, e_n)}{B(e_0, \dots, e_n)}$$

$$= \frac{A(\lambda \cdot e_0, \dots, \lambda \cdot e_n)}{B(\lambda e_0, \dots, \lambda \cdot e_n)}$$

f è ben definita

NOTAZIONE

$$\mathcal{O}_X(V) = \left\{ \underset{\text{regolari}}{f: V \to \mathbb{K}} \right\}$$

$$\mathcal{O}_X(X) = \left\{ \underset{\text{regolari}}{f: X \to \mathbb{K}} \right\}$$

CASO AFFINE

$X \subseteq \mathbb{A}^n$ chiuso

$X = V(I)$

nullstellensatz RELATIVO

$Y \subseteq X$ chiuso

$$I_X(Y) = \{ f \in \mathbb{K}[X] : f(x) = 0 \ \forall x \in Y \}$$

$S \subseteq \mathbb{K}[X]$

$$V_X(S) = \{ x \in X : f(x) = 0 \ \forall f \in S \}$$

<u>Teo.</u> (NSS relativo) $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{K}}$

(1) $V_X(J) = \emptyset \Rightarrow J = \mathbb{K}[X]$

(2) $I_X(V_X(J)) = \sqrt{J}$

<u>Teorema</u> $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{K}}$

$X \subseteq \mathbb{A}^n$ chiuso

$$\Downarrow$$

$$\mathbb{K}[X] \cong \mathcal{O}_X(X)$$

CIOE' :

le funzioni regolari su una varietà affine sono le funzioni POLINOMIALI

DIM $\exists$ mappa naturale

$$v : \mathbb{K}[X] \longrightarrow \mathcal{O}_X(X)$$

$$f(x) \longmapsto \bar{f}(x)$$

$$\overset{\shortparallel}{[F(x)]}$$

$$\iota_0 : \mathbb{A}^n \hookrightarrow \mathbb{P}^n$$

$$\iota_0(\mathbb{A}^n) = U_0$$

$$\iota_0(X) \cong X = \overline{X} \cap U_0$$

$$f \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n] \mapsto H(f)$$

$$\overline{f}|_{U_0} \doteq \frac{H(f)}{x_0^d}$$

i) v è iniettiva

Sia $f \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$

$$v(f) \equiv 0 \iff f(x) = 0 \ \forall x \in X \iff f \in \mathcal{I}(X)$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n] \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{O}_X(X) \\
\mathbb{K}[X] \arrow[ur, hook] &
\end{tikzcd}$$

ii) ν è surgettiva

$$\mathbb{K}[X] \hookrightarrow \mathcal{O}_X(X)$$

Prese $\varphi \in \mathcal{O}_X(X)$

consideriamo l'ideale

$$J_\varphi = \{ f \in \mathbb{K}[X] : f \cdot \varphi \in \mathbb{K}[X] \}$$

<u>Tesi</u>: $1 \in J_\varphi$

ovvero $V_X(J_\varphi) = \emptyset$

via NSS

Dato $p \in X$

vogliamo dimostrare che $p \notin V_X(J_p)$

Consideriamo una decomp. di X in irriducibili

$$X = \underbrace{X_1 \cup \dots \cup X_t}_{p \in} \bigcup \underbrace{X_{t+1} \cup \dots \cup X_r}_{p \notin}$$

Per def. di funzione regolare

$\exists \ U = U(p)$ e

polinomi A, B t.c.

