24/4/2020

$$\nu_{2,2} : \mathbb{P}^2 \longrightarrow \mathbb{P}^5$$

$$(x_0 : x_1 : x_2) \longmapsto (x_0^2 : x_0x_1 : x_0x_2 : x_1x_2 : x_2^2)$$

$$\hookrightarrow \begin{pmatrix} x_0^2 & x_0x_1 & x_0x_2 \\ x_0x_1 & x_1^2 & x_1x_2 \\ x_0x_1 & x_1x_2 & x_2^2 \end{pmatrix}$$

Possiamo considerare

$\mathbb{P}^2$ con coordinate

$$(z_{00}, z_{01}, z_{02}, z_{11}, z_{12}, z_{22})$$

$$S = \left\{ z_{ij} \in \mathbb{P}^5 : \operatorname{rk}(z_{ij}) \leq 1 \right\}$$
$$0 \leq i, j \leq 2$$

$$(z_{ij}) = \begin{pmatrix} z_{00} & z_{01} & z_{02} \\ z_{01} & z_{11} & z_{12} \\ z_{02} & z_{12} & z_{22} \end{pmatrix}$$

$$\underline{z_{ij} = x_i \cdot x_j}$$

$$v_{2,2} : \mathbb{P}^2 \xrightarrow{\simeq} S \subset \mathbb{P}^5$$

In carte:

$$U_0, U_1, U_2 \subset \mathbb{P}^2$$

$$U_i = \{ x_i \neq 0 \}$$

Consideriamo

$$S \cap V_0, \; S \cap V_1, \; S \cap V_2$$

dove $V_i = \{ z_{ii} \neq 0 \}$

$\{ S \cap V_i \}_{i=0,1,2}$ è

ricoprimento aperto di S

$$\nu_{2,2}|_{U_i} : U_i \xrightarrow{\sim} V_i$$

caso $U_0 = \{(1, x_1, x_2)\}$

$$(1, x_1, x_2) \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_2 \\ x_1 & * & * \\ x_2 & * & * \end{pmatrix}$$

$\nu_{1,2}|_{\sigma_i}$ è iniettiva

$(\nu_{1,2})^{-1}|_{V_i}$ riga $i \longrightarrow \sigma_i$

Ad esempio:

$V_0 = \{(1, z_{01}, z_{02}, z_{11}, z_{12}, z_{22})$

matrice: $\begin{pmatrix} 1 & z_0 & z_1 \\ z_0 & & \\ z_1 & & \end{pmatrix}$

riga $1 \longmapsto \sigma_0$

mappa è ben definita poiché $\varphi(z_{ij}) = 1$

STUDIO di

$\nu_{n,d}$

$$\nu_{n,d} : \mathbb{P}^n \longrightarrow \mathbb{P}^N$$

$$N = \binom{n+d}{d} - 1$$

$$x \longmapsto x^I \qquad |I| = d$$

I multiindice

$I \in \mathbb{N}^{n+1} \quad I = \begin{pmatrix} i_0 \\ | \\ i_n \end{pmatrix}$

$|I| = \sum i_j = d$

mappa

$x = (x_0, \text{—}, x_n) \longmapsto x^I = \left(x_0^{i_0} \cdot \text{—} \cdot x_n^{i_n} \right)$

$\sum i_j = d$

In $\mathbb{P}^N$ consideriamo

coordinate z_I

I multiindice

$\nu_{n,d}: \quad z_I = x^I$

consideriamo

$$\Sigma_{n,d} \subset \mathbb{P}^N$$

$$\Sigma_{n,d} := \left\{ z_I : \begin{array}{l} I \in \mathbb{N}^{n+1} \\ |I| = d \end{array} \;\middle|\; z_I \text{ verificano eq. (1)} \right\}$$

eq(1): $I + J = I' + J' \Rightarrow z_I \cdot z_J = z_{I'} \cdot z_{J'}$

$\Sigma_{n,d}$ è intersezione di quadriche

eq(1) è eq. di grado $= 2$

Esempio: $v_{2,2}$

$$z_{11} \longleftrightarrow I_{1^2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$z_{12} \longleftrightarrow I_{12} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$z_{22} \longleftrightarrow I_{2^2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$I_{1^2} + I_{2^2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = I_{12} + I_{12}$$

$$\iff \quad z_{11} z_{22} - (z_{12})^2 = 0$$

---

eq(1) $\longleftrightarrow$

$$Z_{i_0 - i_m} \cdot Z_{j_0 - j_m} = Z_{k_0 - k_m} \cdot Z_{\ell_0 - \ell_m}$$

SE

$$i_0 + j_0 = k_0 + \ell_0$$

$$\vdots$$

Teorema

$$\nu_{n,d} : \mathbb{P}^n \longrightarrow \mathbb{P}^N$$

induce isomorfismo

$$\mathbb{P}^n \simeq \Sigma_{n,d}$$

DIM. (Idea)

