27/3/2020

Curve algebriche piane

$C \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$

$C \longleftrightarrow$ classe $[F]$

F polinomio omogeneo in $\mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$

$F \sim G \iff F = \lambda \cdot G$
$\lambda \in \mathbb{C}^*$

Possiamo scrivere

$$C = \sum m_i C_i$$

C_i componenti irriducibili

m_i molteplicità

Punti lisci e punti singolari

<u>Def.</u> $C \leftrightarrow [F]$

un punto $P \in \mathrm{supp}(C)$

si dice singolare se

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(P) = 0 \quad \text{per } i = 0, 1, 2$$

Un punto $P \in \mathrm{Supp}(C)$ si dice liscio se

$$\exists \ i \ \text{ t.c. } \ \frac{\partial F}{\partial x_i}(P) \neq 0$$

n.b. $\mathrm{Supp}(C) = V(F)$

Spazio Tangente
a C in P

- P è singolare per C
  $\Rightarrow$ Sp. tangente a C
  in P = PIANO

- P è liscio per C
  $\Rightarrow$ Sp. tangente a C
  in P = retta
  di eq.

$$\sum_{i=0}^{2} \frac{\partial F}{\partial x_i}(P) \cdot x_i = 0$$

$$C = [F]$$

$$\mathrm{Supp}(C) = V((F))$$

retta tg $= V\left(\left\langle \nabla F(P), \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\rangle\right)$

<u>OSS</u>. Teorema di Eulero:

$$\sum x_i \frac{\partial F}{\partial x_i} = (\deg F) \cdot F$$

$\Longrightarrow$ P è singolare per $C = [F]$

$$\iff \begin{cases} F(P)=0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_i}(P)=0 \quad i=0,1,2 \end{cases}$$

Eulero: E' suff. verificare
3 di queste
4 condizioni

$P \in C$ punto $\begin{cases} \text{liscio} \\ \text{singolare} \end{cases}$

è una <u>proprietà LOCALE</u>

Restrizione ad un aperto

$$U_0 = \{ x_0 \neq 0 \} \subset \mathbb{P}^2$$

$$c_0^{-1} : U_0 \xrightarrow{\sim} \mathbb{A}^2$$

sia $C = [F]$

sia $\bar{P} \in \operatorname{Supp}(C) \cap U_0$

$$\bar{P} = (1 : a_1 : a_2)$$

Poniamo $C_0 = $ "$C \cap U_0$"

$C_0 \leftrightarrow [D(F)]$ deomog. di F

$$\mathrm{supp}(C_0) = V(D(F))$$

$$\mathcal{C}_0^{-1} : \bar{P} \longmapsto P = (Q_1, Q_2)$$

Consideriamo $P \in$ curva affine $\overset{\shortparallel}{C_0}$

Scriviamo $D(F) = f$

<u>Def</u>.

P liscio per $C_0 \iff$

$\dfrac{\partial f}{\partial x_i} \neq 0$ per almeno un $i \in \{1, 2\}$

Retta tangente a C_0 in $\underline{P}$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(P)(x_1 - Q_1) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(P)(x_2 - Q_2) = 0$$

PROP

i) $\bar{P}$ singolare $\iff$ $P = \varphi_0^{-1}(\bar{P})$ singolare

ii) $\varphi_0\left(T_{\underline{P}}(C_0)\right) = T_{\bar{P}}(C) \cap U_0$

retta tangente a P

retta tangente a $\bar{P}$

DIM

f singolare $\iff \begin{cases} f(P)=0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(P)=0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2}(P)=0 \end{cases}$

per $C_0 = V(f)$

$$\iff \begin{cases} F(1,P)=0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_1}(1,P)=0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_2}(1,P)=0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_0}(1,P)+\displaystyle\sum_{i=1}^{2} a_i \dfrac{\partial F}{\partial x_i}(1,Q)=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial F}{\partial x_0}(1, P) = 0$$

