28/5/2020

BLOW-UP
(scoppiamento)

Sia $P=(0,\dots,0)\in\mathbb{A}^n$

Il blow-up di $\mathbb{A}^n$ in P è

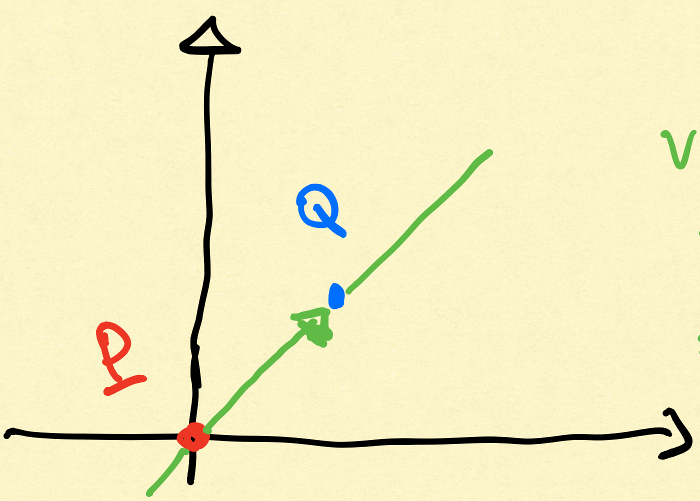
$$Bl_P(\mathbb{A}^n)=\{[(x_1,\dots,x_n),(y_1:\dots:y_n)]\in\mathbb{A}^n\times\mathbb{P}^{n-1}: x_i y_j = x_j y_i \ \forall i,j=1,\dots,n\}$$

$$
\begin{tikzcd}
Bl_P(\mathbb{A}^n) \arrow[r, hook] \arrow[dr, "bl_P"'] & \mathbb{A}^n \times \mathbb{P}^{n-1} \arrow[d] \\
& \mathbb{A}^n
\end{tikzcd}
$$

<u>Studio di bl_P:</u>

(1) Sia $Q \in \mathbb{A}^n$

$Q \neq P = (0, \dots, 0)$



vettore $\overrightarrow{PQ}$

$= (e_1, \dots, e_n)$

$=$ direzione retta $\overline{PQ}$

Allora $bl_p^{-1}(Q) = Q'$

punto $\in bl_p(\mathbb{A}^n)$

Infatti:

se $Q = (a_1, \dots, a_n)$

$Q \neq P = (0, \dots, 0) \Rightarrow \exists\, j$ t.c. $a_j \neq 0$

eq. $x_i y_j = x_j y_i$

diventa $y_i = \left(\frac{a_i}{a_j}\right) y_j$

ovvero poiché $(y_1 : \dots : y_n) \in \mathbb{P}^{n-1}$

$$bl_p(Q) = [(a_1, \dots, a_n), (a_1 : \dots : a_n)]$$

DI PIÙ:

per costruzione

$$bl_p : Bl_p(\mathbb{A}^n) \setminus bl_p^{-1}(P) \xrightarrow{\sim} \mathbb{A}^n \setminus \{P\}$$

$$Q' \longmapsto Q$$

<u>controimmagine</u> <u>di P</u>:

$$bl_p^{-1}(P) = \{(0, \dots, 0), [y_1 : \dots : y_n]\}$$

$$\simeq \mathbb{P}^{n-1}$$

Interpretazione geometrica

$$bl_P^{-1}(P) \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{rette in } \mathbb{A}^n, \\ \text{passanti per } P \end{array} \right\}$$

Infatti:

Sia L = retta passante per $P = (0, \ldots, 0)$

eq. parametrica di L : $\begin{cases} x_1 = a_1 t \\ \vdots \\ x_n = a_n t \end{cases}$

sia $Q \in L$

$$Q = (d_1 \bar{t}, \ldots, d_n \bar{t})$$

per un certo $\bar{t} \neq 0$

$$bl_p^{-1}(Q) = \left[(d_1 \bar{t}, \ldots, d_n \bar{t}), (d_1 : \ldots : d_n) \right]$$