- $\mathrm{Im}(\nu_{n,d}) \subseteq \Sigma_{n,d}$

poiché

$$(z_I z_J - z_{I'} z_{J'}) \circ \nu_{d,n}(x)$$

$$= x^{I} x^{J} - x^{I'} x^{J'} = 0$$

se $I+J = I'+J'$

<u>In carte:</u>

In $\mathbb{P}^n$ consideriamo

$$U_i = \{ x_i \neq 0 \}$$

In $\Sigma_{n,d}$ consideriamo

$$\Sigma_{n,d} \cap V_i$$

dove $V_i = \{ z_{I_i} \neq 0 \}$

$$I_i = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ d \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

"$z_{I_i} = x_i^d$"

$$\nu_{n,d} : U_i \xrightarrow{\sim} \Sigma_{n,d} \cap V_i$$

Infatti: è mappa polinomiale bijettiva

Inverso:

$$(\nu_{n,d})^{-1} : V_i \longrightarrow U_i$$

$$Z_I \longmapsto \Big(Z_{J_{0,i}}, \dots, \underset{\substack{\uparrow \\ i}}{1}, \dots Z_{J_{n,i}}\Big)$$

DOVE

$$Z_{J_{0,i}} \leftrightarrow J_{0,i} = \begin{array}{c}\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ d-1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\end{array} \begin{array}{c} \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \\ \end{array}$$

$$Z_{J_{n,i}} \leftrightarrow I_{n,i} = \begin{array}{c}\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ d-1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}\end{array} \begin{array}{c} \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \\ \end{array}$$

morfismo $(\nu_{2,2})^{-1}\big|_{V_i}$

$$x_i^{d-1} \cdot x_J \longleftarrow Z_{I,J}$$

<u>caso ν_0, V_0:</u>

$$x_0^{d-1} \cdot x_1 \longleftrightarrow Z_{I_1,0}$$

$$x_0^{d-1} \cdot x_2 \longleftrightarrow Z_{I_2,0}$$

$$\vdots$$

$\square$

COROLLARIO

Sia $W \subset \mathbb{P}^n$

ipersuperficie di grado d

allora $\mathbb{P}^n \setminus W$ è

varietà affine

DIM.

consideriamo la mappa di

Veronese $\nu_{n,d}$

$$\nu_{n,d} : \mathbb{P}^n \longrightarrow \mathbb{P}^N$$

$$X \longmapsto \{ z_I : \sum a_I z_I = 0 \}$$

$$\| \\ H$$

dove $X = V(f)$

$$f = \sum a_I x^I$$

$$\{ \sum a_I x^I = 0 \} \longrightarrow \{ \sum a_I z_I = 0 \}$$

$$\|$$

iperpiano = in $\mathbb{P}^N$

CONCLUSIONE:

$$\mathbb{P}^n \setminus W \xrightarrow{\cong} \Sigma_{n,d} \setminus H$$

varietà proiettiva $\setminus$ iperpiano

$\Rightarrow$ è varietà affine

$\square$

IERI: $X \subset \mathbb{P}^n$

Teo: $\pi_E : X \longrightarrow \pi_E(X) \subset \mathbb{P}^{n-d}$

è morfismo finito

La dim si basa su

Teorema. X varietà proiettiva

$\varphi : X \to Y$ morfismo

$\Rightarrow \varphi(X)$ è chiuso

PRODOTTO di VARIETA'

Siano X, Y varietà quasi proiettive

DEF. Una terna (Z, p_1, p_2)

con Z varietà q.p.