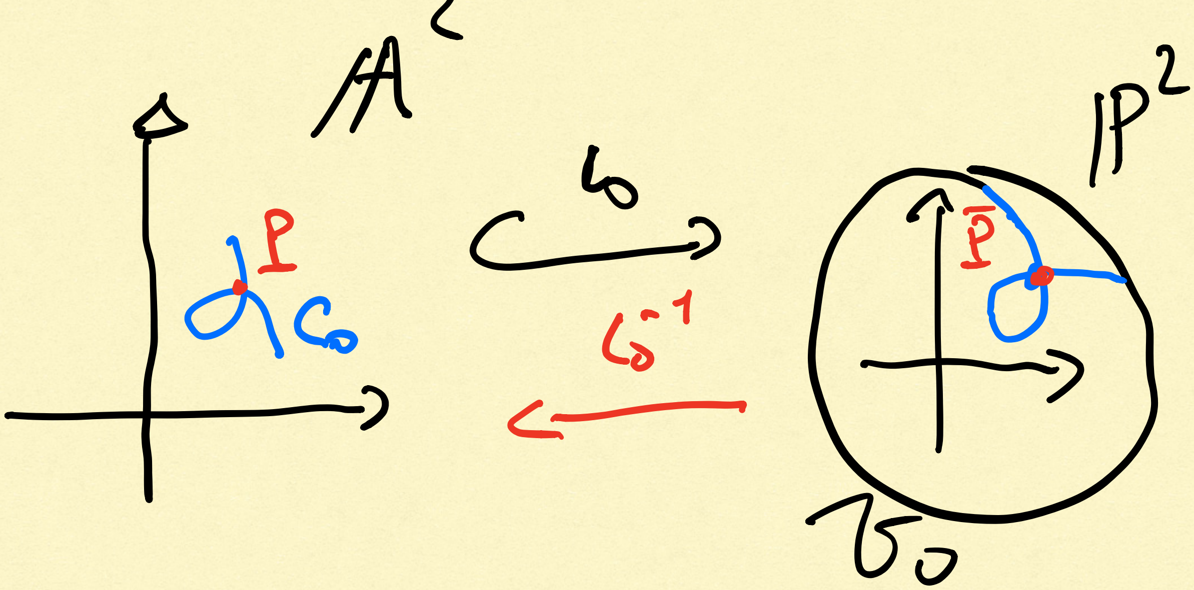
RETTA Tangente:

$$T_P(C_0) = \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial f}{\partial x_i}(P)(x_i - Q_i) = 0$$

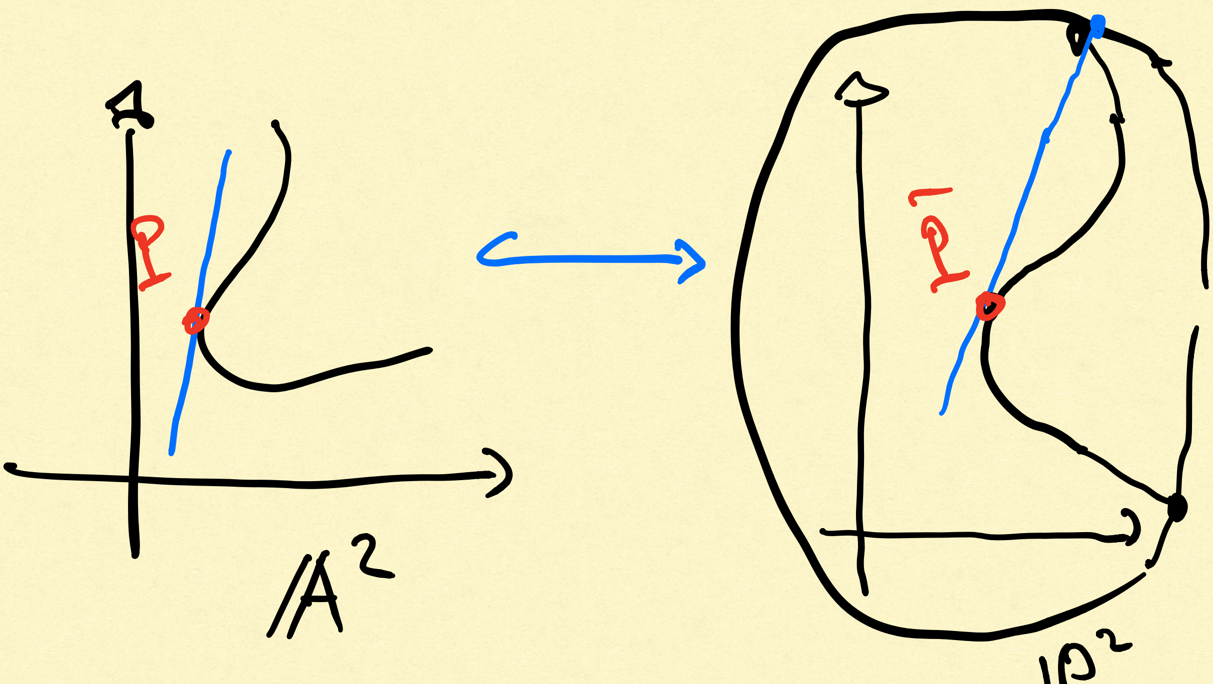
$$= \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial F}{\partial x_i}(1,P) \cdot x_i - \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial F}{\partial x_i}(1,P) \cdot Q_i = 0$$