<u>OVVERO</u>:

$$\overline{bl_p^{-1}(L \setminus \{p\})} = \left[L, (d_1 : \ldots : d_n) \right]$$

$$v = \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix}$$ vettore direzione di L

$(\in \mathbb{P}^{n-1})$

$$\overline{bl_p^{-1}(L \setminus \{p\})} \cap bl_p^{-1}(p) =$$

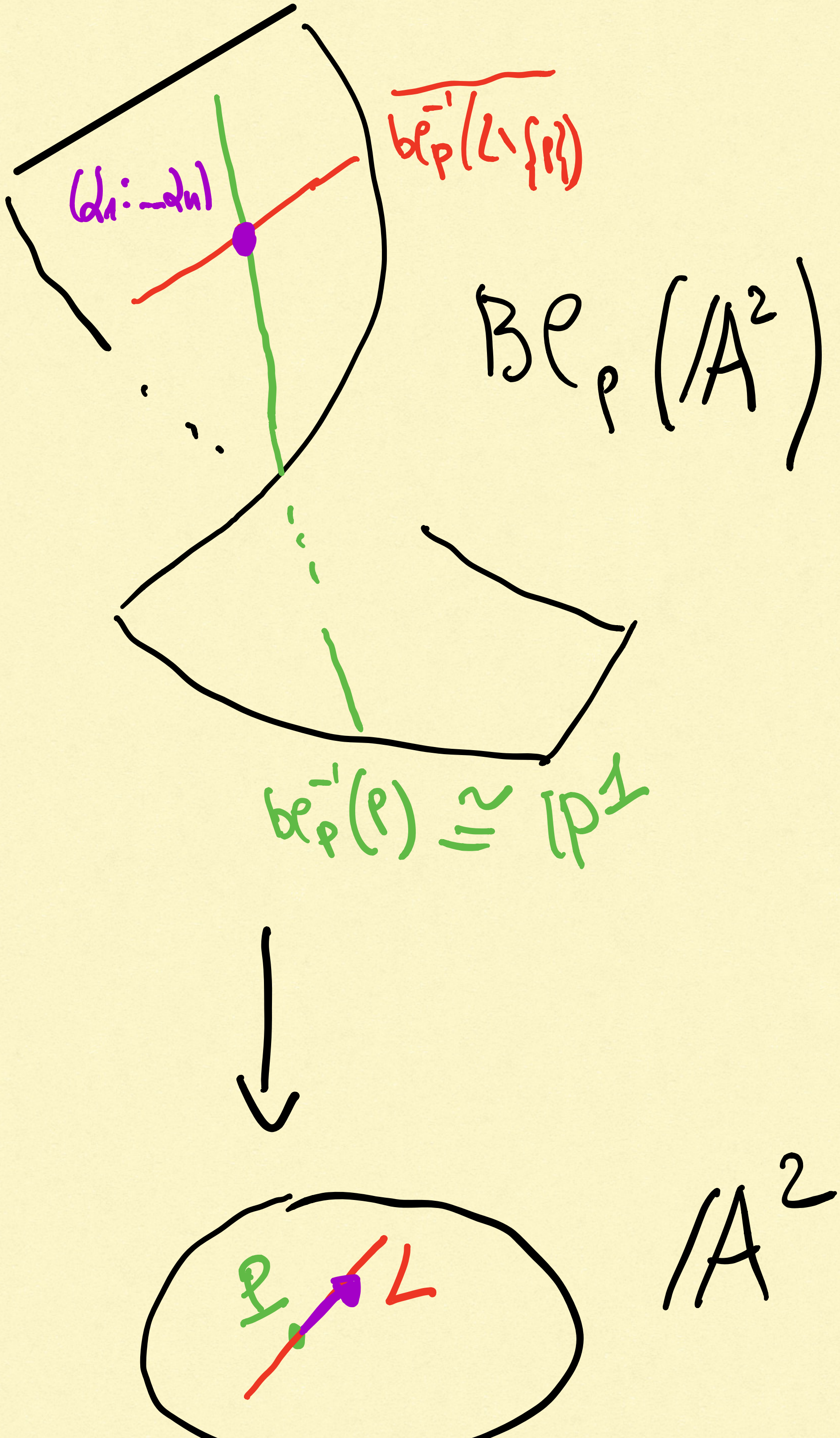
$$= \{[L, (d_1 : \dots : d_m)]\} \cap \{[0, (y_1 : \dots : y_n)]\}$$