$$\varphi = \frac{A}{B} \quad \text{con } B \neq 0 \text{ in } U$$

CIOE'

$$B \cdot \varphi = A \quad \text{in } U$$

identifichiamo A con $A_{|X}$
B con $B_{|X}$

allora

$$B\varphi - A \in \mathcal{O}_X(X)$$

&

$\forall\, i \leq t$

$p \in U \cap X_i$ aperto denso in X_i

$\Rightarrow \ U \cap \left(\bigcup_{i \leq t} X_i \right)$ è

aperto denso in

$Y \div \bigcup_{i \leq t} X_i$

$B \cdot \varphi - A \equiv 0$ in $U \cap Y$

$\Rightarrow U \cap Y$ è denso in Y

&

$\{ B \cdot \varphi - A = 0 \}$ chiuso

$\Rightarrow B \cdot \varphi - A \equiv 0$ in Y

Consideriamo

$$Z = \bigcup_{i \geq t+1} X_i$$

cioè $\quad X = Y \cup Z$

$$Z \subsetneq Z \cup \{p\} \qquad \{p\} \subset Y$$

$\Rightarrow \exists\; c \in \mathbb{K}[X]$ t.c.

$$c(Z) \equiv 0$$

ma

$$c(p) \neq 0$$

Consideriamo il polinomio

$$\underset{\substack{\uparrow\\ \equiv 0 \\ \text{su } Z}}{c} \cdot (\underset{\substack{\uparrow\\ \equiv 0 \text{ su } Y}}{B\varphi - A})$$

$\Rightarrow c \cdot (B\varphi - A) \equiv 0$ su X

ovvero $c \cdot B\varphi = c \cdot A$ in $\mathbb{K}[X]$

$c \cdot B \in J_\varphi$ per def

Ma $c \cdot B \in J_\varphi$

$c(P) \neq 0$

$B(P) \neq 0$ poiché $B \not\equiv 0$ in U

$\Downarrow$

$c \cdot B(P) \neq 0$

conclusione: $P \notin V_X(J)$

$\square$

PROP. Le funzioni regolari GLOBALI su $\mathbb{P}^1$ sono le funzioni costanti

$$\left(\text{CIOE'}: \ \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(\mathbb{P}^1) = \mathbb{K} \right)$$

DIM

Consideriamo ric. aperto di $\mathbb{P}^1$

$$\mathbb{P}^1 = U_0 \cup U_1$$

$$U_0 = \{x_0 \neq 0\} \quad U_1 = \{x_1 \neq 0\}$$

In U_0 coord. $t = \frac{x_1}{x_0}$

In U_1 coord. $s = \frac{x_0}{x_1}$

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(U_0) = \left\{ \underset{\text{regolari}}{f : U_0 \longrightarrow \mathbb{K}} \right\}$$

$$= \left\{ \underset{\text{regolari}}{f \in \mathbb{K}[t]} \right\}$$

$$= \mathbb{K}[t] \cong \mathbb{K}[U_0]$$

Analogamente:

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(U_1) = \mathbb{K}[s]$$

Sia $f \in \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(\mathbb{P}^1)$

$$f|_{U_0} = p(t)$$

polinomi

$$f|_{U_1} = q(s)$$

In $U_0 \cap U_1$

$$s = \frac{1}{t} \implies p(t) = q\left(\frac{1}{t}\right)$$

Se $f \neq$ costante

possiamo supporre $\deg q > 0$

$$q(s) = \sum_{i=0}^{m} a_i s^i \qquad \underline{m > 0} \quad \underline{a_m \neq 0}$$

$$p(t) = q\left(\frac{1}{t}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\underbrace{t^m}_{\deg \geq m} \cdot p(t) = \underbrace{a_m + \ldots + a_0 t^m}_{\deg \leq m}$$

Conclusione:

$$p(t) = a_0 \overset{!}{=} q\left(\frac{1}{t}\right)$$

$$\Rightarrow a_m = 0$$

assurdo

$\square$

<u>COR</u>. $f : \mathbb{P}^n \longrightarrow \mathbb{K}$

regolare

f è costante

<u>dim</u>

sia $P \in \mathbb{P}^n$

$\forall\ Q \in \mathbb{P}^n$

consideriamo la

retta $P * Q \cong \mathbb{P}^1$

$f|_{P*Q}$ è costante

$$\Rightarrow \quad f(P) = f(Q)$$
$$\forall \, Q$$

$\square$

VEDREMO :

X varietà proiettive connesse

$$\Downarrow$$

$$\mathcal{O}_X(X) \simeq \mathbb{K}$$