$$= \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial F}{\partial x_i}(1,P)\, x_i + \frac{\partial F}{\partial x_0}(1,P) \cdot 1 + \underbrace{\deg F \cdot F(1,P)}_{=0}$$

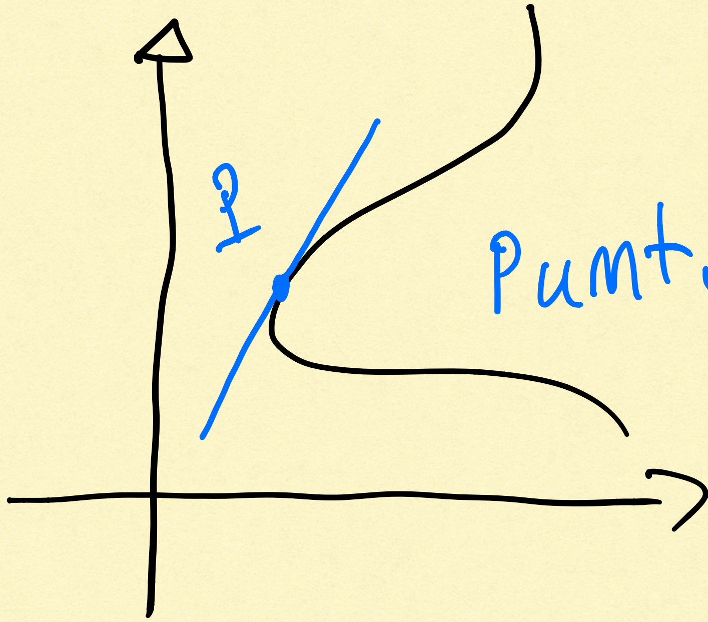
$$\Rightarrow \quad \sum_{i=0}^{2} \frac{\partial F}{\partial x_i}(1,P) \cdot x_i = 0 \quad \square$$



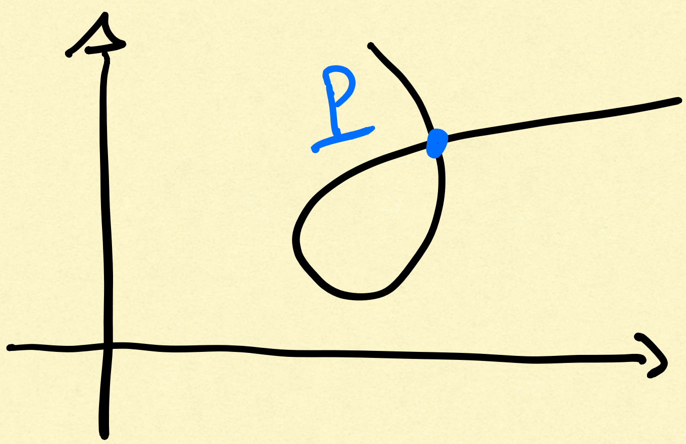
$\mathbb{A}^2$
P
C_0
ι_0
ι_0^{-1}
$\mathbb{P}^2$
$\bar{P}$
$\bar{C}_0$