con d_i fissati

y_i liberi

Intersezione:

$$\{[0, (d_1 : \dots : d_m)]\}$$



$(a_1 : \ldots a_n)$
$\overline{bl_p^{-1}(L \setminus \{p\})}$
$Bl_p(\mathbb{A}^2)$
$bl_p^{-1}(p) \cong \mathbb{P}^1$
p
L
$\mathbb{A}^2$

<u>prop</u>. $X = Bl_p(\mathbb{A}^n)$

è varietà q.p.

irriducibile

<u>dim</u>

$$X \setminus \{bl_p^{-1}(p)\} \cong \mathbb{A}^n \setminus \{p\}$$

$\mathbb{A}^n \setminus \{p\}$ è irriducibile

per definizione

($\Leftarrow$ chiusura

è

irriducibile)

Sufficiente: $X \setminus \{ bl_p^{-1}(p) \}$

è denso in X

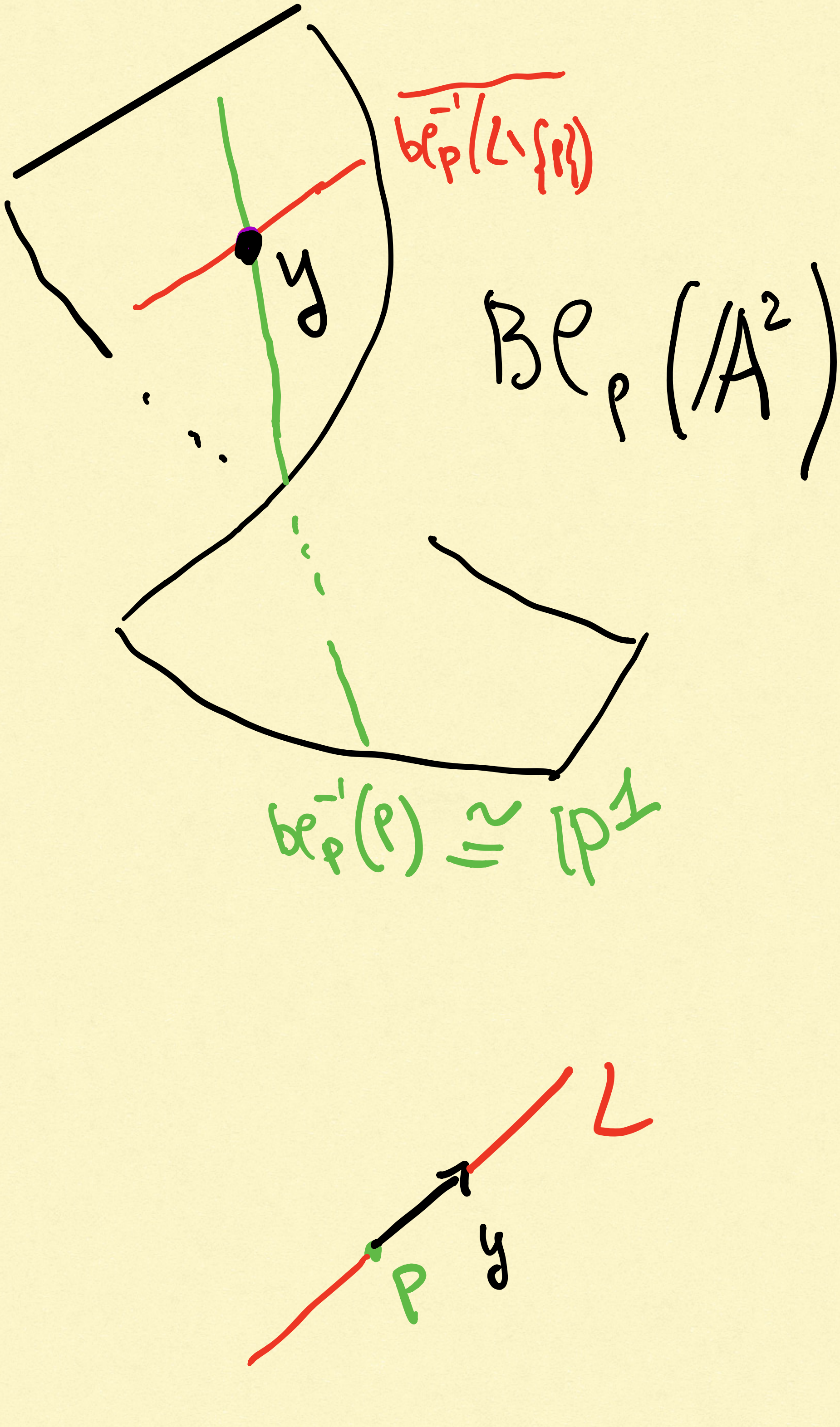
Sia $y \in bl_p^{-1}(p)$

$y = \{ [0, (y_1 : \dots : y_n)] \}$

allora per costruzione

$$y \in \overline{bl_p^{-1}(L \setminus \{p\})}$$