$p_1 : Z \to X$
$p_2 : Z \to Y$ morfismi

si dice prodotto $X \times Y$
se vale la seguente
proprietà UNIVERSALE:

$\forall$ varietà q.p. W

e morfismi $f_1 : W \to X$

$f_2 : W \to Y$

$\exists!$ morfismo $\phi : W \to Z$

che fa commutare il diagramma

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[dr, "\phi"] \arrow[drr, bend left, "f_2"] \arrow[ddr, bend right, "f_1"'] & & \\
& Z \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"] & Y \\
& X &
\end{tikzcd}$$

OSS. Il prodotto (se esiste) è unico

[Esercizio] Hint

P.A. $\exists$ Z_1, Z_2 allora

$$\begin{tikzcd}
 & Z_1 \arrow[dl, "p_2"'] \arrow[dr, "p_1"] \arrow[d, "\phi_{21}"] & \\
Y & Z_2 \arrow[l, "q_2"'] \arrow[r, "q_1"] \arrow[d, "\phi_{12}"] & X \\
 & Z_1 \arrow[ul, "p_2"] \arrow[ur, "p_1"'] &
\end{tikzcd}$$

p_i proiezioni di Z_1

q_i proiez. di Z_2

$\phi_{21} \circ \phi_{12} = \mathrm{Id}$

Esistenza.

costruzione del prodotto

PASSO 1: caso affine

PROP. 1

$$\mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^m \cong \mathbb{A}^{n+m}$$

$$\Big[\underbrace{(x_1, \dots, x_n)}_{x}, \underbrace{(y_1, \dots, y_m)}_{y}\Big] \to (x_1 \dots, x_n, y_1 \dots y_m)$$

$$p_1 : \mathbb{A}^{n+m} \longrightarrow \mathbb{A}^n$$
$$(x, y) \longmapsto x$$

$$p_2 : \mathbb{A}^{n+m} \longrightarrow \mathbb{A}^m$$
$$(x, y) \longmapsto y$$

p_1, p_2 sono morfismi

PROP. Universale

Data W &

$f_1 : W \longrightarrow \mathbb{A}^n$ morfismo

$f_2 : W \longrightarrow \mathbb{A}^m$ morfismo allora

$$(f_1, f_2) : W \longrightarrow \mathbb{A}^{n+m}$$

è l'unico morfismo che commuta con le proiezioni

Infatti:

$$f_1 = (f_{1,1}, \ldots, f_{1,n})$$

$$f_2 = (f_{2,1}, \ldots, f_{2,m})$$

allora

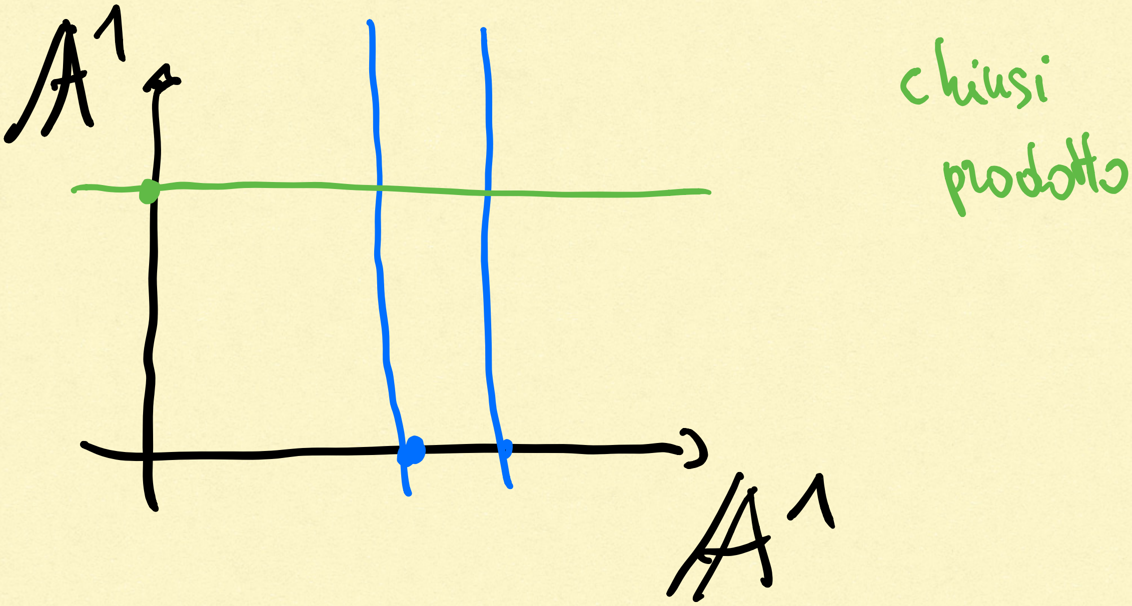
$$(f_1, f_2) = (f_{1,1}, \ldots, f_{1,n}, f_{2,1}, \ldots, f_{2,m})$$