P
$\mathbb{A}^2$
$\bar{P}$
$\mathbb{P}^2$



Punto liscio



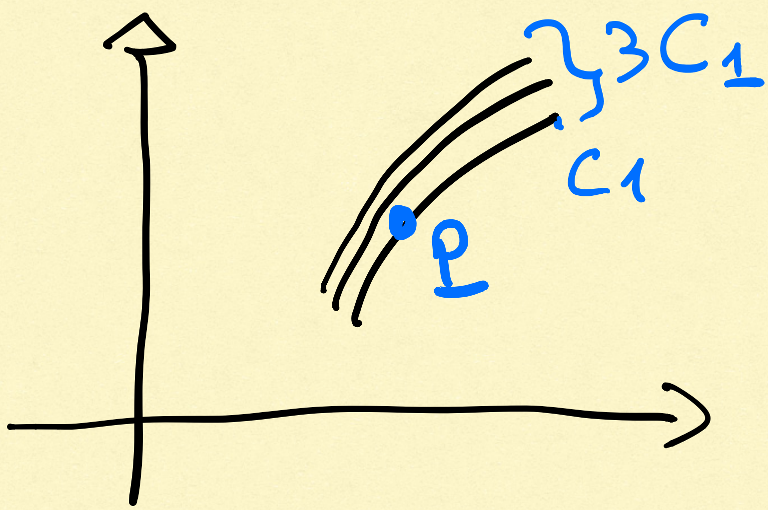
Punto singolare

OSS. $P \in \mathrm{Supp}(C)$

&

$$\mathrm{molt}_P(C) > 1$$

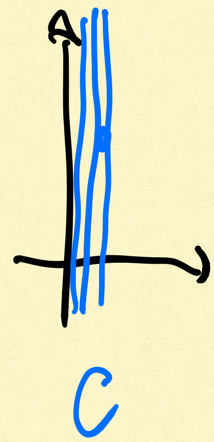
cioè $C = mC_1 + C'$



$\Rightarrow$ P è singolare per C

e.g. $C = [F]$

$F = x_1^3$



Intersezione tra curve piane

§1. INTERSEZIONE curve & retta

$$C = [F] \qquad \mathrm{supp}(C) = V(F)$$

r = retta per P, Q

$$P = (a_0, a_1, a_2)$$
$$Q = (b_0, b_1, b_2)$$

$$r : P * Q = \lambda P + \mu Q$$
$$\lambda, \mu \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0,0\}$$

$$r : \begin{cases} x_0 = a_0 \lambda + b_0 \mu \\ x_1 = a_1 \lambda + b_1 \mu \\ x_2 = a_2 \lambda + b_2 \mu \end{cases}$$

$(\lambda, \mu) \in \mathbb{P}^1$

$$C \cap r \iff$$

$$F(\lambda P + \mu Q) = 0$$

$$\|$$

$$F(a_0\lambda + b_0\mu,\ a_1\lambda + b_1\mu,\ a_2\lambda + b_2\mu)$$

polinomio omogeneo in (λ, μ)

$\equiv 0$ se $r \subset C$

$\deg = \deg F$ se $r \not\subset C$

OVVERO:

$F(\lambda P + \mu Q)$ pol. omogeneo

di grado $= \deg(F)$

$\Downarrow$

$\exists$ $\deg(F)$ soluzioni

(λ_i, μ_i) contate con molteplicità

per il Teo. fondamentale algebra (in versione su $\mathbb{P}^1$)