dove $L = \begin{cases} x_1 = y_1 \cdot t \\ \vdots \\ x_n = y_n \cdot t \end{cases}$



$\overline{bl_p^{-1}(L\setminus\{p\})}$
y
$Bl_p(\mathbb{A}^2)$
$bl_p^{-1}(p) \simeq \mathbb{P}^1$
L
p
y

ovvero $X \setminus bl_p^{-1}(P)$

è denso in X

$\Rightarrow$ X è irriducibile

DEFINIZIONE Alternativa

Consideriamo mappa di proiezione

$$\pi : \mathbb{A}^n \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}^{n-1}$$

$$(x_1, \dots, x_n) \longmapsto (x_1 : \dots : x_n)$$

$$P = (0, \dots, 0)$$

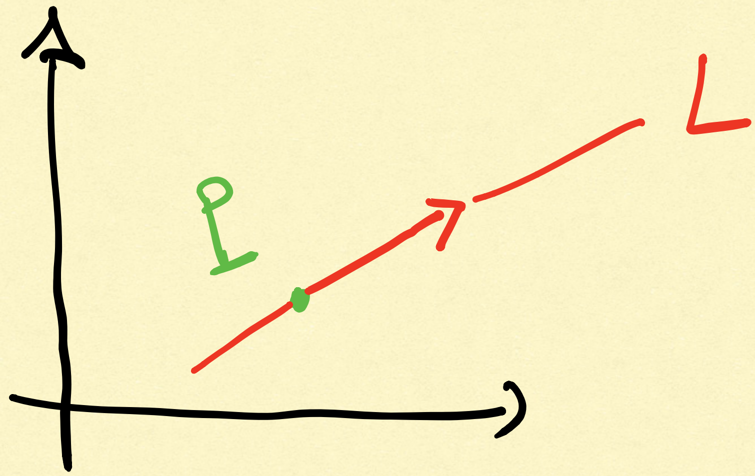
$$\mathrm{Bl}_p(\mathbb{A}^n) = \overline{(\text{GRAFICO di } \pi)}$$

$$\subset \mathbb{A}^n \times \mathbb{P}^{n-1}$$

ovvero:

$$\overline{\left\{ (x_1, \dots, x_n), (x_1 : \dots : x_n) \right\}}$$
$$: (x_1 \dots x_n) \neq (0, \dots, 0)$$

