26/3/2020

$\mathbb{A}^n$

$\mathbb{P}^n$

topologie di Zariski

$\{$CHIUSI$\} \longleftrightarrow \{$Ideali radicali (OMOGENEI)$\}$

$\{$CHIUSI irriducibili$\} \longleftrightarrow \{$Ideali PRIMI (OMOGENEI$\}$

$\mathbb{A}^n$, $\mathbb{P}^n$ con la topologia di Zariski

SONO SPAZI TOPOLOGICI NOETHERIANI

<u>DEF</u> X sp. top. con topologia τ si dice Noetheriano SE VALE

DCC sui chiusi

descending chain condition

OVVERO:

Date catene discendente di chiusi

$$Y_1 \supseteq Y_2 \supseteq Y_3 \supseteq \dots$$

$\Rightarrow$ La catena si stabilizza

ovvero $\exists$ n t.c.

$$Y_n = Y_{n+1} = \dots$$

<u>OSS.</u> $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ anello noetheriano

$$\Updownarrow$$

Top. di Zariski è noetheriana

$$V(I_1) = Y_1 \supseteq Y_2 = V(I_2) \supset \dots$$

$$\Updownarrow$$

$$I_1 \subseteq I_2 \subset \dots$$

DECOMPOSIZIONE in IRRIDUCIBILI

Def X c sp. top. Noetheriano si dice IRRIDUCIBILE SE

$X = X_1 \cup X_2$ X_1, X_2 chiusi

allora $X = X_1$ oppure $X = X_2$

X chiuso $\neq \emptyset$ si dice RIDUCIBILE
se $\exists$ X_1, X_2 chiusi propri $(\neq \emptyset, X)$

t.c. $X = X_1 \cup X_2$

---

decomposizione in irriducibili

$$\Updownarrow$$

$$X = X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_r$$

minimale $\Leftrightarrow$ $X_i \not\subseteq X_j$ $\forall i, j$

Teorema X c sp. top.
CHIUSO Noetheriano

$\Rightarrow \exists\,!$ (a meno di permutazione)

DECOMPOSIZIONE MINIMALE di X
in chiusi irriducibili

Lemma. X chiuso irriducibile
Se $X \subseteq Z_1 \cup \dots \cup Z_r$ Z_i chiusi
allora $\exists\, j$ t.c. $X \subseteq Z_j$

dim Lemma

X irrid. $\Rightarrow$ posso scrivere
$X \subset Z_1 \cup \dots \cup Z_r$

$$X = X \cap \left(\bigcup_J Z_J \right)$$
$$= \bigcup_J \left(X \cap Z_J \right)$$

$$\Rightarrow \quad X = X \cap Z_J$$

per qualche J

poiché X irriducibile

$\square$

dim. Teorema

Esistenza

X irriducibile $\to$ O.K.

X riducibile $\Rightarrow$ $X = A \cup B$

se A, B irriducibili $\to$ O.K.

Altrimenti supponiamo
A riducibile

Poniamo $A \doteq X_1$

$$X_1 = X_2 \cup X_3$$

Iterando il procedimento possiamo supporre X_3 riducibile

continuando nelle decomp.

Se non $\exists$ indice $n = 2k+1$ t.c. X_{2k+1} è irriducibile

OTTENIAMO una catena infinita di chiusi

$$X \underset{\neq}{\supset} X_1 \underset{\neq}{\supset} X_3 \underset{\neq}{\supset} \dots \underset{\neq}{\supset} X_{2k+1} \supseteq \dots$$

assurdo per Noeth.

Unicità:

supponiamo P.A.

$$X = X_1 \cup \_\_ \cup X_n \qquad X_i \text{ irrid.}$$
$$\parallel$$
$$Z_1 \cup \_\_\_ \cup Z_s \qquad Z_j \text{ irrid.}$$

Allora:

$$X_1 = X_1 \cap X = X_1 \cap \left(\bigcup_j Z_j \right)$$

X_1 irrid. $\Rightarrow$ Per il lemma

$\exists\ J$ t.c. $X_1 \subseteq Z_J$

Consideriamo Z_J e ripetiamo il ragionamento:
per il lemma

$$\exists \; X_{i_J} \text{ t.c. } Z_J \subseteq X_{i_J}$$

ovvero

$$X_1 \subseteq Z_J \subseteq X_{i_J}$$

Per minimalità

$$X_1 = Z_J = X_{i_J}$$

$\square$

<u>Prop</u> X sp. top. Noetheriano

$\exists$ U, V aperti $\neq \emptyset$

t.c. $U \cap V = \emptyset$

$\Updownarrow$

X è riducibile

eq.$^{\text{nte}}$

$\forall$ U, V aperti $\neq \emptyset$

$U \cap V \neq \emptyset$

$\Updownarrow$

X è irriducibile

dim $\Downarrow$

$$U \cap V = \emptyset \iff X = U^c \cup V^c$$

U^c, V^c chiusi propri

cioè X riducibile

$\Uparrow$

$$X = X_1 \cup X_2$$

$$X^c = \emptyset = X_1^c \cap X_2^c$$

aperti $\neq \emptyset$

$\square$

COR. X sp. top. Noeth.
irriducibile

$U \subset X$ aperto $\neq \emptyset$

$\Rightarrow U$ è denso

COR. 2 X sp. top. Noeth.

$X = X_1 \cup \dots \cup X_2$

decomposizione minimale in
IRRIDUCIBILI

$U \subset X$
aperto denso $\Rightarrow U \cap X_i \neq \emptyset$
$\forall i$

dim COR 2

$$V = \bigcup (X_i \cap V)$$

$$\overline{V} = \bigcup \left(\overline{X_i \cap V}\right) = \underset{\substack{\shortparallel \\ X}}{\bigcup X_i}$$

se e solo se

$$V \cap X_i \neq \emptyset$$

$\square$

Def. $Y \subseteq X$ sottoinsieme

Y irriducibile $\overset{\cdot}{\underset{\cdot}{\Longleftrightarrow}}$

$\overline{Y}$ è irriducibile

dove $\overline{Y}$ = chiusura di Y

$$= \bigcap \{ Z \text{ chiusi} : Z \supseteq Y \}$$

Prop. X, Y sp. top. Noetheriani

$f: X \to Y$ continua

X irriducibile $\Rightarrow$ $f(X)$ irriducibile

dim

Per def. $f(X)$ irrid.

$\Updownarrow$

$\overline{f(X)}$ è irrid.

Supponiamo P.A.

$$\overline{f(X)} = Y_1 \cup Y_2$$ chiusi propri

Poniamo $X_i \doteq f^{-1}(Y_i)$ $i=1,2$

Allora si ha

$$X \subseteq X_1 \cup X_2$$

Lemma $\Rightarrow$ $X \subseteq X_1$

Quindi:

$$f(X) \subseteq f(X_1) \overset{\text{per def.}}{=}$$

$$= f \circ f^{-1}(Y_1) \subseteq Y_1$$

ovvero

$$\overline{f(X)} \subseteq \overline{f(X_1)} \subseteq Y_1$$

conclusione

$$\begin{array}{l} \overline{f}(X) \subseteq Y_1 \\ \parallel \\ Y_1 \cup Y_2 \end{array}$$

$Y_1 \cup Y_2$ chiusi propri $\longrightarrow$ ASSURDO

$\square$

<u>Cor</u>. $X \subseteq \mathbb{A}^n$ chiuso irrid.

$\Downarrow$

$\overline{X} \subseteq \mathbb{P}^n$ chiuso irrid.

<u>dim</u> $\iota_0|_X : X \hookrightarrow \mathbb{P}^n$ mappa continua

$$\iota_0(X) = \overline{X} \cap U_0$$

dove $U_0 = \{x_0 \neq 0\} \subset \mathbb{P}^n$

$\cong$

$\iota_0(\mathbb{A}^n)$

Quindi: $L_0(X)$ irid.

$$\Updownarrow$$

$$\overline{L_0(X)} \text{ irid.}$$

$$\parallel$$

$$\overline{X}$$

$$\square$$

INTERLUDIO:

curve algebriche piane

Idea di Riemann per rappresentare una curva algebrica piana

$$C \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$$

$$C = V(F) \qquad F \in \mathbb{K}[x_0, x_1, x_2]_d$$

Esempio:

$$F: \quad x_0 x_2^2 - x_1(x_1 - x_0)(x_1 - \lambda x_0)$$

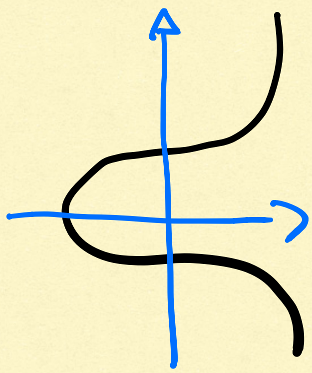
$$\lambda \neq 0, 1$$

$D(F)$: poniamo $y = x_2$, $x = x_1$

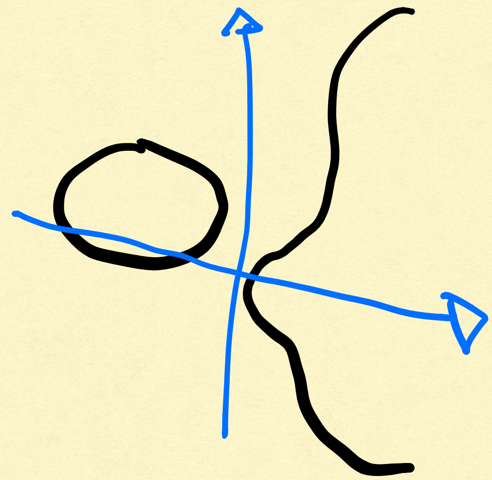
abbiamo l'equazione in $\mathbb{A}^2$

$$y^2 = x(x-1)(x-\lambda)$$

DISEGNO in $\mathbb{R}^2$:



oppure



Però noi vogliamo vederla come curva $\subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$

CONSIDERIAMO la proiezione "sull'asse delle x"

$$p : C \longrightarrow \mathbb{P}^1$$

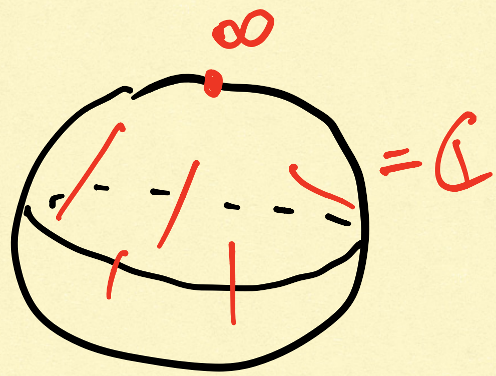
$$(x_0 : x_1 : x_2) \longmapsto (x_0 : x_1)$$

oss:

$$\mathbb{P}^1 = \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \underset{\substack{\cup \\ \{(1 : \frac{x_1}{x_0})\} \\ \| \\ x}}{\mathbb{C}} \cup \underset{\substack{\| \\ \{(0:1)\}}}{\{\infty\}}$$

omeo a

S^2



Consideriamo $U_0 = \{(1 : x_1 : x_2)\} \subset \mathbb{P}^2$

$$U_0 \cong \{(x, y)\} = \mathbb{A}^2$$

Vogliamo studiare p

$$p_{|\mathcal{U}_0} : C \cap \mathcal{U}_0 \longrightarrow \mathbb{A}^1$$
$$(x,y) \longmapsto x$$

$\forall \; x \neq 0, 1, \lambda$

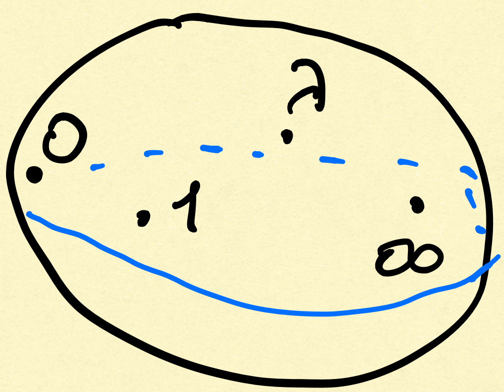
$$p_{|\mathcal{U}_0}^{-1}(x) = \pm\sqrt{x(x-1)(x-\lambda)}$$

ovvero $\forall \; x \neq 0, 1, \lambda$

$$p_{|\mathcal{U}_0}^{-1}(x) = \{x_1, x_2\}$$

Consideriamo $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \lambda, \infty\}$

dove $0 = (1:0)$
$1 = (1:1)$
$\lambda = (1:\lambda)$
$\infty = (0:1)$



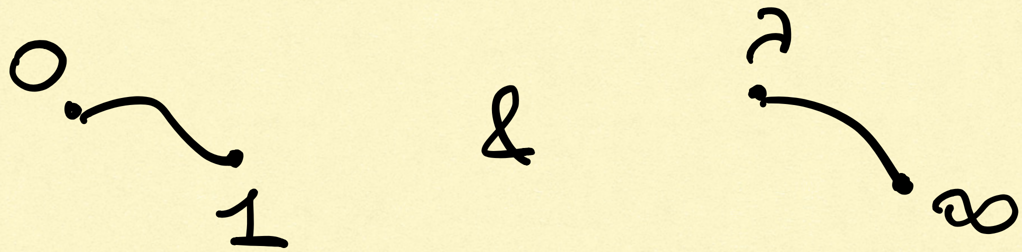
$= \mathbb{P}^1$

$p^{-1}\left(\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \lambda, \infty\}\right) =$