DEF. molteplicità di intersezione

Siano $\bar{P} \in \mathbb{P}^2$

$C = [F]$ curva

r = retta

molteplicità di intersezione di C e r in $\bar{P}$

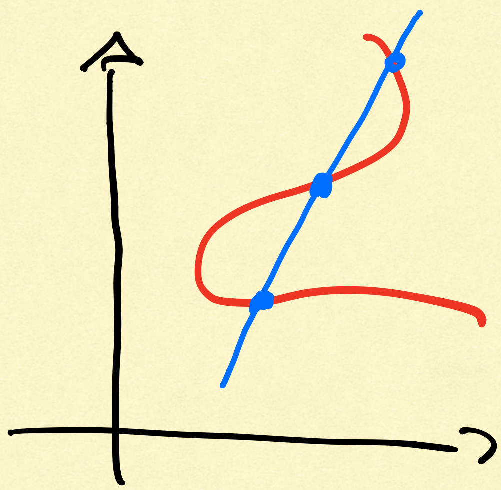
notazione: $I(C, r, \bar{P})$

$$\bar{e} = \begin{cases} 0 & \text{se } \bar{P} \notin C \cap r \\ \infty & \text{se } \bar{P} \in r \ \& \ r \subset C \\ m & \text{se } \bar{P} \in C \cap r, \ r \not\subset C \end{cases}$$

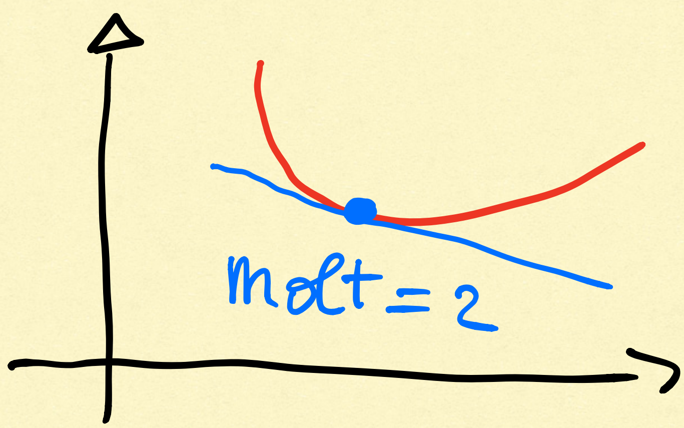
$\bar{P} = \lambda_0 P + \mu_0 Q$

e (x_0, y_0) radice di
molt. $= m$

Esempi :



3 p.ti
con
molt. $= 1$



Restrizione ad un aperto affine

Sia $P \in C \cap r$

$P \in U_0 = \{x_0 \neq 0\}$

$P = (a_1, a_2) \in \mathbb{A}^2 = \varphi_0^{-1}(U_0)$

$C_0 = [D(F)]$, $D(F) = f$

$C_0 \leftrightarrow f(x_1, x_2) = 0$

$$\begin{array}{l} r_0 \leftrightarrow P + t \cdot v \\ \parallel \\ r \cap U_0 \end{array}$$

$$C_0 \cap r_0 \iff C \cap r \cap V_0$$

$$\iff \begin{cases} f(x_1, x_2) = 0 \\ r: \; P + t \cdot v \end{cases}$$

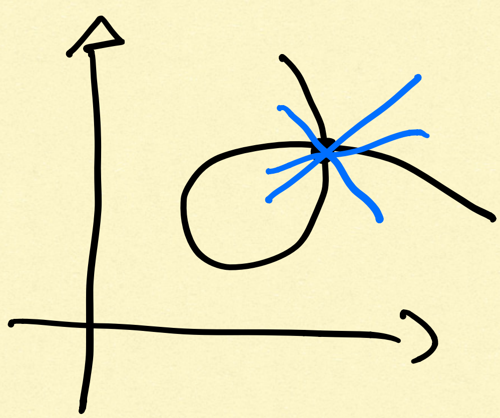
$$\iff f\left(e_1 + t v_1,\; e_2 + t v_2\right) = 0$$

pol. nella variabile t

DEF. moltepli cità di un punto

Sia $P \in C$

$$\mathrm{molt}_P(C) = \min_{r \ni P} \Big(I(C, r, P) \Big)$$



P si dice p.to doppio se $\mathrm{molt}_P(C) = 2$

triplo se
$mult_p(C) = 3$
ecc...