<u>OSS</u>. E' possibile fare lo scoppiamento di $\mathbb{A}^n$ in qualsiasi punto $\underline{P}$



$$p = (\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$$

$$L = \begin{cases} x_i = \bar{x}_i + d_i t \\ \end{cases}$$

$$bl_p^{-1}(p) = \{(p, (d_1 : \ldots : d_n))\}$$

$Y \subset \mathbb{A}^n$ chiuso irriducibile

$p = (0, \dots, 0) \in Y$

$$Bl_p(Y) \doteq \overline{bl_p^{-1}(Y \setminus \{p\})}$$

APPLICAZIONI:

① Risoluzione delle singolarità

CASO $n = 2$

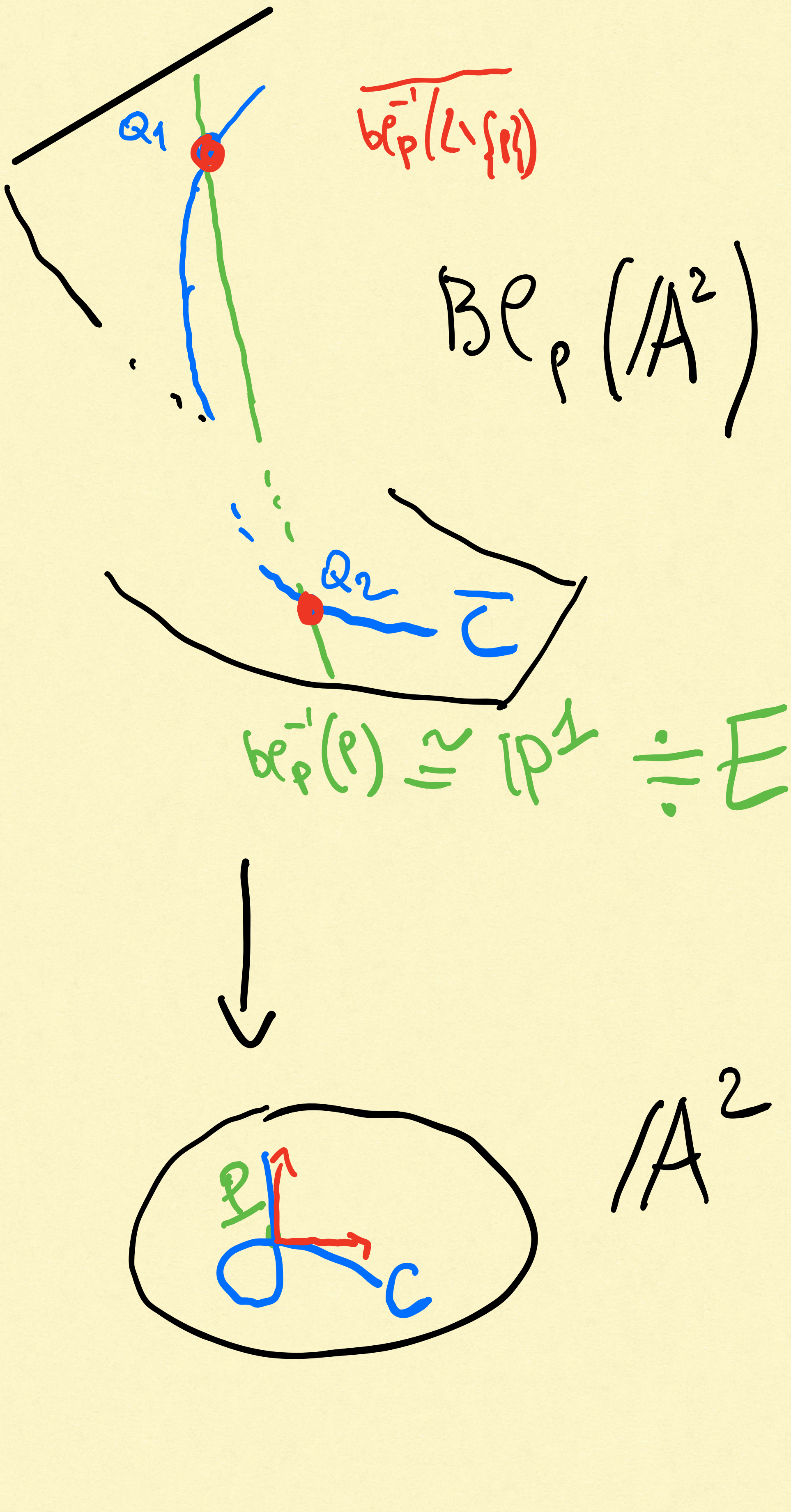
$$P = (0,0) \in \mathbb{A}^2$$

$$X = Bl_P(\mathbb{A}^2)$$

notazione standard

$$E \doteq bl_P^{-1}(P) \cong \mathbb{P}^1$$

curva eccezionale dello scoppiamento



Q_1
$\overline{bl_p^{-1}(L\setminus\{p\})}$
$Bl_p(\mathbb{A}^2)$
Q_2
$\overline{C}$
$bl_p^{-1}(p) \cong \mathbb{P}^1 \doteq E$
$\mathbb{A}^2$
p
C

Sia $C \subset \mathbb{A}^2$

curva algebrica

singolare in P

$$\overline{C} = \overline{bl_P^{-1}(C \setminus \{P\})}$$

trasformata

stretta di C