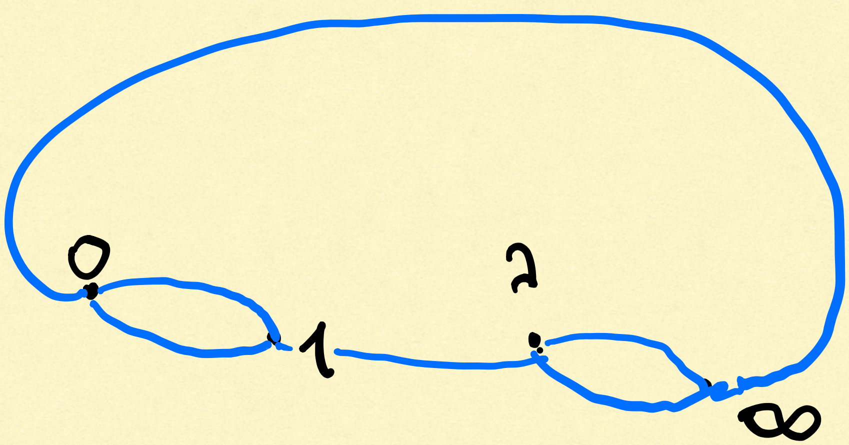
2 copie di $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \lambda, \infty\}$

Idea di Riemann:

facciamo 2 tagli



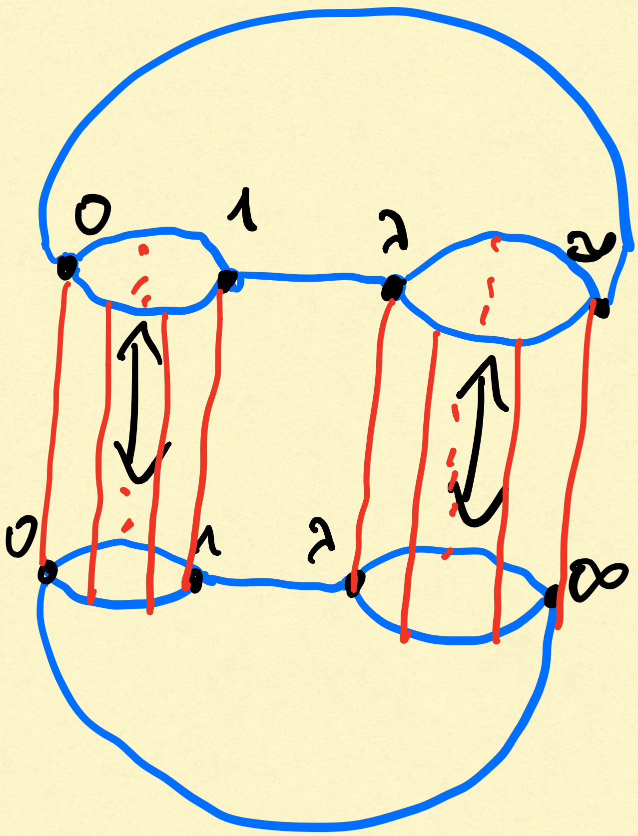
e allarghiamo il taglio



$= \mathbb{P}^1$ con i 2 tagli

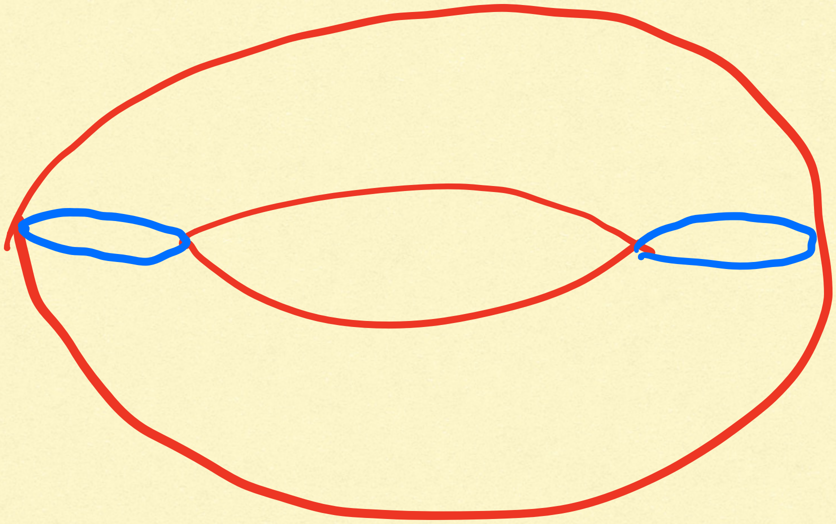
consideriamo

2 copie di $\mathbb{P}^1$ con i tagli



Idea incollare le 2 circonferenze che corrispondono ai tagli

DAL punto di vista topologico

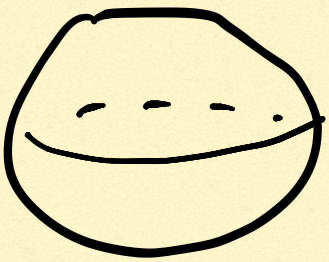


Toro

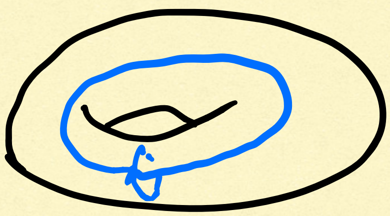
sup. orientabile compatta connessa di genere $= 1$

Superfici connesse compatte orientabili

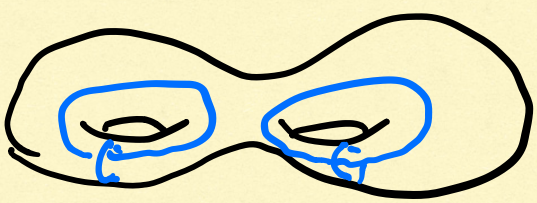
$\Updownarrow$



sfera S^2 genere = 0



Toro genere = 1



genere = 2

genere = 3

In $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$

(si può fare in $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$
con $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{K}}$)

una curva C

$\Updownarrow$

classe di equazione $F \in \mathbb{K}[x_0, x_1, x_2]_d$

classe: $F \sim G$

$\Updownarrow$ def.

$\exists \lambda$ t.c. $F = \lambda \cdot G$

Consideriamo $C \subset \mathbb{P}^2$

come ipersuperficie

supporto di $C = V(F)$

C la vediamo con molteplicità

$$F = f_1^{m_1} \cdot \ldots \cdot f_s^{m_s}$$

$$\Downarrow$$

$$C = m_1 C_1 \cup \ldots \cup m_s C_s$$

componente irriducibile
con la sua molteplicità

NOTAZIONE: $C = \sum m_i C_i$

C_i componenti irriducibili

m_i molteplicità

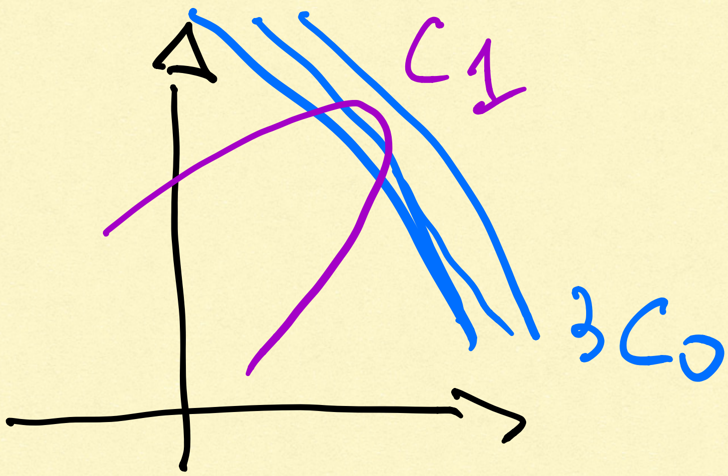
Esempio:

$$F = X_0^3 \cdot (X_1^2 - X_2 X_0)$$

$$C = 3c_0 + c_1$$

dove $c_0 = V(X_0^3) = V(X_0)$

$c_1 = V(X_1^2 - X_0 X_2)$



Quante sono le curve di grado d?

C curve di grado d

$\updownarrow$

classe $[F] \in \mathbb{K}[x_0, x_1, x_2]_d$

$$\left\{ \underset{\substack{\text{di} \\ \text{grado } d}}{C} \right\} \longleftrightarrow \mathbb{P}\left(\mathbb{K}[x_0, x_1, x_2]_d\right)$$

$$\dim = \binom{2+d}{2} - 1$$

$$= \frac{(d+2)(d+1)}{2} - 1$$

$$= \frac{d\,(d+3)}{2}$$

Esempi:

$$\underset{\substack{\parallel \\ \text{curve di grado 2}}}{\{\text{coniche}\}} \simeq \mathbb{P}^5$$

$$\underset{\substack{\parallel \\ \text{curve di} \\ \text{grado 3}}}{\{\text{cubiche}\}} \simeq \mathbb{P}^9$$