<u>OSS</u>. In coordinate affini $U_0 \xrightarrow{\sim} \mathbb{A}^2$

Poniamo $P = (0,0)$

$$x = \frac{x_1}{x_0}, \quad y = \frac{x_2}{x_0}$$

$$\operatorname{supp}(C_0) = V\left(f(x,y)\right) \qquad f = D(F)$$

Scriviamo f in $\sum f_i$ omogenei

in $\underline{P} = (0,0)$

$$f(x,y) = \underset{\substack{\shortparallel \\ 0}}{f_0} + f_1 + f_2 + \dots + f_d$$

f_i omog. di grado i

<u>PROP</u>. $P = (0,0) \in C_0 = C_0^{-1}(C \cap U_0)$

① P p.to liscio $\Leftrightarrow f_1 \neq 0$

② $\text{molt}_P(C) = m \Leftrightarrow$

$$f_i \equiv 0 \quad \forall\, i < m$$
$$f_m \neq 0$$

dim [Esercizio]

Segue dalla regola della catena. $\square$

---

eq.$^{\text{nte}}$

$\mathrm{molt}_p(C) = m \iff$

Tutte le derivate parziali di ordine $< m$ sono $= 0$ in $\underline{P}$

$\exists$ derivata di ordine $m \neq 0$

Sia $P \in C$ p.to singolare

$\Rightarrow$ Sp. Tangente = PIANO

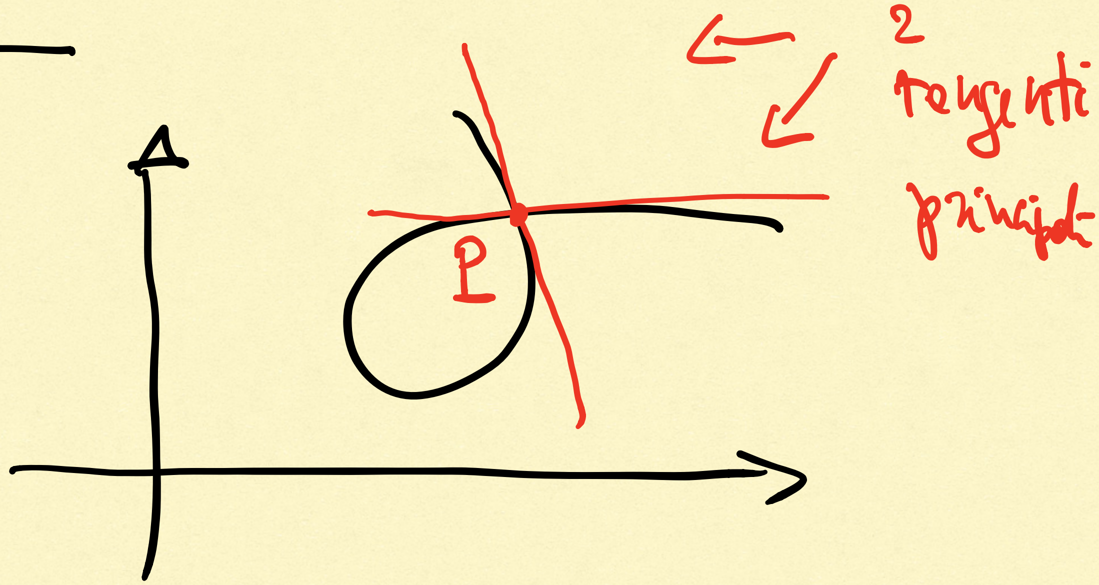
Però possiamo raffinare la nozione di tangente