direzioni delle tangenti proprie a C in P $\longleftrightarrow$ punti sulla curva eccez.

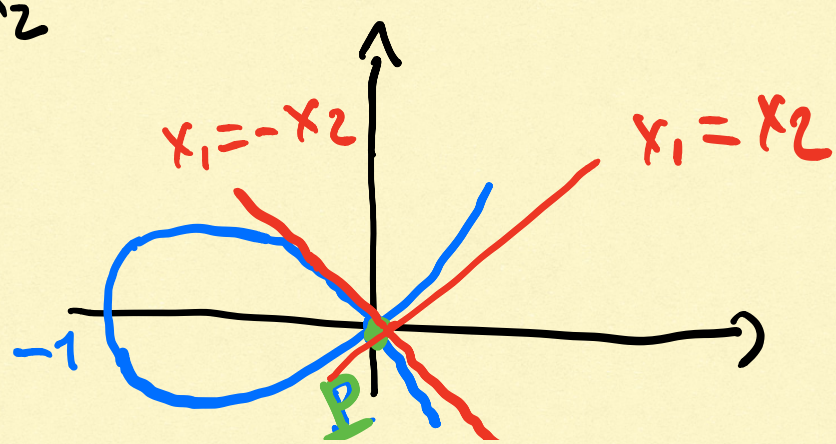
<u>Esempio</u>

$$C = V(f) \subset \mathbb{A}^2(x_1, x_2)$$

$$f = x_2^{\,2} - x_1^2(x_1+1)$$

$P = (0,0)$ p.to singolare per C

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(0,0) = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial x_2}(0,0) = 0 \end{cases}$$



$$\mathrm{Bl}_p(\mathbb{A}^2) =$$

$$= \left\{ \left[(x_1, x_2), (y_1 : y_2) \right] : x_1 y_2 = x_2 y_1 \right\}$$

In $\mathbb{P}^1 = \mathrm{bl}_p^{-1}(p) = \{ (0, [y_1 : y_2]) \}$

Consideriamo

$$U_1 = \{ y_1 \neq 0 \}$$

Poniamo coordinate

$$u = \frac{y_2}{y_1}$$ ← pendenza retta L per p

Equazione di $Bl_p(\mathbb{A}^2)$

$$x_1 y_2 = x_2 y_1$$

diventa

$$x_2 = u \cdot x_1$$

Equazione di C: $\longleftrightarrow$

$$\begin{cases} x_2^2 = x_1^2(x_1+1) \\ x_2 = u \cdot x_1 \end{cases}$$

$\longrightarrow$ sostituiamo $x_2 = u \cdot x_1$ nella 1ª eq.