$\square$

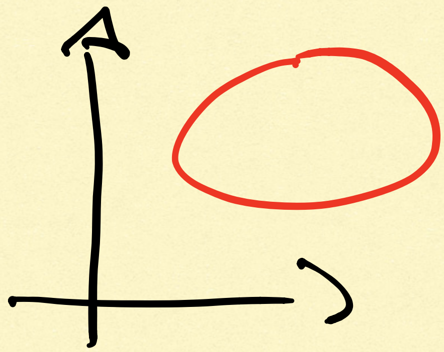
Oss. La topologia nel prodotto è più fine della topologia prodotto

Esempio

$$\mathbb{A}^2 = \mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^1$$



me in $\mathbb{A}^2$:



$\exists$ chiusi irriducibili diversi

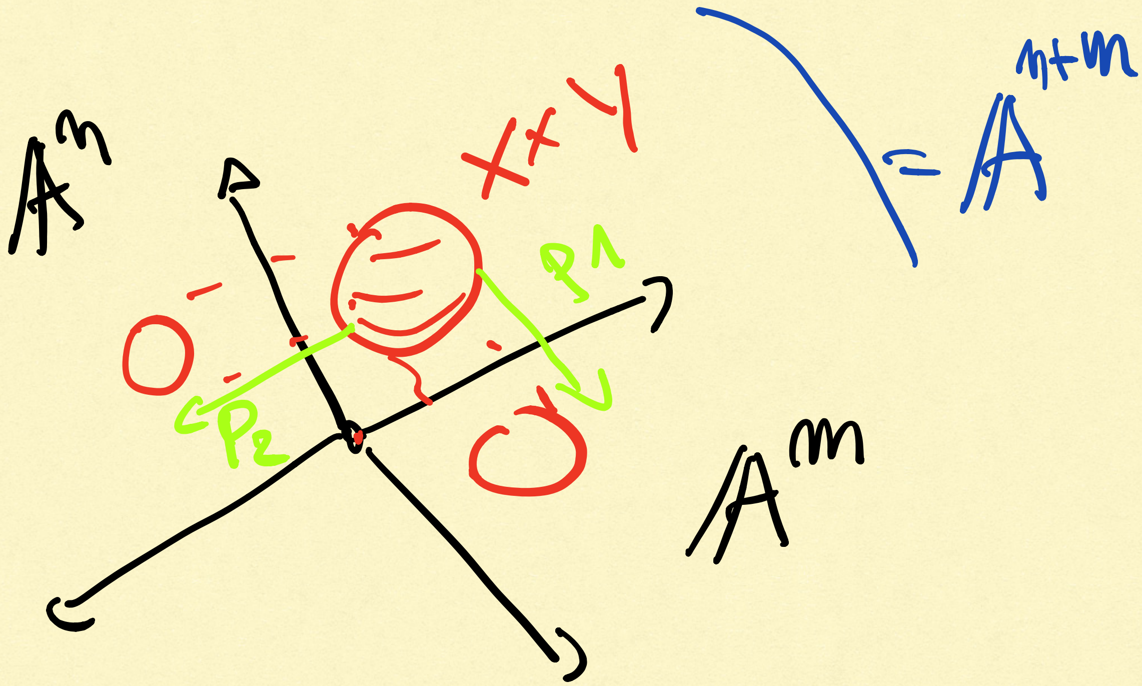
PROP. 2 $X \subseteq \mathbb{A}^n$ chiuso

$Y \subseteq \mathbb{A}^m$ chiuso

ALLORA:

$$X \times Y \cong p_1^{-1}(X) \cap p_2^{-1}(Y)$$

$$\subseteq \mathbb{A}^{n+m}$$



DIM. Sia $X = V(I)$

$I \subset \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$

$Y = V(J)$

$J \subset \mathbb{K}[y_1, \ldots, y_m]$

$$p_1^{-1}(X) \cap p_2^{-1}(Y) = \left\{ (x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_m) : \begin{array}{l} f(x) + g(y) = 0 \\ \forall f \in I \\ \forall g \in J \end{array} \right\}$$

$$= V(\tilde{I} + \tilde{J})$$

dove $\tilde{I} = p_1^*(I)$

$\tilde{J} = p_2^*(J)$

$$p_1^* : \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n] \hookrightarrow \mathbb{K}[x_1, \dots x_n, y_1, \dots y_m]$$

$$p(x) \longmapsto p(x, 0)$$

$$p_2^* : \mathbb{K}[y_1, \dots, y_m] \hookrightarrow \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m]$$

$$q(y) \longmapsto q(0, y)$$

$\square$

RELAZIONE con $\mathbb{K}$-algebre

PROP. 3 $\quad X \subseteq \mathbb{A}^n$, $\quad Y \subseteq \mathbb{A}^m$ chiusi affini

allora:

$$\mathbb{K}[X] \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{K}[Y] \xrightarrow{\ \cong\ } \mathbb{K}[X \times Y]$$