↳ TANGENTE Principale

<u>Def</u>. Sia $P \in C$

r retta si dice tangente principale a C se

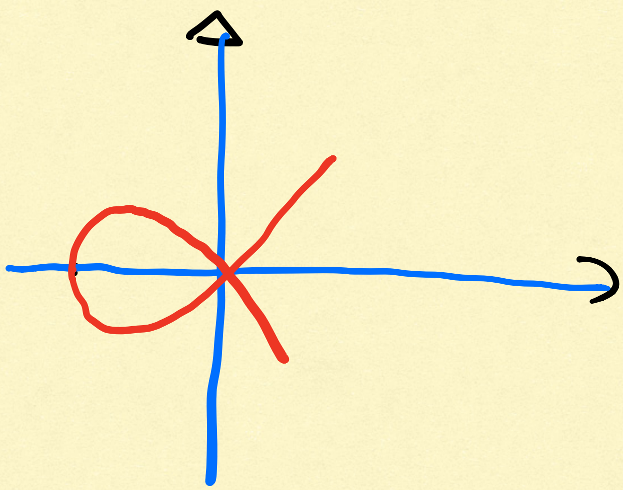
$$I(C, r, P) > \text{molt}_P(C)$$



Esempi

$C_0 = [f] \qquad f: \; y^2 = x^2 + x^3$

$P = (0,0)$ è p.to singolare



$r: \begin{cases} x = t \\ y = pt \end{cases}$

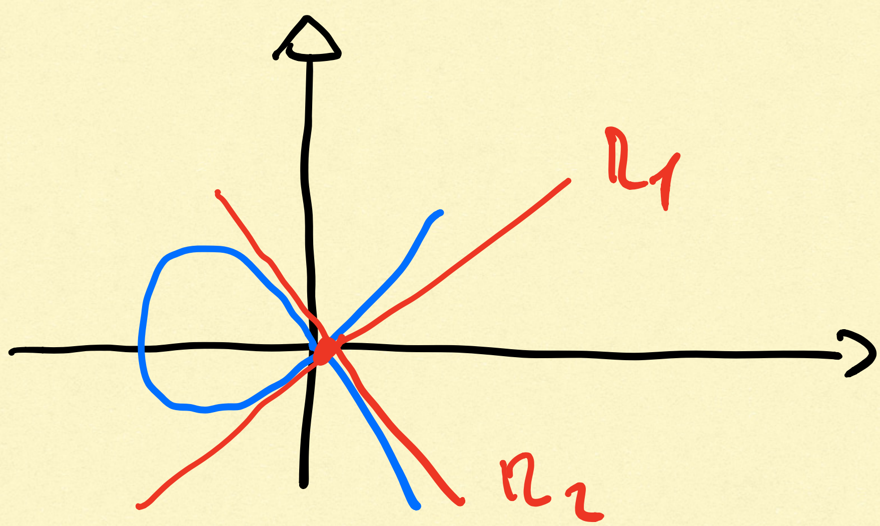
$r \cap C: \quad f(t, pt) = 0$

$\Leftrightarrow \quad (pt)^2 - t^2 - t^3 = 0$

$t=0$ radice con molt > 2

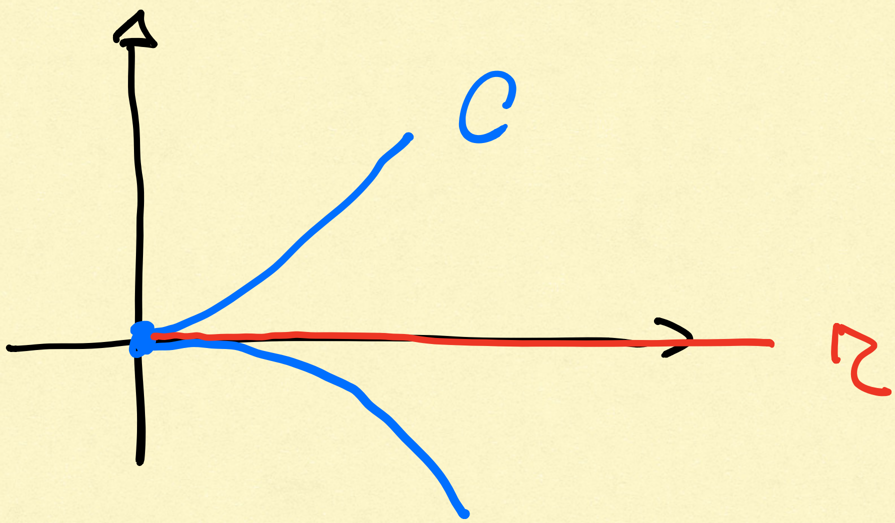
$\Leftrightarrow \quad p = 1, -1$

pendenze
rette tangenti
principali a C



Esempio 2:

$C = [f] \qquad y^2 = x^3$



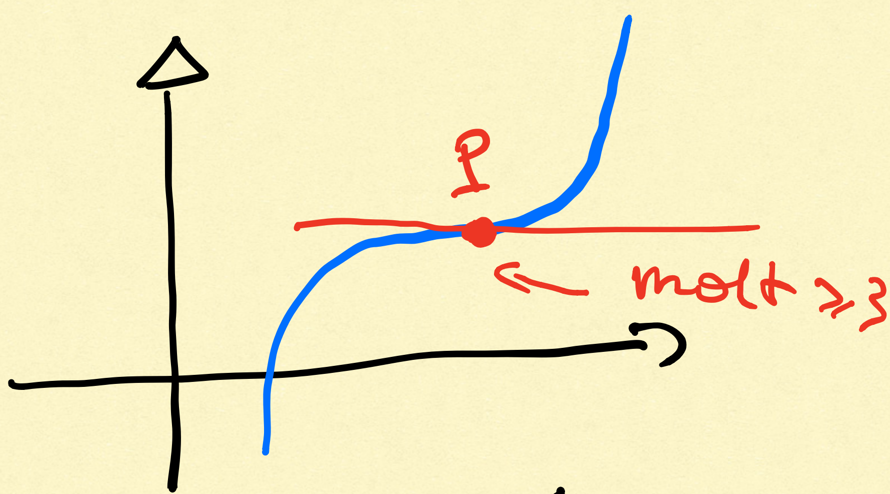
$\exists!$ tg. principale

$r : (y = 0)$

<u>DEF.</u> $P \in C$ si dice punto di flesso SE

- P p.to liscio per C
- Posto r = retta tg. a C in P si ha

$$I(C, r, P) \geq 3$$



PROP. $P \in C^{=[F]}$ p.to liscio

P punto di flesso

$\Updownarrow$

Hessiano di F

$$H_F = \det \begin{vmatrix} F_{x_0x_0} & F_{x_0x_1} & F_{x_0x_2} \\ & \ddots & \\ & & F_{x_2x_2} \end{vmatrix}$$

$= 0$ in P

FORMA di Weierstrass di cubiche piane (liscie)

$C = V(F)$

$F \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]_3$

F irriducibile

C liscia ($\forall P \in C$ P p.to liscio)

FATTO: $\deg F \geq 3$
$\Rightarrow \exists$ p.to di flesso

Sia $C = V(F)$

scegliamo coordinate t.c.

$P = (0:0:1)$

retta tg. a C in P

$r: (x_0 = 0)$

OSS. $x_0 \not| F$

$\Rightarrow$ Posso scrivere

$$F(x_0, x_1, 1) = D_{x_2}(F)$$

$$= x_0 + x_0(ax_0 + bx_1) + g_3(x_0, x_1)$$

OVVERO

$$F(x_0,x_1,x_2) = x_0 x_2^2 + x_0 x_2(a x_0 + b x_1) + g_3$$

$\Big\downarrow$ Deomog. rispetto a x_0

$$F(1,x_1,x_2) = x_2^2 + x_2(a + b x_1) + g_3(1,x_1)$$

Ponendo $x_1 = x$

$$\frac{1}{2}(a + b x_1) + x_2 = y$$

otteniamo

$$f(x,y): \quad y^2 + g_3(x)$$

CIOE' : in coordinate
(x, y)

C può essere scritta

$$C = V(f)$$

$$f: y^2 + f_3(x)$$

Forme di Weierstrass