$$u^2 \cdot x_1^2 = x_1^2 (x_1 + 1)$$

cioè:

$$x_1^2 \left(u^2 - (x_1 + 1) \right) = 0$$

Questo significa che

$$bl_p^{-1}(C) = E \cup \bar{C}$$

dove $E = \{ x_1 = x_2 = 0 \}$

curva eccezionale

$$\bar{C} = \{ u^2 - (x_1 + 1) = 0 \}$$

trasformata stretta $= \overline{bl_p^{-1}(C \setminus \{p\})}$

$$E \cap \bar{C} \longrightarrow \underline{P} \in C$$

calcolo:

$$E \cap \bar{C} \longleftrightarrow \begin{cases} u^2 = x_1 + 1 \\ x_1 = x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\longleftrightarrow \begin{cases} u^2 = 1 \\ x_1 = x_2 = 0 \end{cases}$$

u coord. su $E \cong \mathbb{P}^1$

$$u = \pm 1$$

$$E \cap \bar{C} = \{ Q_1, Q_2 \}$$

$$Q_1 = \{[[0,0],\ (1:1)]\}$$

pendenza $=1$

$$Q_2 = \{[0,0],\ (1:-1)\}$$

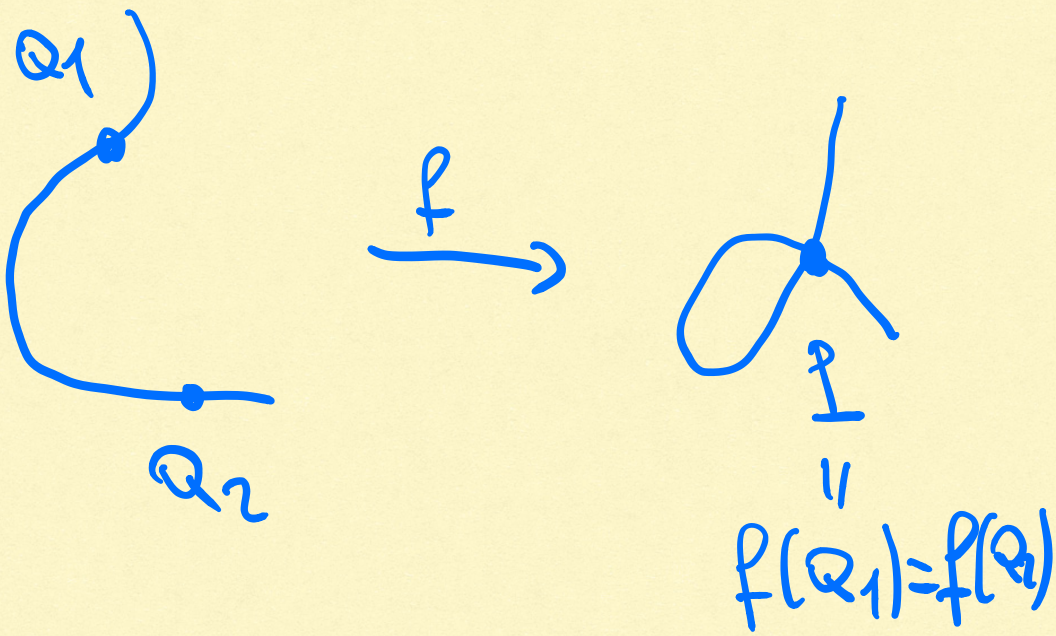
pendenza $=-1$

In questo caso:

$\bar{C}$ è liscia in Q_1, Q_2

&

$\bar{C} \xrightarrow{f} C$ mappa birazionale



Teorema Data $C \subset \mathbb{P}^2$ curva alg. irriducibile singolare

ALLORA:

$\exists$ successione finita di Blow-up

$\sigma : X^{(m)} \dashrightarrow X^{(n-1)} \longrightarrow \cdots \longrightarrow X^{(1)} \longrightarrow \mathbb{P}^2$

t.c. la trasformata stretta di $\sigma^{-1}(C)$ è una curva liscia

---

N.B. Lo scoppiamento è locale

$P \in \mathbb{P}^2$ considero ricoprimento $\{(U_0, V_1)\}$ di $\mathbb{P}^n$, $V_1 \not\ni P$

t.c. $\mathbb{A}^2 \simeq U_0 \ni P$

$$Bl_P(\mathbb{P}^2) := Bl_P(U_0) \cup V_1$$

$$Bl_P(\mathbb{P}^2) \setminus bl_P^{-1}(P) \simeq \mathbb{P}^2 \setminus \{P\}$$

$$bl_P^{-1}(P) \simeq \mathbb{P}^1$$

APPLICAZIONE 2:

Risoluzione del luogo di indeterminazione di una mappa birazionale

Esempio.