<u>dim</u> Introduciamo mappa

$$\mu : \mathbb{K}[X] \otimes \mathbb{K}[Y] \longrightarrow \mathbb{K}[X \times Y]$$
$$f \otimes g \longmapsto f \cdot g$$

μ è omo di $\mathbb{K}$-algebre indotto da

$$\mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[Y] \longrightarrow \mathbb{K}[X \times Y]$$
$$(f, g) \longmapsto f \cdot g$$

mappa bilineare

$\underline{\mu \text{ è surgettiva}}$:

$$X \times Y \subseteq \mathbb{A}^{n+m}$$

coord. $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$

$\Rightarrow \mathbb{K}[X \times Y]$ è generato come $\mathbb{K}$-algebra da $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m$

D'altra parte

$$x_i = \mu(x_i \otimes 1)$$
$$y_j = \mu(1 \otimes y_j)$$

dove $\{x_i\}$ generatori di $\mathbb{K}[X]$

$\{y_j\}$ generatori di $\mathbb{K}[Y]$

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{A}^{n+m} \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{A}^n \arrow[r] & X \\
\mathbb{A}^m \arrow[d] & & \\
Y & &
\end{tikzcd}
$$

μ è iniettiva

Sia $\varphi = \sum f_i \otimes g_J$

$$\in \mathbb{K}[X] \otimes \mathbb{K}[Y]$$

t.c. $\mu(\varphi) = 0$

Senza ledere la generalità possiamo supporre i

g_J lin. indipendenti

(eventualmente semplificando φ)

$$\mu\left(\sum f_i \otimes g_i\right) = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\sum f_i \cdot g_i = 0$$

cioè $\forall\ x \in X$ si ha

$$\sum f_i(x) \cdot g_i = 0$$

Ma $\{g_i\}$ è lin. IND.

$$\Rightarrow \quad f_i(x) = 0 \quad \forall i$$

$f_i(x)=0$ vale $\forall x \in X$

$\Rightarrow \quad f_i = 0$ in $\mathbb{K}[X]$

$\square$

PRODOTTO di varietà proiettive è "più complicato"

Esempio - Esercizio

$$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \not\cong \mathbb{P}^2$$

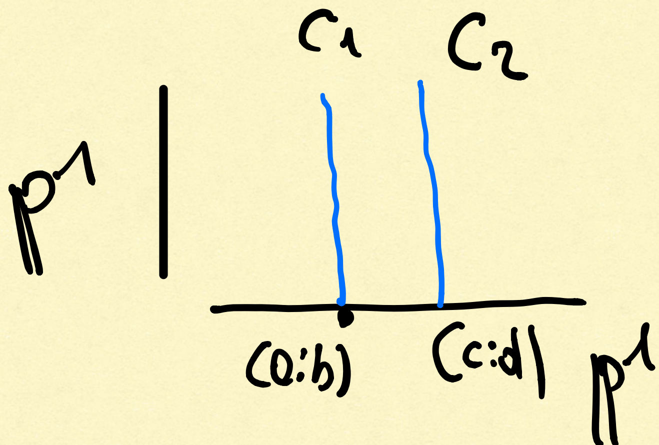
n.b. $\exists$ aperto $\mathcal{U}_0 \subset \mathbb{P}^1$

$V_0 \subset \mathbb{P}^1$

$$\mathcal{U}_0 \times V_0 \cong \mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^1 \cong \mathbb{A}^2$$

$$\mathbb{A}^2 \cong W_0 \subset \mathbb{P}^2$$

In $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$



$\exists$ curve che non si intersecano

$C_1 = (a:b) \times \mathbb{P}^1 \qquad C_2 = (c:d) \times \mathbb{P}^1$

se $(a:b) \neq (c:d)$

allora $C_1 \cap C_2 = \emptyset$

se p.A. $\exists$ isomorfismo

$\varphi : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^2$

allora $\varphi(C_1) =$ curva D_1

$\varphi(C_2) =$ curva D_2

Ma in $\mathbb{P}^2$ $\forall D_1, D_2$

si ha $D_1 \cap D_2 \neq \{0\}$

$\square$