Sia $X = V(x_0x_3 - x_1x_2) \subset \mathbb{P}^3$

QUADRICA

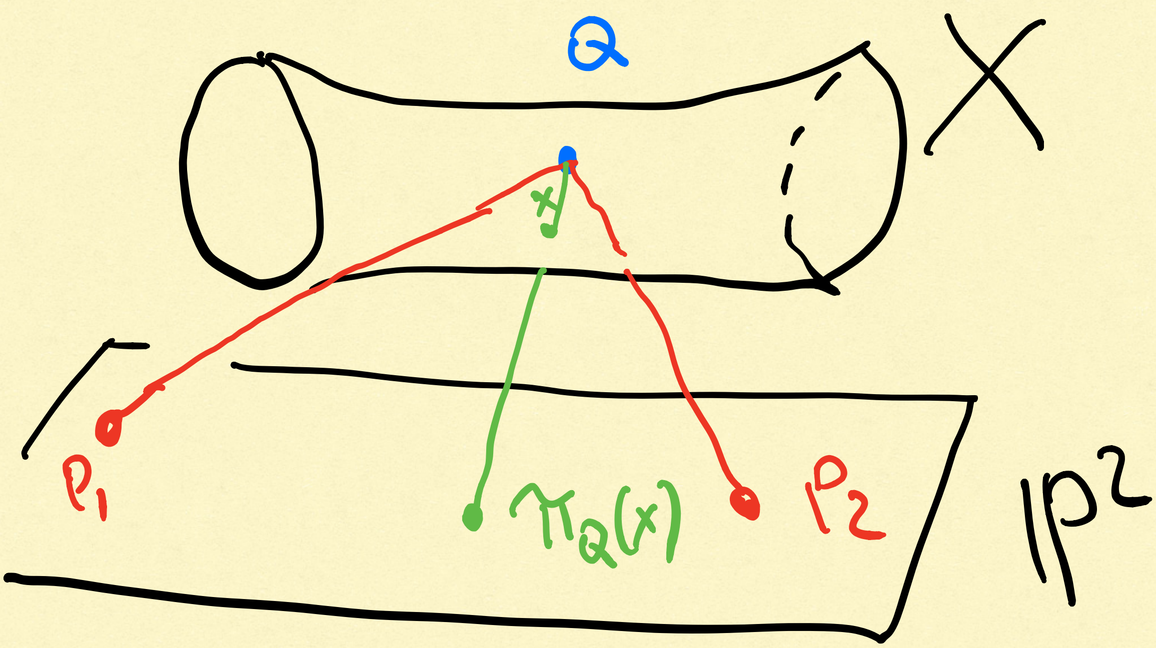
Consideriamo la proiezione di centro

$$Q = (0:0:0:1)$$

$$\pi_Q : \mathbb{P}^3 \setminus \{Q\} \longrightarrow \mathbb{P}^2$$

$$\pi_Q|_X : X \dashrightarrow \mathbb{P}^2$$

mappa birazionale definita in $X \setminus \{Q\}$



In coordinate

$\pi_Q|_X$ è la restrizione di

$$(x_0 : x_1 : x_2 : x_3) \longmapsto (x_0 : x_1 : x_2)$$

$\pi_Q|_X$ non è def. in Q

$\pi_Q|_X$ contrae due rette delle rigature di X passanti per Q

PROP.

$$Bl_Q(X) = \overline{\text{grafico di } \pi_Q|_X}$$

$$\subset Q \times \mathbb{P}^2$$